2017-S 相対論講義ノート

May 1, 2018

編注　この講義ノートは「2015-S 相対論講義ノート」の誤り等を訂正しただけのものです。誤りが依然として残っている可能性もありますがご了承ください

第1回

1　序論

1.1　特殊相対性理論

等速直線運動をしている電車を考える。動いているのは電車なのか、窓の外の景色なのか、どっちだろうか。

もちろん動いているのは電車のほうだが、例えば密室にした電車の中で、実験・観測によってこの区別が付けられるだろうか。実は、この方法で電車の速度を求めることはできない。

- 絶対的な速度という概念は存在しない。
  電車の速度というのは、地面に対する相対速度である。
- 互いに等速直線運動している座標系は、すべて同等で絶対的なものはない。

この性質を**特殊相対性**という。(等速直線運動という特殊な運動に対する性質のため)

Newton 力学は特殊相対性を持つ。Einstein の特殊相対性理論との違いはなんだろうか?

例えば、時速 100km で走っている電車は、進行方向と逆向きに時速 50km で走っている観測者からは、時速 150km で運動しているように見える。このように、Newton 力学においては、速度に対して上限がない。

ところが、光は互いに等速直線運動しているどの観測者から見ても同じ速度に見える(**光速度不変**)。

特殊相対性+光速度不変→ Einstein の特殊相対性理論 となる。

1.2 一般相対性理論

先ほどと同様に密室にした電車を考える。この電車の中で、実験・観測によって電車の加速度を知ることはできるだろうか?

電車内のつり革がふれる角度から電車の加速度を求めることが出来る。

- Newton 力学では互いに**加速度運動**している座標系は同等ではない

ここから、Newton 力学には**一般相対性**はない。(より一般的な運動に適用できないため)

Newton の運動方程式が成り立つ特殊な座標系を慣性系と呼ぶ。

だが、本当に一般相対性は存在しないのだろうか?

例えば、密室にしたエレベーターで突然無重力状態になった時を考える。このとき、考えられる可能性は、

1. エレベーターが自由落下している
2. 地球が消えた

の 2 つである。この 2 つを実験・観測によって区別することは出来るだろうか?

似た例として、一様な電場中で等速加速度運動する電荷を考えると、この 2 つを区別することが出来る。

大きさ E の一様な電場に存在する箱に、質量 m、電荷 q の物体が入っている状態を考える。このとき、物体は大きさ $\frac{qE}{m}$ の加速度運動をする。

この物体が箱に対して静止したとき、

1. 箱が大きさ $\frac{qE}{m}$ の加速度運動をしている
2. 電場がゼロになった

の 2 つの可能性が存在する。例えば、電荷がゼロの物体を箱のなかに入れれば、1. と 2. は区別できる。より一般には、$\frac{q}{m}$ の値が異なる物体を箱のなかに置けばよい。

これを応用して重力の場合にも適用できないだろうか。重力の場合には、

$$ma = mg$$

このとき、

a: 物体の加速度

g: 重力加速度

だが、m は左辺と右辺で扱いが異なる。左辺の m は慣性質量で右辺の m は重力質量 (電場の時の電荷に対応) である。電荷の時に有効だったこの 2 つの値の比は、実験的にすべての物体に対して同じであるため、この手法では区別はできない。

実は、エレベーターが自由落下していることと地球が消えたことを局所的には区別できない。ここから、一般的な座標系の間の変換である**一般座標変換**に対する不変性が存在するのではないかと考えられる。ここから生まれた新しい重力理論が **Einstein の一般相対性理論**である。

1.3 現在の物理学における位置づけ

力学 Newton 力学 (古典力学) は、日常生活におけるほとんどすべての運動、および天文学的なスケールの運動を記述することができる力学である。ところが Newton 力学には適用限界があり、

- 光の速度程度に速い運動 ($3.0 \times 10^8 \mathrm{m/s}$) $\to$ 特殊相対性理論
- 分子や原子程度に小さい世界 $\to$ 量子力学
- 光などの電磁波 $\to$ Maxwell 方程式 (古典場の理論)

などには適用することができない。

これらの 3 つの理論をまとめて**場の量子論**と呼ぶ。ここから、素粒子の標準モデル (場の量子論)(電磁気力、強い力、弱い力) が構築される。

ここで重力はどのような扱いになるか。Newton の万有引力の法則から一般相対性理論 (古典場の理論) において理論化されたが、これを場の量子論で融合することができない。

これに対する重要な手がかりと目されているのは**超弦理論**である。

2 相対性

2.1 Newton の運動方程式

重さはあるが大きさはないと考えて物体を取り扱うとき、これを**質点**という。

このとき、時刻 t での位置

$$\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

を指定すれば、運動を記述したことになる。このとき、
速度は

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

$$\vec{v}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right)$$

加速度は

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}\end{aligned}$$

$$\vec{a}(t) = \left(\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^2y(t)}{\mathrm{d}t^2}, \frac{\mathrm{d}^2z(t)}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

第 2 回

休講: 5/12
補講: 7/17 5 限

Newton の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}\left(\vec{r}(t), \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}, t\right)$$

Newton の運動方程式が成り立つ座標系を慣性系と呼ぶ。ここで、
S 系: 一つの慣性系 (x, y, z, t)
S' 系: S 系に対して x 軸の正方向に一定の速度 V で動いている (x', y', z', t')
を仮定し、時刻 $t = 0, t' = 0$ で S 系と S' 系は一致するものとする。

Newton 力学における S 系と S' 系の関係　Galilei 変換を用いて、

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

ここで、時刻はすべての慣性系で共通な**絶対時間**である。以下、t' も t と書く。

例 1 一様な重力のもとでの運動　鉛直上向きを x 軸の正の方向とし、x 方向の運動のみを考える。

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -mg$$

$$x'(t) = x(t) - Vt$$

$$\frac{\mathrm{d}x'(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} - V$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x'(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x'(t)}{\mathrm{d}t^2} = -mg$$

以上より、運動方程式は Galilei 変換のもとで不変である。
もしも a_0 を定数として、

$$x'(t) = x(t) - \frac{1}{2}a_0 t^2$$

であったら、

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x'(t)}{\mathrm{d}t^2} = -mg - ma_0$$

となり、この変換に対して運動方程式は不変ではない。

例 2 バネから力を受ける質点　バネが自然長の状態を $x=0$、k をばね定数として、

$$m\frac{\mathrm{d}^2x\left(t\right)}{\mathrm{d}t^2}=-kx\left(t\right)$$

これは Galilei 変換のもとで不変ではない?→地球も含めて考えれば不変である。

2 つの質点 m_1 と m_2 を、バネ定数 k、自然長 x_0 のばねでつなぎ、それぞれの座標を x_1,x_2 とすると、

$$\begin{cases}m_1\frac{\mathrm{d}^2x_1(t)}{\mathrm{d}t^2}=k\left(x_2\left(t\right)-x_1\left(t\right)-x_0\right)\\m_2\frac{\mathrm{d}^2x_2(t)}{\mathrm{d}t^2}=-k\left(x_2\left(t\right)-x_1\left(t\right)-x_0\right)\end{cases}$$

となり、これは Galilei 変換に対して不変である。

このように、「変換則」(例:Galilei 変換) と「法則の形」(例:運動方程式) を組にして考えることが重要である。

速度に依存する力から絶対速度がわかるか?　例えば空気抵抗を調べても、空気との相対速度しかわからない。

このように、Newton 力学の Galilei 相対性がいえる。

磁場から受ける力は速度に依存する　磁場中を動く導体棒には、速度に依存した起電力が発生する。これを利用して絶対速度を測定することはできるか?

実際には導体棒を固定し磁場を動かした場合にも電磁誘導により起電力が生じる。やはり絶対速度を測定することはできない。

2.2　波動方程式

質量 M の質点を、間隔 a で x 軸上に無限に置き、隣り合う質点どうしをそれぞればね定数 k、自然長 $a_0\left(a_0<a\right)$ のばねでつなぐことを考える。n 番目のおもりの y 方向の変位を $y_n\left(t\right)$ とする。変位が小さい時、運動方程式は、

$$M\frac{\mathrm{d}^2y_n}{\mathrm{d}t^2}=-k'\left(y_n-y_{n-1}\right)+k'\left(y_{n+1}-y_n\right)$$

となる。ただし $k'=\frac{a-a_0}{a}k$ である。(詳しくは講義「振動・波動」で)

連続体の極限 $a\to 0$ を考えると、$a_0\to 0,k\to\infty,M\to 0$ となるが、

$$\frac{a-a_0}{a},k\left(a-a_0\right),\frac{M}{a}$$

は有限になるようにする。

T を張力、σ を単位長あたりの質量として、

$$k\left(a-a_0\right) \to T, \frac{M}{a} \to \sigma$$

とする。連続体の x 軸からの変位を $u\left(x,t\right)$ とすると、$y_n\left(t\right)$ は $x=na$ での $u\left(x,t\right)$ となるので、

$$y_n\left(t\right) = u\left(na,t\right)$$

となる。

詳しい計算は省くが、$a \to 0$ では、

$$\sigma \frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial x^2}$$

となる。

なお ∂ は偏微分であり、多変数関数 $f\left(x,y\right)$ に対して

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x+\Delta x,y\right)-f\left(x,y\right)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f\left(x,y+\Delta y\right)-f\left(x,y\right)}{\Delta y}$$

と定義される。

例えば、$f\left(x,y\right) = x^2 y + xy + 4x + 5y + 6$ とすると、

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x} = 2xy + y + 4$$

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y} = x^2 + x + 5$$

となる。

上式にもどり、$v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$ とすると、

$$\frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u\left(x,t\right)}{\partial x^2}$$

となる。これが**波動方程式**である。

進行波　A, k, ω, ϕ を定数とすると、

$$u(x,t) = A\cos(kx - \omega t - \phi)$$

は進行波になる。ここで、k を波数、$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ を波長、ω を角振動数、$T = \frac{2\pi}{\omega}$ を周期と呼ぶ。

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(kx - \omega t - \phi)$$
$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 A\cos(kx - \omega t - \phi)$$

から、$\omega^2 = v^2 k^2$ のときに解を持つ。

$k > 0, \omega > 0$ のとき、右向きに進む波を表す。波の速度 (位相速度) は、

$$\frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = v$$

となる。

$k < 0, \omega > 0$ のとき、左向きに進む波を表す。速度は同様に v である。

S' 系での波の速度は、

$$\text{右向きの波} v - V$$
$$\text{左向きの波} v + V$$

となる。よって、波動方程式は Galilei 変換のもとで不変ではない。

弾性体の簡単なモデル　加えた力に比例して変形し、力を取り除いたら元に戻る物体を考える。これは、質点を間隔 a で空間上に無限に置き、隣り合う質点どうしをばねで接続するモデルで $a \to 0$ の極限を取ることによって考えることができる。

このモデルにおけるある種の波は、y 座標、z 座標には依存せず、先の一次元的なモデルと同様に考えることができる (y 方向の変位 $u(x,t)$ に対しては、yz 平面がそのまま y 方向に動くイメージ)。これを**横波**という。

よって波動方程式は、ρ を密度、p を単位面積当たりの張力とすると、

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = p \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

となる。よって横波の速さは $\sqrt{\frac{p}{\rho}}$ となる。また、より速い**縦波**も存在する。

これらの方程式は Galilei 変換のもとで不変ではない。(媒質の静止系での運動方程式)

第 3 回

先週の質問

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - Vt \\ x_2'(t) = x_2(t) - Vt \end{cases}$$

で不変
また、波動方程式は S' 系で不変ではないとしたが、S' 系で $u'(x', t')$ とすると、

$$u'(x', t') = u(x, t)$$

であり、

$$\frac{\partial^2 u'(x', t')}{\partial t'^2} - \left(v^2 - V^2\right) \frac{\partial^2 u'(x', t')}{\partial x'^2} - 2V \frac{\partial^2 u'(x', t')}{\partial t' \partial x'} = 0$$

を満たす。
そこで

$$u'(x', t') = A \cos(kx' - \omega t' - \phi)$$

とすると、

$$\begin{aligned} &\omega^2 - \left(v^2 - V^2\right) k^2 - 2V\omega k = 0 \\ \Rightarrow &\omega = (v - V) k, -(v + V) k \end{aligned}$$

となり、波の速さが求まる。よって、右向きと左向きの波の速さから V が分かる。

2.3 Maxwell 方程式

電荷や電流がない真空中で電場 $\overrightarrow{E} = (E_x, E_y, E_z)$ で、磁場 (磁束密度) $\overrightarrow{B} = (B_{x,}, B_y, B_z)$ が y や z に依存しないときを考える。
ε_0 を真空の誘電率、μ_0 を真空の透磁率とすると、Maxwell 方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial B_x}{\partial t} &= 0 \\
-\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t} &= 0 \\
\frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial B_z}{\partial t} &= 0 \cdots ① \\
\frac{\partial E_x}{\partial x} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} &= 0 \\
-\frac{\partial B_z}{\partial x} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} &= 0 \cdots ② \\
\frac{\partial B_y}{\partial x} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} &= 0 \\
\frac{\partial B_x}{\partial x} &= 0
\end{aligned}
$$

となる。式を変換して

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(①\text{の式}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(②\text{の式}\right) &= 0 \\
\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} &= 0
\end{aligned}
$$

となり、速さ $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ の波動方程式となる。

ここで E_0, B_0, k, ω をすべて正の定数として、

$$
\begin{cases}
E_y(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t) \\
E_z(x,t) = B_0 \cos(kx - \omega t)
\end{cases}
$$

を①、②に代入すると、

$$
\begin{aligned}
&(-kE_0 + \omega B_0) \sin(kx - \omega t) = 0 \\
&(kB_0 + \varepsilon_0 \mu_0 \omega E_0) \sin(kx - \omega t) = 0 \\
&\Rightarrow \omega = ck, B_0 = \frac{E_x}{c}, c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}
\end{aligned}
$$

という解が得られ、これは x 軸の正の方向に進む波を表す。これが**電磁波**である。
実際に計算してみると、

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \mathrm{C^2/Nm^2}$$
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \mathrm{N/A^2}$$

より、

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.998 \times 10^8 \mathrm{m/s}$$

となり、光の速度に一致する。

E_z, B_y を含む式でも電磁波の解が構成できる。すなわち、$(E_y, B_z), (E_z, B_y)$ の 2 種類の偏光が存在する。

では、この $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ はどの慣性系の速度なのか。Maxwell 方程式は Galilei 変換のもとで不変ではない。ここでいくつかの可能性が考えられる。1 つは、相対性は存在せず、Maxwell 方程式が成り立つ特別な慣性系が存在するというもの。1 つは、相対性は存在し、Galilei 変換のもとで Maxwell 方程式を修正しなければならないというもの。さらに 1 つは、相対性は存在するが、修正するべきは Maxwell 方程式ではなく Galilei 変換であるというものである。この場合、Newton 力学も修正しなければならない可能性が高い。

これを検証するには、異なる慣性系での光速度の測定が鍵となる。しかし、光の速度は非常に速いため、非常に精密な測定が求められる。そこで、地球の公転を利用する。地球の公転速度は $v \simeq 3 \times 10^4 \mathrm{m/s}$ であり、$\frac{v}{c} \simeq 10^{-4}$ となり、測定可能なレベルまで落としこむことができる。

3　光速度不変性

3.1　光の伝播

Maxwell 方程式の発見以前の天文観測

1. R ø mer による光速度の測定

   木星の衛星イオの触の周期が木星との相対速度によって変化することを利用して、光速度を計算した。これによると、光速度はおよそ $2 \times 10^8 \mathrm{m/s}$ であった。これにより光速度の有限性が知られた。

2. Bradley による星の光行差の測定

   地球の公転面から、天球上に存在する星になす角度を考える。地球が太陽から見て星の方向に存在するとき、逆の方向に存在するとき、その中間の位置のうち、この角度が最も小さくなるのはいつだろうか?

答えは地球が星に対して逆方向から正方向に移動する中間の位置である。

光に対して観測者が高速度で動いている場合、光の見える方向が変化する。これを**光行差**という。観測者の速度を v、正しい光の方向を θ、実際に観測できる光の方向を θ_0 とすると、

$$v\Delta t\sin\theta = c\Delta t\sin\alpha$$
$$\sin\alpha \simeq \sin\theta_0$$
$$\sin\alpha \simeq \alpha\,(\mathrm{radian})$$
$$\alpha \simeq \frac{v}{c}\sin\theta_0$$

$\theta_0 = 75^\circ, \frac{v}{c} = 10^{-4}$ のとき、$2\alpha \simeq 40''$ となる。

エーテル　これらの観測結果を説明するために、Maxwell 方程式の解である電磁波を伝える媒質があると仮定された。これを**エーテル**と呼ぶ。

ところがこれを考えると説明がつかないことがいくつかある。

- エーテルを波を伝える弾性体とすると、光の速度が速いため、異常に復元力が大きい物質となってしまう。
- 縦波が存在しない。
- 星の光行差の測定結果から、エーテルは地球の運動に全く引きずられていないことになる。

以上のような点から、エーテルの存在は長らく疑問視されていた。

3.2 Michelson-Morley の実験

干渉を利用して光の速度の変化の測定を試みる実験である。地上で観測できるため、様々に方向を変えて光速度を測定することができる。

もしエーテルが存在するならば、地球の公転方向に対して平行方向に測定した時と垂直方向に測定した時でエーテルの風の影響が異なるため、速度に変化が出るはずである。

Michelson-Morley の装置の光源方向のビームをビーム 1、干渉計方向のビームをビーム 2 とし、2 つのビームの所要時間差を $\Delta t = t_2 - t_1$ とし、ビーム 1 に平行方向にエーテルの風が速度 v で吹いているとする。

ビーム 1 の所要時間は、

$$t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2l_1}{c}\frac{1}{1-\beta^2}$$

となる。ただし $\beta = \frac{v}{c}$ である。
ビーム 2 の所要時間は、エーテルの静止系で考えると、

$$\sqrt{l_2^2 + \left(\frac{vt_2}{2}\right)^2} = \frac{ct_2}{2}$$

$$t_2 = \frac{2l_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta t = \frac{2}{c}\left(\frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{l_1}{1-\beta^2}\right)$$

となり、干渉縞が観測される。
さらに、装置を 90 度回転させると、

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{2}{c}\left(\frac{l_2}{1-\beta^2} - \frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

となる。

第 4 回

まずは先週の結果より、

$$\Delta t = \frac{2}{c}\left(\frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{l_1}{1-\beta^2}\right)$$
$$\Delta t' = \frac{2}{c}\left(\frac{l_2}{1-\beta^2} - \frac{l_1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

を確認する。

時間差の変化は、

$$\begin{aligned}
\Delta t' - \Delta t &= \frac{2\left(l_1 + l_2\right)}{c}\left(\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \\
&\simeq \frac{2\left(l_1 + l_2\right)}{c}\left[\left(1+\beta^2\right) - \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)\right] \\
&= \frac{l_1 + l_2}{c}\beta^2 \\
\Delta\delta &= \frac{\Delta t' - \Delta t}{\text{周期}} = \frac{c\left(\Delta t' - \Delta t\right)}{\lambda} \\
&\simeq \frac{l_1 + l_2}{\lambda}\beta^2
\end{aligned}$$

実際の実験では、$l_1 = l_2 = 11\mathrm{m}$、$\lambda = 5.5 \times 10^{-7}\mathrm{m}$、$\beta = \frac{v}{c} = 10^{-4}$ 程度で行われるとすると、$\Delta\delta = 0.4$ となり、検証可能な値となる。ところが、測定の結果は $\Delta\delta < 0.01$ とされ、エーテルの風速は地球の公転速度よりはるかに小さくなければならない。

同時に、先週の星の光行差の実験では、エーテルが地球に全く引きずられていないと考えなければ説明がつかなかった。となると、公転する地球が偶然エーテルの静止系に相当するという可能性しか残らないが、これは考えにくい。そこで、**光速度はどの慣性系でも同じ**なのではないかと考えられた。

ここから、ニュートン力学の相対性と両立するように Galilei 変換を修正することを考えることになる。

4 Lorentz 変換

本章の内容は、おおむね 1905 年の Einstein の論文『アインシュタイン相対性理論』(岩波文庫 内山龍雄 訳・解説) の内容である。

4.1 同時性

光の速度はどの慣性系でも同じであるとする。また、A さん、B さん、C さんは S' 系で静止しているものとする。ここで、以下のようなイベントを考える。

イベント 1: B さんが A さんと C さんに光を発射する

イベント 2: A さんが光を受ける

イベント 3: C さんが光を受ける

これらのイベントを、(i)y 軸上に A, B, C がこの順に等間隔に存在する場合、(ii)x 軸上に A, B, C がこの順に等間隔に存在する場合の 2 通りで考える。

(i) と (ii) のそれぞれについてイベント 1~3 は S' 系と S 系でどのように記述されるだろうか?

(i) を S' 系で観測した場合、光は B から上下反対方向に進行し、イベント 2 とイベント 3 は同時刻に観測される。また、S 系で観測した場合、光は B から上下に進行しながら速度 V で x 軸方向に運動し、イベント 2 とイベント 3 は同時刻に観測される。

(ii) を S' 系で観測した場合、光は B から左右反対方向に進行し、イベント 2 とイベント 3 は同時刻に観測される。ところが、S 系で観測した場合、B が発射した場所と A が受け取った場所の距離、B が発射した場所と C が受け取った場所の距離が異なる。光がどの慣性系でも同じ速度であると仮定したので、イベント 2 のほうがイベント 3 よりも先に観測されることになる。

ここから、S' 系で同時刻のことが S 系では同時刻ではない。全ての慣性系に共通な時間が存在しないと考えなければいけない。

質点の運動は $\vec{r}\,(t)$ と記述されるが、この t、すなわち「ある慣性系での時間」をどのように定義すればよいだろうか?

Einstein の定義　その系で静止しているあらゆる時計の合わせかたを考える。

ある間隔離れた点 A と点 B について、以下のイベントを考える。

イベント 1: A から B に光を発射する

イベント 2: B で光を反射する

イベント 3: A で反射光を受ける

ここで、t_A をイベント 1 での A の時計の読み、t_B をイベント 2 での B の時計の読み、$\tilde{t}_A$ をイベント 3 での A の時計の読みとする。

$$t_B - t_A = \tilde{t}_A - t_B$$

ならば A と B の時計は合っているものとする。このようにあらゆる時計を合わせて、その慣性系での時間を定義する。

そして、$\overline{AB}$ をその系で静止しているものさしで測った AB 間の距離として、その慣性系での光の速度

$$c = \frac{2\overline{AB}}{\tilde{t}_A - t_A}$$

が一定でなければならない。

4.2　Lorentz 変換の導出

S 系での (x, y, z, t) と S' 系での (x', y', z', t') の変換則を導出する。

S 系で空間的や時間的に等間隔なイベントは S' 系でも等間隔でなければならない。すなわち、変換則は 1 次式でなければならない。

(x', y', z', t') が (x, y, z, t) の 1 次式であることの別の説明

S 系で等速直線運動であるものは S' 系でも等速直線運動となる。

また、便宜上 $(x, y, z, t) = (0, 0, 0, 0)$ が $(x', y', z', t') = (0, 0, 0, 0)$ に対応するように選ぶものとする。よって $\Lambda_{ij}\ (i, j = 1, 2, 3, 4)$ を定数として、

$$
\begin{aligned}
x' &= \Lambda_{11}x + \Lambda_{12}y + \Lambda_{13}z + \Lambda_{14}t \\
y' &= \Lambda_{21}x + \Lambda_{22}y + \Lambda_{23}z + \Lambda_{24}t \\
z' &= \Lambda_{31}x + \Lambda_{32}y + \Lambda_{33}z + \Lambda_{34}t \\
t' &= \Lambda_{41}x + \Lambda_{42}y + \Lambda_{43}z + \Lambda_{44}t
\end{aligned}
$$

と定義できる。(なお、Galilei 変換では $\Lambda_{11} = \Lambda_{22} = \Lambda_{33} = \Lambda_{44} = 1, \Lambda_{14} = -V$ でその他はゼロである)

ここで、S 系で x の代わりに $\tilde{x} = x - Vt$ を用いると便利である。$\tilde{x}$ は S 系の量であるが、S' 系で静止している点に対しては一定となる。

$$
\begin{aligned}
x' &= L_{11}\tilde{x} + L_{12}y + L_{13}z + L_{14}t \\
y' &= L_{21}\tilde{x} + L_{22}y + L_{23}z + L_{24}t \\
z' &= L_{31}\tilde{x} + L_{32}y + L_{33}z + L_{34}t \\
t' &= L_{41}\tilde{x} + L_{42}y + L_{43}z + L_{44}t
\end{aligned}
$$

これら 16 個の定数 L_{ij} を決めることが以下の目標となる。

S' 系の原点を O'、x' 軸上の固定点を R'、y' 軸上の固定点を $\tilde{R}'$ とする。ここで以下のイベントを考える。

イベント X_0: O' から R' に光を発射

イベント X_1: R' から O' に光を反射

イベント X_2: O' から R' に光を反射

イベント X_3: R' で反射光を受ける

イベント Y_0: O' から $\tilde{R}'$ に光を発射

イベント Y_1: $\tilde{R}'$ から O' に光を反射

イベント Y_2: O' が反射光を受ける

また、S' 系での $O'R'$ 間の距離を l'_1、S' 系での $O'\tilde{R}'$ 間の距離を l'_2、S 系での $O'R'$ 間の距離を l_1、S 系での $O'\tilde{R}'$ 間の距離を l_2 とする。

イベントの座標　X_0, Y_0 の時刻を $t=t'=0$ とする。
X 系列のイベントの各系での座標は

	S' 系 (x', y', z', t')	S 系 $(\tilde{x}, y, z, t)$
X_0	$(0,0,0,0)$	$(0,0,0,0)$
X_1	$(l_1', 0, 0, t_1')$	$(l_1, 0, 0, t_1)$
X_2	$(0,0,0,t_2')$	$(0,0,0,t_2)$
X_3	$(l_1', 0, 0, t_3')$	$(l_1, 0, 0, t_3)$

となる。
$\tilde{x}$ の例として X_0 の場合を具体的に考えると

$$t = t_1, x = l_1 + Vt$$

であるので、$\tilde{x}$ は

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x - Vt \\ &= l_1 + Vt_1 - Vt_1 \\ &= l_1\end{aligned}$$

となる。
また、Y 系列のイベントの座標は

	S' 系 (x', y', z', t')	S 系 $(\tilde{x}, y, z, t)$
Y_0	$(0,0,0,0)$	$(0,0,0,0)$
Y_1	$\left(0, l_2', 0, \tilde{t_1'}\right)$	$\left(0, l_2, 0, \tilde{t_1}\right)$
Y_2	$\left(0,0,0,\tilde{t_2'}\right)$	$\left(0,0,0,\tilde{t_2}\right)$

となる。

以下では、S' 系の量を S 系の量で表すことを目標にする。
それなりに長い議論になるので、複数の部分に分割して考える。
(i) t' の決定 (前半)
イベント Y_0, Y_1, Y_2 を考える。

	t'	(x, y, z, t)
Y_0	0	$(0,0,0,0)$
Y_1	$\tilde{t_1'}$	$\left(0, l_2, 0, \tilde{t_1}\right)$
Y_2	$\tilde{t_2'}$	$\left(0,0,0,\tilde{t_2}\right)$

S 系で光の速度は一定だから

$$\tilde{t_1'} = \frac{1}{2}\tilde{t_2}$$

S 系で光の速度が c であることから $\tilde{t_1}, \tilde{t_2}$ を求める。

$$Y_0 \Rightarrow Y_1$$
$$c\tilde{t_1} = \sqrt{l_2^2 + \left(V\tilde{t_1}\right)^2}$$
$$\tilde{t_1} = \frac{l_2}{\sqrt{c^2 - V^2}}$$

$Y_1 \Rightarrow Y_2$ について、"時計合わせ" より

$$\tilde{t_2} - \tilde{t_1} = \tilde{t_1} - 0$$
$$\tilde{t_2} = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - V^2}}$$

よって、

	t'	(x, y, z, t)
Y_0	0	$(0, 0, 0, 0)$
Y_1	$\tilde{t}_1'$	$\left(0, l_2, 0, \frac{l_2}{\sqrt{c^2-V^2}}\right)$
Y_2	$\tilde{t}_2'$	$\left(0, 0, 0, \frac{2l_2}{\sqrt{c^2-V^2}}\right)$

$t' = L_{41}\tilde{x} + L_{42}y + L_{43}z + L_{44}t$ より、

$$\begin{cases} \tilde{t_1}' = L_{42}l_2 + L_{44}\frac{l_2}{\sqrt{c^2-V^2}} \\ \tilde{t_2}' = L_{44}\frac{2l_2}{\sqrt{c^2-V^2}} \end{cases}$$

$$\tilde{t_1}' = \frac{1}{2}\tilde{t_2}' \Rightarrow L_{42} = 0$$

y' 軸→ z' 軸とすると、

$$L_{43} = 0$$

(ii)t' の決定 (後半)

イベント X_0, X_1, X_2 を考える。

	t'	(x, y, z, t)
X_0	0	$(0, 0, 0, 0)$
X_1	t_1'	$(l_1, 0, 0, t_1)$
X_2	t_2'	$(0, 0, 0, t_2)$

S' 系で " 時計合わせ " より

$$t_1' = \frac{1}{2}t_2'$$

S 系で光の速度が c であることから、t_1, t_2 を求める。
$X_0 \Rightarrow X_1$ について、

$$ct_1 = l_1 + Vt_1$$
$$t_1 = \frac{l_1}{c-V}$$

$X_1 \Rightarrow X_2$ について、

$$c\left(t_2 - t_1\right) = l_1 - V\left(t_2 - t_1\right)$$
$$t_2 - t_1 = \frac{l_1}{c+V}$$
$$t_2 = \frac{l_1}{c-V} + \frac{l_1}{c+V}$$

よって、

	t'	(x, y, z, t)
X_0	0	$(0, 0, 0, 0)$
X_1	t_1'	$\left(l_1, 0, 0, \frac{l_1}{c-V}\right)$
X_2	t_2'	$\left(0, 0, 0, \frac{l_1}{c-V} + \frac{l_1}{c+V}\right)$

$t' = L_{41}\tilde{x} + L_{42}y + L_{43}z + L_{44}t$ より、

$$\begin{cases} t_1' = L_{41}l_1 + L_{44}\frac{l_1}{c-V} \\ t_2' = L_{44}\left(\frac{l_1}{c-V} + \frac{l_1}{c+V}\right) \end{cases}$$

$t_1' = \frac{1}{2}t_2'$ より、

$$L_{41} = -\frac{V}{c^2 - V^2}L_{44}$$

ここまでの式より、

$$t' = L_{44}\left(-\frac{V}{c^2 - V^2}\tilde{x} + t\right)$$
$$= L_{44}\left(-\frac{V}{c^2 - V^2}x + \frac{c^2}{c^2 - V^2}t\right)$$

となり、t' が x に依存していることがわかる。

(iii) x' の決定
イベント X_1, X_3 を考える。

	x'	$(\tilde{x}, y, z, t)$
X_1	l_1'	$(l_1, 0, 0, t_1)$
X_3	l_1'	$(l_1, 0, 0, t_3)$

$x' = L_{11}\tilde{x} + L_{12}y + L_{13}z + L_{14}t$ より、

$$\begin{cases} l_1' = L_{11}l_1 + L_{14}t_1 \\ l_1' = L_{11}l_1 + L_{14}t_3 \end{cases}$$

差を取って、$L_{14}(t_3 - t_1) = 0$ より、

$$L_{14} = 0$$

次にイベント Y_1: $x' = 0, (\tilde{x}, y, z, t) = \left(0, l_2, 0, \tilde{t_1}\right)$ を考える。
$x' = L_{11}\tilde{x} + L_{12}y + L_{13}z + L_{14}t$ より、$0 = L_{12}l_2$、すなわち

$$L_{12} = 0$$

さらに y' 軸→ z' 軸とすると、

$$L_{13} = 0$$

となる。以上より

$$x' = L_{11}\tilde{x}$$

次に、L_{11} を L_{44} で表す。イベント $X_0 \to X_1$ を考える。

	(x', y', z', t')	$(\tilde{x}, y, z, t)$
X_0	$(0, 0, 0, 0)$	$(0, 0, 0, 0)$
X_1	$(l_1', 0, 0, t_1')$	$\left(l_1, 0, 0, \frac{l_1}{c-V}\right)$

$x' = L_{11}\tilde{x}$ であるので、$l_1' = L_{11}l_1$
S' 系での光の速度が c であることより、

$$l_1' = ct_1'$$

上の方の式を色々代入して

$$L_{11}l_1 = L_{44}\frac{c^2 l_1}{c^2 - V^2}$$

$$L_{11} = \frac{c^2}{c^2 - V^2}L_{44}$$

ゆえに x' は

$$x' = L_{44}\frac{c^2}{c^2 - V^2}\tilde{x} = L_{44}\frac{c^2}{c^2 - V^2}(x - Vt)$$

(iv) y', z' の決定
まず z' を考える。
1. L_{31}, L_{34} について
イベント X_1, X_3 を考える。

	z'	$(\tilde{x}, y, z, t)$
X_1	0	$(l_1, 0, 0, t_1)$
X_3	0	$(l_1, 0, 0, t_3)$

$z' = L_{31}\tilde{x} + L_{32}y + L_{33}z + L_{34}t$ より、

$$\begin{cases} 0 = L_{31}l_1 + L_{34}t_1 \\ 0 = L_{31}l_1 + L_{34}t_3 \end{cases}$$

$L_{34}(t_3 - t_1) = 0$ より、

$$L_{34} = 0$$

$L_{31}l_1 = 0$ より、

$$L_{31} = 0$$

2. L_{32}, L_{33} について
イベント Y_2:$z' = 0, (\tilde{x}, y, z, t) = (0, l_2, 0, t_2)$ を考える。
$z' = L_{31}\tilde{x} + L_{32}y + L_{33}z + L_{34}t$ より、$0 = L_{32}l_2$、すなわち

$$L_{32} = 0$$

以上より、

$$z' = L_{33}z$$

となる。
y' 軸と z' 軸の役割を交換すると、

$$L_{24} = 0, L_{21} = 0, L_{23} = 0, y' = L_{22}y$$

が得られる。

3. L_{22} を L_{44} で表す。
イベント $Y_0 \to Y_1$ を考える。

	(x', y', z', t')	$(\tilde{x}, y, z, t)$
Y_0	$(0,0,0,0)$	$(0,0,0,0)$
Y_1	$\left(0, l_2', 0, \tilde{t}_1'\right)$	$\left(0, l_2, 0, \frac{l_2}{\sqrt{c^2-V^2}}\right)$

$t' = L_{44}\left(-\frac{V}{c^2-V^2}\tilde{x} + t\right)$ より、

$$\tilde{t_1}' = L_{44}\frac{l_2}{\sqrt{c^2-V^2}}$$

$y' = L_{22}y$ より、

$$l_2' = L_{22}l_2$$

S' 系で光の速度が c であることより、

$$l_2' = c\tilde{t_1}'$$

$L_{22}l_2 = L_{44}\frac{cl_2}{\sqrt{c^2-V^2}}$ より、

$$L_{22} = \frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}L_{44}$$

y' 軸→ z' 軸とすると、

$$L_{33} = \frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}L_{44}$$

以上より、16 個の行列成分すべてを L_{44} で表すことができた。
(v) L_{44} の決定
まとめると、

$$\begin{aligned}
t' &= L_{44}\left(-\frac{V}{c^2-V^2}x + \frac{c^2}{c^2-V^2}t\right) \\
x' &= L_{44}\left(\frac{c^2}{c^2-V^2}x - \frac{c^2V}{c^2-V^2}t\right) \\
y' &= L_{44}\frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}y \\
z' &= L_{44}\frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}z
\end{aligned}$$

ここで $L_{44}\frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}=\varphi(V)$ と書くと、

$$\begin{aligned}
ct' &= \varphi(V)\left(\frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}ct-\frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}x\right)\\
x' &= \varphi(V)\left(\frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}x-\frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}ct\right)\\
y' &= \varphi(V)\,y\\
z' &= \varphi(V)\,z
\end{aligned}$$

ところで逆に S' 系から S 系への変換は、

$$y=\varphi(-V)\,y'$$

によって表現される。よって、

$$y=\varphi(-V)\,\varphi(V)\,y\Rightarrow\varphi(-V)\,\varphi(V)=1$$

が導かれる。
$\mathrm{O}'\tilde{\mathrm{R}}'$ 間の距離は S 系では l_2,S' 系では l'_2 で、

$$l'_2=L_{22}l_2$$

であった。

$$L_{22}=\frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}L_{44}=\varphi(V)$$

より、

$$l_2=\frac{l'_2}{\varphi(V)}$$

S' 系で長さ l'_2 の棒が S 系では長さ $\frac{l'_2}{\varphi(V)}$ に見える。$V\to-V$ とすると、$\frac{l'_2}{\varphi(-V)}$ となるが、x 軸の正負の向きが同等であれば、

$$\frac{l'_2}{\varphi(V)}=\frac{l'_2}{\varphi(-V)}\Rightarrow\varphi(-V)=\varphi(V)$$

よって、

$$\varphi(V)^2=1\Rightarrow\varphi(V)=\pm1$$

$V\to0$ で S' 系が S 系になるためには $\varphi(V)=1$ でないといけない。

以上により Lorentz 変換が求められた。

$$
\begin{aligned}
ct' &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}} ct - \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}} x \\
x' &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}} x - \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}} ct \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
$$

V が c に比べてとても小さいとき、

$$
\begin{aligned}
t' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} t - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \frac{V^2}{c^2} \frac{x}{V} \simeq t \\
x' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} x - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} Vt \simeq x - Vt \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
$$

ここから Galilei 変換が再現される。
また、S' 系から S 系への変換 (逆変換) は

$$
\begin{aligned}
ct &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}} ct' + \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}} x' \\
x &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}} x' + \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}} ct' \\
y &= y' \\
z &= z'
\end{aligned}
$$

4.3 速度の変換則

S' 系において時刻 t'_0 のとき座標 x'_0 だったものが、$\Delta t'$ 時間後に $\Delta x'$ だけ移動する運動が、時刻 t_0 のとき座標 x_0、Δt 時間後に Δx だけ移動する運動に見えるものと考える。
すなわち、S 系において $(x'_0, y'_0, z'_0, t'_0), (x'_0 + \Delta x', y'_0 + \Delta y', z'_0 + \Delta z', t'_0 + \Delta t')$ である点が、S' 系では $(x_0, y_0, z_0, t_0), (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z, t_0 + \Delta t)$ となるものとする。

$$
\begin{aligned}
ct_0 &= \frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}ct'_0 + \frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}x'_o \\
x_0 &= \frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}x'_0 + \frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}ct'_0
\end{aligned}
$$

これを少し動かすと

$$
\begin{aligned}
c\left(t_0+\Delta t\right) &= \frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}c\left(t'_0+\Delta t'\right) + \frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}\left(x'_0+\Delta x'\right) \\
x_0+\Delta x &= \frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}\left(x'_0+\Delta x'\right) + \frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}c\left(t'_0+\Delta t'\right)
\end{aligned}
$$

差を取って

$$
\begin{aligned}
c\Delta t &= \frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}c\Delta t' + \frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}\Delta x' \\
\Delta x &= \frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}\Delta x' + \frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}c\Delta t' \\
\Delta y &= \Delta y' \\
\Delta z &= \Delta z'
\end{aligned}
$$

となり、要は各変数にデルタを付せば良いということである。(逆変換は $V \to -V$)
S' 系での速度 $\overrightarrow{v'} = \left(v'_x, v'_y, v'_z\right)$、$S$ 系での速度 $\overrightarrow{v} = \left(v_x, v_y, v_z\right)$ とすると、

$$
v'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}, v'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'}, v'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'}
$$

$$
v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}, v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}, v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta x}{\Delta t} &= \frac{\frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}\Delta x' + \frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}c\Delta t'}{\frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}\Delta t' + \frac{1}{\sqrt{c^2-V^2}}\frac{V}{c}\Delta x'} \\
&= \frac{c\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + Vc}{c + \frac{V}{c}\frac{\Delta x'}{\Delta t'}} \\
&= \frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + V}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{\Delta x'}{\Delta t'}} \\
v_x &= \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta t} &= \frac{\Delta y'}{\frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}\Delta t' + \frac{1}{\sqrt{c^2-V^2}}\frac{V}{c}\Delta x'} \\
&= \frac{\sqrt{c^2-V^2}}{c}\frac{\frac{\Delta y'}{\Delta t'}}{1+\frac{V}{c^2}\frac{\Delta x'}{\Delta t'}} \\
v_y' &= \frac{\sqrt{c^2-V^2}}{c}\frac{v_y'}{1+\frac{V}{c^2}v_x'}
\end{aligned}
$$

また同様に $v_z = \frac{\sqrt{c^2-V^2}}{c}\frac{v_x'}{1+\frac{V}{c^2}v_x'}$

V が c に比べてとても小さい時、

$$
\begin{aligned}
v_x &\simeq v_x' + V \\
v_y &\simeq v_y' \\
v_z &\simeq v_z'
\end{aligned}
$$

となり、Galilei 変換を再現できる。

ここで、Lorentz 変換のもとでの速度の合成によってどのくらい速くできるかを考えてみる。
$v_x' > 0, V > 0$ のとき、

$$
\begin{aligned}
v_x &= \frac{v_x' + V}{1+\frac{V}{c^2}v_x'} c v_x' + V \\
c - v_x &= \frac{c + \frac{V}{c}v_x' - v_x' - V}{1+\frac{V}{c^2}v_x'} \\
&= \frac{(c-V)\left(1-\frac{v_x'}{c}\right)}{1+\frac{V}{c^2}v_x'}
\end{aligned}
$$

よって $0 < v_x' < c, 0 < V < c$ のとき、$0 < v_x < c$ となる。よって v_x は光の速度を超えることはない。つまり光の速度より遅い速度だけで特殊相対性が実現できるのではないかと考えられる。

4.4 Minkowski 時空

S 系で速度 c の運動は、S' 系でも速度 c であるはずである。

すなわち、

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2=c^2$$

ならば、

$$\left(\frac{\Delta x'}{\Delta t'}\right)^2+\left(\frac{\Delta y'}{\Delta t'}\right)^2+\left(\frac{\Delta z'}{\Delta t'}\right)^2=c^2$$

のはずである。
実際に確認すると、

$$\begin{aligned}
&(\Delta x')^2+(\Delta y')^2+(\Delta z')^2-(c\Delta t')^2\\
=&\left(\frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}\Delta x-\frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}c\Delta t\right)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2\\
&-\left(\frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}c\Delta t-\frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}\Delta x\right)^2\\
=&(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2-(c\Delta t)^2
\end{aligned}$$

これは両辺がゼロでない時も成立する。
2つのイベント(事象)を考える。(x_0,y_0,z_0) と $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$ に対して、

$$(\Delta S)^2\equiv(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2-(c\Delta t)^2$$

という量は Lorentz 不変量である。すなわち、

$$(\Delta S)^2\equiv(\Delta S')^2$$

である。[1][2]
(注意: $(\Delta S)^2$ は正にもゼロにも負にもなりうる。)
このようにイベント間の距離を導入して空間と時間を一体として考えたものを **4 次元 Minkowski 時空**という。イベントは時空内の点であり、質点の運動を表す時空内の曲線を**世界線 (world-line)** と呼ぶ。

Minkowski 空間において、原点を通る光の世界線の総体を**光円錐 (light-cone)** と呼ぶ。[3] 速度が c を超えない運動の原点を通る世界線は光円錐の内部を通る。[4]

[1] 比較して、三次元 Euclid 空間を考える。ある座標系で $(x_0,y_0,z_0),(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$ という 2 点が回転した別の座標系でそれぞれ $\left(x_0',y_0',z_0'\right)$ と $\left(x_0'+\Delta x',y_0'+\Delta y',z_0'+\Delta z'\right)$ であるとき、2 点間の距離は 2 つの座標系で等しい。→Euclid 距離は回転に対して不変量

[2] この $(\Delta S)^2$ は Minkowski 時空における 2 点間の距離のようなもの。Euclid 空間的な距離とは異なることに注意！光円錐より内側で負、光円錐上で 0、光円錐の外側で正になる。

[3] x,y,z 方向の 3 次元を 2 次元で表現し、時間軸（次元を合わせるために t 軸ではなく ct 軸とする）をそれに垂直にとると、4 次元 Minkowski 時空内の光の軌道は原点を通る円錐となる。

[4] 速度が速いほど Minkowski 時空での軌道が x,y,z を表す平面となす角は小さくなる。

時空の点と"原点"との $(\Delta S)^2$ を考える。

(i) $(\Delta S)^2 < 0$ のとき、点は光円錐の内部にある。2 点は時間的 (time-like) に離れているという。[5]

(ii) $(\Delta S)^2 = 0$ のとき、点は光円錐上にある。2 点は光的 (light-like) に離れているという。

(iii) $(\Delta S)^2 > 0$ のとき、点は光円錐の外部にある。2 点は空間的 (space-like) に離れているという。[6]

この分類は慣性系に依らない。($\because$ $(\Delta S)^2$ は Lorenz 不変量）光の速度よりも速く情報が伝達しなければ空間的 (space-like) に離れた 2 点間に因果関係はない。

4.5 Lorentz 収縮

S' 系で x' 軸上に静止している、長さ l'_1 の棒は S 系ではどのように見えるか?
(S 系での棒の長さ l_1)=(S 系における同時刻での棒の両端の x 座標の差)
S' 系での棒の両端の世界線を考える。

$$\text{始点：}\ x' = 0,\ \text{終点：}\ x' = l'_1\ \ (y' = z' = 0)$$

とすると、両辺 Lorentz 変換して S 系では

$$\text{始点：}\ \frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}}x - \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}}ct = 0$$
$$\text{終点：}\ \frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}}x - \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}}ct = l'_1$$

$$(y = z = 0)$$

[7]

同じ t での x 座標の差 Δx つまり S 系での見た目の棒の長さは、

$$\frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}}\Delta x = l'_1$$

$$l_1 = \Delta x = \frac{\sqrt{c^2 - V^2}}{c}l'_1 < l'_1$$

となり、元の長さより短く見える。これを **Lorentz 収縮**と呼ぶ。
ただし、この両端の座標は S' 系では同時刻ではない。物体自体が縮んでいるわけで

[5]例えば生まれた時の自分（これを原点とする）と今現在の自分
[6]光速を超えない限りどうあがいても同一物体がこれらの 2 点を通過することはできない。
[7]上式は二つとも x-t 平面における傾きが 0 でない直線

はなく、縮んで見えているだけ。また、y 軸や z 軸の方向の長さは変わらない。

4.2 で

$$l_1' = L_{11} l_1$$

であった。

$$L_{11} = \frac{c^2}{c^2 - V^2} L_{44} = \frac{c^2}{c^2 - V^2} \frac{\sqrt{c^2 - V^2}}{c} \varphi(V) = \frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}}$$

より、

$$l_1 = \frac{1}{L_{11}} l_1' = \frac{\sqrt{c^2 - V^2}}{c} l_1'$$

では、S 系で x 軸上に静止している長さ l の棒は、S' 系ではどのように見えるだろうか?
S 系での棒の両端の世界線を

$$x = 0, x = l \, (y = z = 0)$$

とすると、S' 系では

$$\frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}} x' + \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}} ct' = 0$$
$$\frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}} x' + \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}} ct' = l$$
$$(y' = z' = 0)$$

同じ t' での x' 座標の差 $\Delta x'$ は

$$\frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}} \Delta x' = l$$

$$\Delta x' = \frac{\sqrt{c^2 - V^2}}{c} l < l$$

となり、同様に縮んで見える。

4.6　固有時間

イベント $Y_0 \to Y_2$ を考える。S' 系において Y_0 に原点を発射した光は Y_1 で座標 $(0, l_2')$ に達し、その後 Y_2 で原点に戻るものとする。
Y_2 の S' 系での時刻を $\tilde{t}_2'$、S 系での時刻を $\tilde{t}_2$ とすると、

$$\tilde{t}_2' = \frac{2l_2'}{c}, \tilde{t}_2 = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - V^2}}$$

$l'_2 = L_{22} l_2$ であったが、

$$L_{22} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}} L_{44} = \varphi(V) = 1$$

より $l_2 = l'_2$ なので

$$\tilde{t}_2 = \frac{2l'_2}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}} \tilde{t}'_2 \ > \ \tilde{t}'_2$$

よって、S' 系の時計は S 系の時計よりも遅れている。

Lorentz 変換による導出　S' 系の原点に静止している時計で時間 τ が経過

$$(x', y', z', t') : (0,0,0,0) \to (0,0,0,\tau)$$

S 系に Lorentz 変換（S' 系 →S 系の変換なので $V \to -V$ とすればよい）

$$\begin{aligned} ct &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}} ct' + \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}} x' \\ &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}} c\tau \end{aligned}$$

よって S 系での経過時間 $= \frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}} \tau > \tau =$S' 系での時間=時計の固有時間となる。
この状態を標語的に、「動いている時計は遅れる」と表現する。[8]時計が静止している系での時間を**固有時間 (proper time)** と呼ぶ。[9]

任意の運動をしている時計の固有時間間隔　S 系: (x_0, y_0, z_0, t_0)
$\to (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z, t_0 + \Delta t)$
固有時間間隔 $\Delta\tau$ は、Lorentz 変換をしても求まるが、$(\Delta S)^2$ の Lorentz 普遍性を用いて、

$$\begin{aligned} \text{S 系：} (\Delta S)^2 &= (\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2 \\ \text{S' 系：} (\Delta S)^2 &= -(c\Delta\tau)^2 \end{aligned}$$

より

$$(c\Delta t)^2 = (c\Delta\tau)^2 - (\Delta x)^2$$

---

[8] 遅れて《見えて》いるだけ

[9] この時計の比較は S' 系の原点に静止した《一つの》時計と S 系の x 軸上に静止した《無数の》時計を比較しているということに注意せねばならない。

よって

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1-\left(\frac{1}{c}\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2}$$

任意の運動であっても無限小時間間隔では慣性系と考えられるので、S 系での速度が $\overrightarrow{v}(t)$ のとき、S 系での時間が t_1 から t_2 の間の固有時間間隔は

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{\left|\overrightarrow{v}(t)\right|^2}{c^2}}\mathrm{d}t$$

となる。

双子のパラドックス　双子の A と B のうち、A が宇宙旅行をして地球にとどまった B と再会したとする。

B の主張

> **A が動いていたのだから、A の時計が遅れ、A のほうが若い。**

A の主張

> **動いていたのは B だ。若いのは B のほうだ。**

特殊相対性理論では、慣性系から見た記述しかできない。地球を慣性系として、B の固有時間を計算すると、B の固有時間間隔 τ_B は、

$$\tau_B = \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t = t_2 - t_1$$

ただし、t_1 は A が出発した時刻、t_2 は A が帰還した時刻とする。
A の固有時間間隔 τ_A は、A の速度を $\overrightarrow{v}(t)$ として、

$$\tau_A = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1-\frac{\left|\overrightarrow{v}(t)\right|^2}{c^2}}\mathrm{d}t < \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t = \tau_B$$

となり、A のほうが若いことになる。

4.7 Doppler 効果

音に関する Doppler 効果を、光の場合への拡張のため、Galilei 変換を用いて導出する。
S 系の座標を (x,t)、S' 系の座標を (x',t') として、

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ t' = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x' + Vt' \\ t = t' \end{cases}$$

とする。
S 系での進行波

$$A\cos\left(kx - \omega t\right)$$

は、S' 系では、

$$A\cos\left[k\left(c' + Vt'\right) + \omega t'\right] = A\cos\left[kx' - \left(\omega - Vk\right)t'\right]$$

となる。これを

$$A\cos\left(k'x' - \omega' t'\right)$$

と書くと、

$$\begin{cases} \omega' = \omega - Vk \\ k' = k \end{cases}$$

となる。
S 系で空気が静止しているとし、x 軸の正の方向に進む音波を考えると、音速 v_s は、

$$v_s = \frac{\omega}{k}\left(\omega > 0, k > 0\right)$$

$$\begin{aligned} \omega' &= \left(1 - \frac{k}{\omega}V\right)\omega = \left(1 - \frac{V}{v_s}\right)\omega \\ &= \frac{v_s - V}{v_s}\omega \end{aligned}$$

音波の振動数を f_0、観測する音の振動数を f とする。

1. 音源が速度 V で運動している場合

$$f_0 = \frac{\omega'}{2\pi}, f = \frac{\omega}{2\pi}$$
$$f = \frac{v_s}{v_s - V} f_0$$

よって、$0 < V < v_s$、すなわち音源が近づいているとき、振動数は高くなり、$V < 0$ のとき、すなわち音源が遠ざかっている時、振動数は低くなる。

2. 観測者が速度 V で運動している場合

$$f_0 = \frac{\omega}{2\pi}, f = \frac{\omega'}{2\pi}$$
$$f = \frac{v_s - V}{v_s} f_0$$

よって、$0 < V < v_s$、すなわち観測者が遠ざかっているとき、振動数は低くなり、$V < 0$ のとき、すなわち観測者が近づいている時、振動数は高くなる。

光に関する Doppler 効果　前回の Galilei 変換を Lorentz 変換に置き換える。

$$\begin{cases} ct = \frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}ct' + \frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}x' \\ x = \frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}x' + \frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}ct' \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &A\cos(kx - \omega t) \\ =&A\cos\left(k\frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}x' + k\frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}ct' - \frac{\omega}{c}\frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}ct' - \frac{\omega}{c}\frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}x'\right) \\ =&A\cos(k'x' - \omega't') \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{\omega'}{c} = \frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}\frac{\omega}{c} - \frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}k \\ k' = \frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}k - \frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}\frac{\omega}{c} \end{cases}$$

$\left(\frac{\omega}{c}, k\right)$ は (ct, x) と同じように変換される。[10]
S 系で x 軸の正の方向に進む光を考えると、

$$c = \frac{\omega}{k}\,(\omega > 0, k > 0)$$

[10] これは最後の方（Lorentz 変換を電磁気力に適用するあたり）でもう一度でてくる。

$\frac{\omega'}{k}$ もまた c であることが確認できる。

$$\begin{aligned}\omega' &= \frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}}\omega - \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}}ck \\ &= \frac{c - V}{\sqrt{c^2 - V^2}}\omega \\ &= \sqrt{\frac{c - V}{c + V}}\omega\end{aligned}$$

光源から見た光波の振動数を f_0、観測者から見た光波の振動数を f とする。

1. 光源が速度 V で運動する場合

$$f_0 = \frac{\omega'}{2\pi}, f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$f = \sqrt{\frac{c + V}{c - V}} f_0$$

$0 < V < c$ のとき近づき、$V < 0$ のとき遠ざかっている。

2. 観測者が速度 V で運動する場合

$$f_0 = \frac{\omega}{2\pi}, f = \frac{\omega'}{2\pi}$$

$$f = \sqrt{\frac{c - V}{c + V}} f_0$$

$0 < V < c$ のとき遠ざかり、$V < 0$ のとき近づいている。

1. でも 2. でも $v > 0$ として相対速度 v で近づく場合は、

$$f = \sqrt{\frac{c + v}{c - v}} f_0 > f_0$$

より、振動数が上がり、波長が短くなる。これを**青方偏移 (blue shift)** という。
遠ざかる場合は、

$$f = \sqrt{\frac{c - v}{c + v}} f_0 < f_0$$

より、振動数が下がり、波長が長くなる。これを**赤方偏移 (red shift)** という。

赤方偏移パラメーター z を波長が λ_0 から λ に伸びた時、

$$\begin{aligned} z &\equiv \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 = \frac{f_0}{f} - 1 \\ &= \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1 \end{aligned}$$

とする。
光源と観測者のどちらが動いているかは区別できない (特殊相対性)。

5 Lorentz 共変性

5.1 物理法則の不変性

物理法則が Lorentz 変換のもとで不変であるということはどのように表現されるのか?
まずは回転不変性について考えてみよう。m, λ, a を定数として、2 次元空間中の質点の運動

$$\begin{cases} m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\lambda y}{x^2+y^2+a^2} \\ m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\lambda x}{x^2+y^2+a^2} \end{cases}$$ [11]

の運動方程式は回転不変かどうか調べる。$(x, y) \to (x', y')$ へとマッピングする。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r} &= x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{r} &= x'\overrightarrow{e_{x'}} + y'\overrightarrow{e_{y'}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e_{x'}} &= \cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{e_{y'}} &= -\sin\theta\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\overrightarrow{e_y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r} &= x'\left(\cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y}\right) + y'\left(-\sin\theta\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\overrightarrow{e_y}\right) \\ &= \left(x'\cos\theta - y'\sin\theta\right)\overrightarrow{e_x} + \left(x'\sin\theta + y'\cos\theta\right)\overrightarrow{e_y} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

[11] 特に物理的意味があるわけではない。後に Lorenz 不変性を示す時のイメージをつかむために、一度回転不変性についての議論を行ってみる。

$$
\begin{cases}
x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\
y' = -x\sin\theta - y\cos\theta
\end{cases}
$$

(x', y') での運動方程式は

$$
\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t^2} &= m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\cos\theta + m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\sin\theta \\
&= -\frac{\lambda y}{x^2+y^2+a^2}\cos\theta + \frac{\lambda x}{x^2+y^2+a^2}\sin\theta \\
&= -\frac{\lambda\left(x'\sin\theta + y'\cos\theta\right)\cos\theta}{x'^2+y'^2+a^2} \\
&= -\frac{\lambda\left(x'\sin\theta + y'\cos\theta\right)\cos\theta}{x'^2+y'^2+a^2} + \frac{\lambda\left(x'\cos\theta - y'\sin\theta\right)\sin\theta}{x'^2+y'^2+a^2} \\
&= -\frac{\lambda y'}{x'^2+y'^2+a^2}
\end{aligned}
$$

ただし、

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 &= \left(x'\cos\theta - y'\sin\theta\right)^2 + \left(x'\sin\theta + y'\cos\theta\right)^2 \\
&= x'^2 + y'^2
\end{aligned}
$$

を用いた。
同様に

$$
m\frac{\mathrm{d}^2 y'}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\lambda x'}{x'^2+y'^2+a^2}
$$

よって、この運動方程式は回転不変である。
ポイント: $x^2+y^2 = x'^2+y'^2$ 　回転不変

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}
$$
$$
\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}
$$

上記のように (x, y) が $(-y, x)$ であっても行列の部分はそのままなので、

$$
m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{x^2+y^2+a^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}
$$

これを回転させる、つまり両辺に回転行列を左から作用させても

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{\lambda}{x^2+y^2+a^2}\begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$$

となり、もとの形と同じである。

運動方程式の両辺が回転のもとで同じように変換されることを「運動方程式は回転共変である」という。

Lorentz 変換の場合も、運動方程式が Lorentz 変換であることによって物理法則の Lorentz 不変性を示したい。

回転や Lorentz 変換のもとでどのような変換が可能であるかは、回転や Lorentz 変換が群をなすということによって大きく制限される。

(参考) 群の定義

1. 群 G の任意の $g_1, g_2 \in G$ に対して $g_1 + g_2$ が定義され、$g_1 + g_2 \in G$
2. $(g_1 + g_2) + g_3 = g_1 + (g_2 + g_3)$
3. 単位元 e がただひとつ存在し、すべての $g \in G$ に対して $g + e = e + g = g$ が成り立つ。
4. 任意の $g \in G$ に対して逆元 g^{-1} が存在し、$g + g^{-1} = g^{-1} + g = e$ が成り立つ。

5.2　共変性と反変性

2 次元 Euclid 空間の一般の基底 $\left\{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}\right\}$ を考える。

$$\overrightarrow{x} = x^1\overrightarrow{f_1} + x^2\overrightarrow{f_2} = \sum_i x^i\overrightarrow{f_i}$$

※ x^i は上付き添字である。

別の基底 $\left\{\overrightarrow{f_1'}, \overrightarrow{f_2'}\right\}$ について

$$\begin{cases} \overrightarrow{f_1'} = a\overrightarrow{f_1} + b\overrightarrow{f_2} \\ \overrightarrow{f_2'} = c\overrightarrow{f_1} + d\overrightarrow{f_2} \end{cases}$$

とすると

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x} &= \sum_i x'^i \overrightarrow{f'_i} \\ &= x'^1\left(a\overrightarrow{f_1} + b\overrightarrow{f_2}\right) + x'^2\left(c\overrightarrow{f_1} + d\overrightarrow{f_2}\right) \\ &= \left(ax'^1 + cx'^2\right)\overrightarrow{f_1} + \left(bx'^1 + dx'^2\right)\overrightarrow{f_2}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^1 = ax'^1 + cx'^2 \\ x^2 = bx'^1 + dx'^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'^1 = \frac{d}{ad-bc}x^1 - \frac{c}{ad-bc}x^2 \\ x'^2 = -\frac{b}{ad-bc}x^1 + \frac{a}{ad-bc}x^2 \end{cases}$$ [12]

行列 R を考える。

$$R = \begin{pmatrix} R^1{}_1 & R^1{}_2 \\ R^2{}_1 & R^2{}_2 \end{pmatrix}$$

$$R^1{}_1 = \frac{d}{ad-bc}, R^1{}_2 = -\frac{c}{ad-bc}$$

$$R^2{}_1 = -\frac{b}{ad-bc}, R^2{}_2 = \frac{a}{ad-bc}$$

$$x'^i = \sum_j R^i{}_j x^j = R^i{}_j x^j$$

※同じ項内で上付きと下付きの添字が同じであれば和を取る（$\sum$ を付ける）と約束をし $\sum$ を省略した。これを Einstein の縮約規則と呼ぶ。
R の逆行列 R^{-1} は、

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \begin{pmatrix} \left(R^{-1}\right)^1{}_1 & \left(R^{-1}\right)^1{}_2 \\ \left(R^{-1}\right)^2{}_1 & \left(R^{-1}\right)^2{}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[12] もしも $ad - bc = 0$ ならば $\left\{\overrightarrow{f'_1}, \overrightarrow{f'_2}\right\}$ が基底になっていない

また、逆行列の転置行列 R^{-T} は、

$$
\begin{aligned}
R^{-T} &= \begin{pmatrix} \left(R^{-T}\right)_1{}^1 & \left(R^{-T}\right)_1{}^2 \\ \left(R^{-T}\right)_2{}^1 & \left(R^{-T}\right)_2{}^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ただし、$\left(R^{-T}\right)_i{}^j = \left(R^{-1}\right)^j{}_i$ である。
ここで、$\left\{\overrightarrow{f'_1}, \overrightarrow{f'_2}\right\}$ の定義に戻ると

$$
\overrightarrow{f'_i} = \left(R^{-T}\right)_i{}^j \overrightarrow{f_j}
$$

共変量は、下付き添字を持ち、R^{-T} で変換し、反変量は、上付き添字を持ち、R で変換する。[13]

5.3 計量

デカルト座標で $\overrightarrow{x} = \left(x^1, x^2\right)$ のとき、

$$
|\overrightarrow{x}| = \sqrt{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2}
$$

$\overrightarrow{y} = \left(y^1, y^2\right)$ のとき、$\overrightarrow{x}$ と $\overrightarrow{y}$ のなす各を θ とすると、

$$
\cos\theta = \frac{x^1 y^1 + x^2 y^2}{\sqrt{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2}\sqrt{\left(y^1\right)^2 + \left(y^2\right)^2}}
$$

$\overrightarrow{x} = x^i \overrightarrow{f_i}, \overrightarrow{y} = y^i \overrightarrow{f_i}$ のときは、

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{x}| &= \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}} \\
\cos\theta &= \frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{|\overrightarrow{x}||\overrightarrow{y}|} \\
\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} &= x^i x^j \overrightarrow{f_i} \cdot \overrightarrow{f_j} \\
\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} &= x^i y^j \overrightarrow{f_i} \cdot \overrightarrow{f_j}
\end{aligned}
$$

[13] 「これまでの議論で明らかになってきた 2 種類の変換性をより統一的に取り扱うために、下付きの添字に対する変換を、右からの R^{-1} による変換という見方から、(行と列を入れ替えて) 左からの $(R^T)^{-1}$ による変換と見る見方に移ることにする。」以上、相対性理論入門講義(風間洋一)より引用。

より、$g_{ij} \equiv \overrightarrow{f_i} \cdot \overrightarrow{f_j}$ から計算できる。ここで g_{ij} を**計量** (**metric**) と呼ぶ。

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} = x^i g_{ij} x^j$$
$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = x^i g_{ij} y^j$$

例えばデカルト座標では

$$g_{11} = 1, g_{12} = 0, g_{21} = 0, g_{22} = 1$$

であり、しばしば、

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (= \delta_{ij})$$

と書かれる。
実際に計算してみると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} &= x^1 g_{11} x^1 + x_1 g_{12} x^2 + x^2 g_{21} x^1 + x^2 g_{22} x^2 \\ &= \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 \end{aligned}$$

計量の変換性　$\overrightarrow{f'_i} = \left(R^{-T}\right)_i^{\ j} \overrightarrow{f_j}$ より、[14]

$$\begin{aligned} g'_{ij} &= \overrightarrow{f'_i} \cdot \overrightarrow{f'_j} \\ &= \left(R^{-T}\right)_i^{\ m} \left(R^{-T}\right)_j^{\ n} \overrightarrow{f'_m} \cdot \overrightarrow{f'_n} \\ &= \left(R^{-T}\right)_i^{\ m} \left(R^{-T}\right)_j^{\ n} g_{mn} \end{aligned}$$

変換する上下の添字を持つ量の集まりを一般に**テンソル** (**tensor**) と呼び、添字の数をテンソルの**階数** (**rank**) と呼ぶ。階数が 1 のテンソルは**ベクトル**と呼ばれる。
x^i を反変ベクトル、g_{ij} を 2 階の共変テンソルとして。

$$\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x} = y^i g_{ij} x^j$$

となる。
※今後、$g_{ij} x^j$ の組み合わせを x_i と書く。（∵これは共変ベクトルなので下付き添字）

[14] j はダミー添字なので別の文字でもよい

変換性

$$x'_i = \left(R^{-T}\right)_i^{\ m} \left(R^{-T}\right)_j^{\ n} g_{mn} R^j_{\ k} x^k$$

$\left(R^{-T}\right)_j^{\ n} R^j_{\ k} = \left(R^{-1}\right)^n_{\ j}$ より

$$\left(R^{-T}\right)_j^{\ n} R^j_{\ k} = \left(R^{-1}\right)^n_{\ j} R^j_{\ k}$$

一般に $(AB)^i_{\ j} = A^i_{\ k} B^k_{\ j}$ なので、

$$\begin{aligned}\left(R^{-1}\right)^n_{\ j} R^j_{\ k} &= \left(R^{-1}R\right)^n_{\ k} = E^n_{\ k} \\ &= \begin{cases} 1 & (n = k) \\ 0 & (n \neq k) \end{cases}\end{aligned}$$

ここで

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (Kronecker's\ delta)$$

を用いると

$$\left(R^{-1}\right)^n_{\ j} R^j_{\ k} = \delta^n_k$$

となるので

$$\begin{aligned} x'_i &= \left(R^{-T}\right)_i^{\ m} g_{mn} \delta^n_k x^k \\ &= \left(R^{-T}\right)_i^{\ m} g_{mn} x^n \\ &= \left(R^{-T}\right)_i^{\ m} x_m \end{aligned}$$

（$x_i = g_{ij} x^j$：共変ベクトル）

逆に x_j を用いて x^i を

$$x^i = g^{ij} x_j$$

のように表すことを考える。[15]

$$\begin{aligned} x_i &= g_{ij} x^j \\ &= g_{ij} g^{jk} x_k \\ &= \delta^k_j x_k \end{aligned}$$

[15] g^{ij} は計量ではない。

$$
\begin{aligned}
x^i &= g^{ij} x_j \\
&= g^{ij} g_{jk} x^k \\
&= \delta^i_k x^k
\end{aligned}
$$

より

$$
\begin{aligned}
g_{ij} g^{jk} &= \delta^k_i \\
g^{ij} g_{jk} &= \delta^i_k
\end{aligned}
$$

よって g^{ij} は、g_{kl} を kl 成分とする行列の逆行列の ij 成分である。[16]
g^{ij}: 2 階の反変ベクトル
デカルト座標では

$$
g^{11} = 1, g^{12} = 0, g^{21} = 0, g^{22} = 1
$$

$$
g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$
[17]

x_j が共変ベクトル、g^{ij} が 2 階の反変テンソル[18]として変換するとき、$g^{ij} x_j$ が反変ベクトルとして変換することを確認せよ。

$$
\begin{aligned}
g'^{ij} x'_j &= R^i{}_m R^j{}_n g^{mn} \left(R^{-T}\right)_j{}^k x_k \\
&= R^i{}_m R^j{}_n g^{mn} \left(R^{-1}\right)^k{}_j x_k \\
&= R^i{}_m g^{mn} \delta^k_n x_k \\
&= R^i{}_m g^{mn} x_n
\end{aligned}
$$

[19]

5.4 回転群

デカルト座標では計量は

$$
g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

$\overrightarrow{x} = \left(x^1, x^2\right), \overrightarrow{y} = \left(y^1, y^2\right)$ のとき、

$$
\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = x^1 y^1 + x^2 y^2
$$

[16]行列の成分計算をすればわかる
[17]単位行列の逆行列は単位行列だからあたりまえ
[18]$g'^{ij} = R^i{}_m R^j{}_n g^{mn}$
[19]ややこしいことをやっているように見えるがようは基底の変換

回転した座標系で、

$$\overrightarrow{x}=\left(x^{-1},x^{-2}\right),\overrightarrow{y}=\left(y^{-1},y^{-2}\right)$$

のとき、

$$\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}=x^{-1}y^{-1}+x^{-2}y^{-2}$$

座標系を回転させても内積 $\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}$ は不変であるので、計量 $g_{ij}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ は回転不変。

逆に計量 $g_{ij}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ を不変に保つ座標変換を考える。

$$\left(R^{-T}\right)_j^{\ m}\left(R^{-T}\right)_j^{\ n}g_{mn}=g_{ij}$$

[20]

$$\left(R^{-T}\right)_i^{\ m}g_{mn}\left(R^{-1}\right)^n_{\ j}=g_{ij}\quad(\because A^TB^T=(BA)^T)$$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

これは逆行列が転置行列であることを示す。

$$R^{-T}=R\quad(\iff R^{-1}=R^T)$$

$$\begin{cases}a^2+b^2=1\Rightarrow a=\cos\theta,b=\sin\theta\\c^2+d^2=1\Rightarrow c=\cos\varphi,d=\sin\varphi\\ac+bd=0\end{cases}$$

より、

$$\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\sin\varphi=\cos\left(\theta-\varphi\right)=0$$

$$\varphi=\theta+\frac{(2n+1)\,\pi}{2}$$

ただし、n は整数である。

n が偶数のとき、$c=-\sin\theta,d=\cos\theta$、$n$ が奇数のとき、$c=\sin\theta,d=-\cos\theta$ である。

$$R=R^{-T}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}$$

[20] 計量が不変でない一般の変換だと左辺は g'_{ij}

$\theta = 0$ のとき、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

※恒等変換と x 軸反転

一般に、

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$[21]

回転は計量 $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を保ち、恒等変換に連続的につながっている変換であり、回転がなす群は**回転群**と呼ばれる。

回転では $R^{-T} = R$ なので、共変量と反変量が同じように変換する。

$R^{-1} = R^T$ を満たす行列は**直交行列**と呼ばれ、$n \times n$ 直交行列のなす群は $O(n)$、そのうち行列式が 1 であるもののなす群は $SO(n)$ と呼ばれる。

2 次元回転は $SO(2)$、x 軸反転を含めると $O(2)$ となる。

5.5 Lorentz 群

4 次元 Minkowski 時空の座標を

$$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$$

と書く。以下、x^2 と x^3 は省略

Lorentz 変換では、

$$s^2 = -\left(x^0\right)^2 + \left(x^1\right)^2$$

が不変であった。

$$s^2 = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu$$

ここで $\mu, \nu = 0, 1$、$\eta_{00} = -1, \eta_{01} = 0, \eta_{10} = 0, \eta_{11} = 1$ で、

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と書き、$\eta_{\mu\nu}$ を **Lorentz 計量**と呼ぶ。

[21] これは反転と回転の組み合わせ

座標変換 [22]

$$x'^{\mu} = \wedge^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$$

で、$\eta_{\mu\nu}$ を不変に保つものを考える。

$$\begin{aligned} \left(\wedge^{-T}\right)_{\mu}{}^{\rho} \left(\wedge^{-T}\right)_{\nu}{}^{\sigma} \eta_{\rho\sigma} &= \eta_{\mu\nu} \\ \left(\wedge^{-T}\right)_{\mu}{}^{\rho} \eta_{\rho\sigma} \left(\wedge^{-1}\right)^{\sigma}{}_{\nu} &= \eta_{\mu\nu} \quad (\because A^T B^T = (BA)^T) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & -c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^{23}\begin{cases} -a^2 + b^2 = -1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{1+b^2} \\ -c^2 + d^2 = 1 \Rightarrow d = \pm\sqrt{1+c^2} & \Rightarrow a^2c^2 = b^2d^2 \\ -ac + bd = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \left(1+b^2\right) c^2 &= b^2 \left(1+c^2\right) \\ c &= \pm b \end{aligned}$$

$-ac + bd = 0$ より d の符号を決める。

$$\begin{aligned} a = \sqrt{1+b^2}, c = b &\Rightarrow d = \sqrt{1+b^2} \\ a = \sqrt{1+b^2}, c = -b &\Rightarrow d = -\sqrt{1+b^2} \\ a = -\sqrt{1+b^2}, c = b &\Rightarrow d = -\sqrt{1+b^2} \\ a = -\sqrt{1+b^2}, c = -b &\Rightarrow d = \sqrt{1+b^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \wedge^{-T} = &\begin{pmatrix} \sqrt{1+b^2} & b \\ b & \sqrt{1+b^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{1+b^2} & b \\ -b & -\sqrt{1+b^2} \end{pmatrix}, \\ &\begin{pmatrix} -\sqrt{1+b^2} & b \\ b & -\sqrt{1+b^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{1+b^2} & b \\ -b & \sqrt{1+b^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[22] 前回までの R が $\wedge$

[23] 双曲線関数使っても解ける

$b=0$ とすると

$$\wedge^{-T}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

となるので、このうちから恒等変換に連続的につながっている

$$\wedge^{-T}=\begin{pmatrix}\sqrt{1+b^2}&b\\b&\sqrt{1+b^2}\end{pmatrix}$$

を考えると、

$$\wedge=\begin{pmatrix}\sqrt{1+b^2}&-b\\-b&\sqrt{1+b^2}\end{pmatrix}^{24}$$

$$\begin{pmatrix}x'^0\\x'^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{1+b^2}&-b\\-b&\sqrt{1+b^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^0\\x^1\end{pmatrix}$$

上の変換が Lorentz 変換になるような b を求める。
S' 系の原点は $x'^1=0$ であり、また S 系では $x=Vt$ つまり $x^1=\frac{V}{c}x^0$

$$\begin{aligned}x'^1&=-bx^0+\sqrt{1+b^2}x^1\\&=\left(-b+\frac{V}{c}\sqrt{1+b^2}\right)x^0\end{aligned}$$

$$\frac{V}{c}=\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$$

$$\Rightarrow b=\frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}},\sqrt{1+b^2}=\frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}$$

$$\begin{cases}x'^0=\frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}x^0-\frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}x^1\\x'^1=\frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}x^1-\frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}x^0\end{cases}$$

Lorentz 変換は計量 $\eta_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ を保ち恒等変換に連続的につながっている変換であり、Lorentz 変換がなす群は (特に狭い意味での)**Lorentz 群**[25]と呼ばれる。
(proper:det$\wedge=1$, orthochronous:${\wedge^0}_0\geqq 1$)

---

[24]Lorentz 変換では回転とは違い、$\wedge$ と $\wedge^{-T}$ は異なることに注意
[25]広義では 4 つあった $\wedge$ 全てを Lorentz 群に含める

5.6 Lorentz 変換におけるテンソル

テンソルの演算 (例で説明)

1. 加法: $A^{\mu\nu}{}_{\lambda} + B^{\mu\nu}{}_{\lambda} = C^{\mu\nu}{}_{\lambda}$
2. 乗法: $A^{\mu\nu} B_{\lambda} = C^{\mu\nu}{}_{\lambda}$
3. 添字の縮約: $A^{\mu} B_{\mu} = C$ (スカラー) $, A^{\mu\nu}{}_{\nu} = B^{\mu}$
4. 添字の上げ下げ: $\eta_{\mu\nu}$ や $\eta^{\mu\nu}$ との乗法+縮約

$$\eta_{\mu\nu} A^{\nu\rho} = A_{\mu}{}^{\rho}$$

のように同じ A で添字の位置を変えて表す。

同様に $\eta^{\mu\rho} A_{\nu\rho} = A_{\nu}{}^{\mu}$

反変量は $A'^{\mu} = \wedge^{\mu}{}_{\nu} A^{\nu}$、共変量は $A'_{\mu} = \left(\wedge^{-T}\right)_{\mu}{}^{\nu} A_{\nu}$、というように変換するが、Lorentz 変換のときの $\left(\wedge^{-T}\right)_{\mu}{}^{\nu}$ は、

$$\left(\wedge^{-T}\right)_{\mu}{}^{\alpha} \left(\wedge^{-T}\right)_{\rho}{}^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\rho}$$

を満たす。

$$\left(\wedge^{-T}\right)_{\mu}{}^{\alpha} \eta_{\alpha\beta} \left(\wedge^{-1}\right)^{\beta}{}_{\rho} = \eta_{\mu\rho}$$
$$\left(\wedge^{-T}\right)_{\mu}{}^{\alpha} \eta_{\alpha\beta} \left(\wedge^{-1}\right)^{\beta}{}_{\rho} \wedge^{\rho}{}_{\sigma} = \eta_{\mu\rho} \wedge^{\rho}{}_{\sigma}$$
$$\left(\wedge^{-T}\right)_{\mu}{}^{\alpha} \eta_{\alpha\sigma} = \eta_{\mu\rho} \wedge^{\rho}{}_{\sigma}$$
$$\left(\wedge^{-T}\right)_{\mu}{}^{\alpha} \eta_{\alpha\sigma} \eta^{\sigma\nu} = \eta_{\mu\rho} \wedge^{\rho}{}_{\sigma} \eta^{\sigma\nu}$$
$$\left(\wedge^{-T}\right)_{\mu}{}^{\nu} = \eta_{\mu\rho} \wedge^{\rho}{}_{\sigma} \eta^{\sigma\nu}$$ [26]

$\eta_{\nu\rho} \wedge^{\rho}{}_{\sigma} \eta^{\sigma\nu} = \wedge_{\rho}{}^{\nu}$ と書くと、

$$\left(\wedge^{-T}\right)_{\mu}{}^{\nu} = \wedge_{\mu}{}^{\nu}$$
$$A'_{\mu} = \wedge_{\mu}{}^{\nu} A_{\nu}$$

$\wedge_{\mu}{}^{\nu} = \left(\wedge^{-1}\right)^{\nu}{}_{\mu}$ より、

$$\begin{aligned} A'_{\mu} B'^{\mu} &= \wedge_{\mu}{}^{\nu} A_{\nu} \wedge^{\nu}{}_{\rho} B^{\rho} \\ &= A_{\nu} \left(\wedge^{-1}\right)^{\nu}{}_{\mu} \wedge^{\mu}{}_{\rho} B^{\rho} \\ &= A_{\nu} B^{\nu} \text{ これはスカラー} \end{aligned}$$

[26]($\because \eta_{\alpha\sigma}\eta^{\sigma\nu} = \delta^{\nu}_{\alpha}$)

重要なスカラー量・ベクトル量　※ベクトル量は 4 元ベクトルとも呼ばれる。

- x^μ: 反変ベクトル
  - $$x^\mu = (ct, x, y, z)$$ $$x'^\mu = \wedge^\mu{}_\nu x^\nu$$
- $x_\nu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$: 共変ベクトル
  - $$x_0 = \eta_{00} x^0 = -x^0 = -ct$$ $$x_1 = \eta_{11} x^1 = x^1 = x$$ $$x_\mu = (-ct, x, y, z)$$

確認問題

$$\begin{cases} x'^0 = \frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}} x^0 - \frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}} x^1 \\ x'^1 = -\frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}} x^0 + \frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}} x^1 \end{cases}$$

$$\wedge^0{}_0 = \frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}$$
$$\wedge^0{}_1 = -\frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}$$
$$\wedge^1{}_0 = -\frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}$$
$$\wedge^1{}_1 = \frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}$$

$\wedge_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\rho} \wedge^\rho{}_\sigma \eta^{\sigma\nu}$ より $\wedge_0{}^0, \wedge_0{}^1, \wedge_1{}^0, \wedge_1{}^1$ を求め、

$$\begin{cases} -ct' = \wedge_0{}^0 (-ct) + \wedge_0{}^1 x \\ x' = \wedge_1{}^0 (-ct) + \wedge_1{}^1 x \end{cases}$$

が満たされていることを確認せよ。

$\left(\eta^{00} = -1, \eta^{01} = 0, \eta^{10} = 0, \eta^{11} = 1, \eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$$\Lambda_0{}^0 = \eta_{00}\,\Lambda^0{}_0\,\eta^{00} = \Lambda^0{}_0 = \frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}}$$
$$\Lambda_0{}^1 = \eta_{00}\,\Lambda^0{}_1\,\eta^{11} = -\Lambda^0{}_1 = \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}}$$
$$\Lambda_1{}^0 = \eta_{11}\,\Lambda^1{}_0\,\eta^{00} = -\Lambda^1{}_0 = \frac{V}{\sqrt{c^2 - V^2}}$$
$$\Lambda_1{}^1 = \eta_{11}\,\Lambda^1{}_1\,\eta^{11} = \Lambda^1{}_1 = \frac{c}{\sqrt{c^2 - V^2}}$$

$$\begin{cases} -ct' = \frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}(-ct) + \frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}x \\ x' = \frac{V}{\sqrt{c^2-V^2}}(-ct) + \frac{c}{\sqrt{c^2-V^2}}x \end{cases}$$

また、重要なスカラー量としては s^2 がある。

$$s^2 = x^\mu \eta_{\mu\nu} x^\nu : \text{スカラー}$$

$$s^2 = x^\mu x_\mu$$

2 つのイベントの座標の差 Δx^μ は反変ベクトルである。

$$(\Delta S)^2 = \Delta x^\mu \eta_{\mu\nu} \Delta x^\nu : \text{スカラー}$$

Δx^μ が time-like のとき、

$$\Delta\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-\Delta x^\mu \eta_{\mu\nu} \Delta x^\nu} : \text{スカラー}$$

ここで $\Delta\tau$ は固有時間間隔である。
速度ベクトル

$$\overrightarrow{v} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$$

は Lorentz 変換のもとでのテンソル量ではない。[27]
なので、速度に近いテンソル量として 4 元速度を導入する。

$$4\text{元速度}: u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta x^\mu}{\Delta\tau} : \text{反変ベクトル}$$

4 元速度と通常の速度の関係を調べる。

[27] 3 成分しかないのでベクトル量（4 元ベクトル）でもない。

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}{c^2 (\Delta t)^2}}$$

より、

$$\begin{aligned} u^\mu &= \gamma \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \\ &= (\gamma c, \gamma \vec{v}) \end{aligned}$$ [28]

ただし、

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\left|\vec{v}\right|^2}{c^2}}}$$

である。

$$\frac{\Delta x^\mu}{\Delta\tau}\eta_{\mu\nu}\frac{\Delta x^\nu}{\Delta\tau} = \frac{(\Delta S)^2}{(\Delta\tau)^2} = -c^2$$

より、

$$\begin{aligned} u^\mu \eta_{\mu\nu} u^\nu &= -c^2 \\ &= const. \end{aligned}$$

よって u^μ の 4 つの成分は独立ではない。

6　相対論的力学

6.1　エネルギーと運動量

Newton 力学での弾性衝突 (1 次元運動)　質量 $2m$ の物体 1 に、質量 m の物体 2 が速度 $3V$ で弾性衝突するときを考える。

重心の速度は

$$\frac{3mV}{m+2m} = V$$

重心系 (S' 系) で考えると、1 は重心に対して速度 $2V$ で、2 は速度 $-V$ で衝突し、衝突後は 1 は速度 $-2V$ で、2 は速度 V で進行することになる。

これを元の座標系 (S 系) に Galilei 変換すると、衝突後の 1 の速度は $-V$、2 の速度は $2V$ と求められる。

これを Lorentz 変換に置き換えると、v を S 系での速度,v' を S' 系での速度として

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'}$$

より、衝突前の 1 の速度は

$$\frac{3V}{1 + \frac{2V^2}{c^2}}$$

S' 系から見た 1 の速度は

$$-\frac{V}{1 - \frac{2V^2}{c^2}}$$

S' 系から見た 2 の速度は

$$\frac{2V}{1 + \frac{V^2}{c^2}}$$

となる。ただし、S 系での速度を v、S' 系での速度を v' とした。
こうして見ると、運動量保存則

$$\sum_i m_i v_i = \sum_i m_i \tilde{v}_i$$

は成り立っていない。ただし m_i は質量、v_i は衝突前の速度、$\tilde{v}_i$ は衝突後の速度である。以後衝突後にはチルダを付けてあらわす。

Galilei 変換

$$v_i = v_i' + V, \quad \tilde{v}_i = \tilde{v}_i' + V$$

より

$$\sum_i m_i \left(v_i' + V\right) = \sum_i m_i \left(\tilde{v}_i' + V\right)$$

$$\Rightarrow \sum_i m_i v_i' = \sum_i m_i \tilde{v}_i'$$

のように不変である。しかし、両辺が Lorentz 変換のテンソル量ではないので Lorentz 変換のもとでは同じように変化しない。
なので、運動量保存則をあきらめる or 運動量の定義を変える。

運動量保存をあきらめたのが解析力学。

解析力学においては、

時間の一様性

→エネルギー保存

空間の一様性

→運動量保存

と捉えられる。

相対論では、運動量をテンソル量にするために、４元速度を用いて運動量の定義を

$$m\overrightarrow{v} \to mu^{\mu}$$

のように変換してみよう。

x 成分について、

$$mv \to p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

とする。

それぞれの物体の速度・運動量を、衝突前の 1 について v_1', p_1'、2 について $v_2' = -V, p_2'$、衝突後の 1 について $\tilde{v}_1', \tilde{p}_1'$、2 について $\tilde{v}_2' = V, \tilde{p}_2'$ とすると、

$$v_2' = -V$$

$$p_2' = \frac{2mv_2'}{\sqrt{1-\frac{v_2'^2}{c^2}}} = -\frac{2mV}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

$$p_1' = \frac{mv_1'}{\sqrt{1-\frac{v_1'^2}{c^2}}} = -p_2' = -\frac{2mV}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

を満たす v_1' は、

$$v_1' = \frac{2V}{\sqrt{1-\frac{3V^2}{c^2}}} \simeq 2V$$

よって

$$
\begin{aligned}
\tilde{v}_1' &= -v_1' = -\frac{2V}{\sqrt{1+\frac{3V^2}{c^2}}} \\
\tilde{p}_1' &= -\frac{2mV}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \\
\tilde{v}_2' &= V \\
\tilde{p}_2' &= \frac{2mV}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}
\end{aligned}
$$

また S 系においてそれぞれの物体の速度・運動量を、衝突前の 1 について v_1, p_1、2 について $v_2 = 0, p_2 = 0$、衝突後の 1 について $\tilde{v}_1, \tilde{p}_1$、2 について $\tilde{v}_2, \tilde{p}_2$ とすると、速度の Lorentz 変換より、

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{2+\sqrt{1+\frac{3V^2}{c^2}}}{\sqrt{1+\frac{3V^2}{c^2}}+\frac{2V^2}{c^2}} V \simeq 3V \\
\tilde{v}_1 &= \frac{-2+\sqrt{1+\frac{3V^2}{c^2}}}{\sqrt{1+\frac{3V^2}{c^2}}-\frac{2V^2}{c^2}} V \simeq -V \\
\tilde{v}_2 &= \frac{2V}{1+\frac{V^2}{c^2}} \simeq 2V
\end{aligned}
$$

ここから $p_1, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ を計算すると、

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{mv_1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{mV}{1-\frac{V^2}{c^2}} \left(2+\sqrt{1+\frac{3V^2}{c^2}}\right) \simeq 3mV \\
\tilde{p}_1 &= \frac{m\tilde{v}_1}{\sqrt{1-\frac{\tilde{v}_1^2}{c^2}}} = \frac{mV}{1-\frac{V^2}{c^2}} \left(-2+\sqrt{1+\frac{3V^2}{c^2}}\right) \simeq -mV \\
\tilde{p}_2 &= \frac{2m\tilde{v}_2}{\sqrt{1-\frac{\tilde{v}_2^2}{c^2}}} = \frac{4mV}{1-\frac{V^2}{c^2}} \simeq 4mV
\end{aligned}
$$

となり、

$$
p_1 = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2
$$

が成立する。
もちろん別の運動量の定義も考えうるが、この定義で実験結果が説明できる。
運動量 $\overrightarrow{p}$ を

$$\overrightarrow{p} = \frac{m\overrightarrow{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m(v)\,\overrightarrow{v}$$

のように書くこともできる。ただし $v = |\overrightarrow{v}|, m(v) = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$[29]である。
よって $m = m(0)$ より、質量 m は**静止質量**と呼ばれることもある。

練習問題　質量 m の 2 物体が、S' 系において静止しているばねの両端に接続され、物体 1 に初速 $v_1' = -V$、物体 2 に初速 $v_2' = V$ を与えたとき、

1. v_2' を Lorentz 変換して v_2 を求めよ。
2. v_2 から p_2 を求めよ。
3. 運動量保存より p_0 を求めよ。

ただし、S 系での重心の速度・運動量を v_0, p_0 とする。

$$v_2 = \frac{2V}{1+\frac{V^2}{c^2}}$$

$$\begin{aligned} 1-\frac{v_2^2}{c^2} &= 1-\frac{\frac{4V^2}{c^2}}{\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right)^2} \\ &= \frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^2-\frac{4V^2}{c^2}}{\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right)^2} \\ &= \frac{\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^2}{\left(1+\frac{V^2}{c^2}\right)^2} \end{aligned}$$

$$p_2 = \frac{2mV}{1+\frac{V^2}{c^2}}\frac{1+\frac{V^2}{c^2}}{1-\frac{V^2}{c^2}} = \frac{2mV}{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

$$p_0 = p_1 + p_2 = \frac{2mV}{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

[29]質量が速度によって変わっているように見える。

系の質量を M とすると、

$$p_0 = \frac{MV}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{2mV}{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

より、

$$M = \frac{2m}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

となり、矛盾してしまう。[30]

この問題を Newton 力学で考えると、はじめのポテンシャルエネルギーを U として、エネルギー保存則は、S' 系で

$$U = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}mV^2$$

S 系で

$$U + \frac{1}{2}\left(2m\right)V^2 = \frac{1}{2}m\left(2V\right)^2$$

であり、$U = mV^2$ でどちらも成立する。

そもそも質量 $\times 4$ 元速度の時間成分の保存は、

$$u^\mu = (\gamma c, \gamma \overrightarrow{v})$$

$$\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\left|\overrightarrow{v}\right|^2}{c^2}}}$$

より、S' 系で

$$Mc = \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad \text{(止まってるの＋動いてるの)}$$

S 系で

$$\frac{Mc}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = mc + mc\frac{1+\frac{V^2}{c^2}}{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

[30] M=2m ではない！？

となり、$M=\frac{2m}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ でどちらも成立する。
この表式は何を意味しているのかを考える。
$|V|\ll c$ のとき、

$$(1+x)^\alpha \simeq 1+\alpha x\,(|x|\ll 1)$$

を用いて、S' 系で

$$Mc = mc\left(1+\frac{V^2}{2c^2}\right)+mc\left(1+\frac{V^2}{2c^2}\right)$$

S 系で

$$Mc\left(1+\frac{V}{2c^2}\right)=mc+mc\left(1+\frac{2V^2}{c^2}\right)$$

$M\simeq 2m\left(1+\frac{V^2}{2c^2}\right)$ を $M=2m+\frac{U}{c^2}$ と考えると、これらの式は Newton 力学での

$$(\text{質量保存})\times c+(\text{エネルギー保存})\times\frac{1}{c}$$

に対応する。これを以下のように解釈する。
質量 m、速度 $\overrightarrow{v}$ の質点でのエネルギー E と運動量 $\overrightarrow{p}$ を

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{|\overrightarrow{v}|^2}{c^2}}}$$

$$\overrightarrow{p}=\frac{m\overrightarrow{v}}{\sqrt{1-\frac{|\overrightarrow{v}|^2}{c^2}}}$$

と定義すると、$\left(\frac{E}{c},\overrightarrow{p}\right)$ は反変ベクトルであるので、ある系で保存していれば Lorentz 変換した別の系でも保存される。

$$p^\mu = mu^\mu = m\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}=\left(\frac{E}{c},\overrightarrow{p}\right)$$

は 4 元運動量と呼ばれる。

$$E=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{|\overrightarrow{v}|^2}{c^2}}}\equiv \underbrace{mc^2}_{\text{静止エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2}m|\overrightarrow{v}|^2}_{\text{Newton 力学での運動エネルギー}}$$

ここから、質量もエネルギーの一つの形態として考えることができる。これを**エネルギーと質量の等価性**という。
四元運動量に対して、以下のような内積を取ると

$$p^\mu \eta_{\mu\nu} p^\nu = m^2 u^\mu \eta_{\mu\nu} u^\nu = -m^2 c^2 < 0 \, (\text{time-like})$$

$$p^\mu p_\mu = -m^2 c^2$$

このスカラー量から質量を定義することができる。
静止系では $p^\mu = (mc, 0, 0, 0)$ となる。前回の練習問題では、ポテンシャルエネルギーがあったので $M > 2m$ であった。
ここまでの議論は非相対論的極限とか呼ばれる。
$E \gg mc^2$ のときを**超相対論的**という。このとき、

$$p^\mu p_\mu = -\frac{E^2}{c^2} + |\overrightarrow{p}|^2 = -m^2 c^2$$

$p = |\overrightarrow{p}|$ とすると、

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m^2 c^2} \\ &= \frac{E}{c}\sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2} \\ &\simeq \frac{E}{c} \gg mc \end{aligned}$$

速度は

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{|\overrightarrow{v}|^2}{c^2}}}$$

より、

$$|\overrightarrow{v}|^2 = c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2}$$

$\frac{mc^2}{E} \to 0$ の極限で $|\overrightarrow{v}| \to c$
E や $\overrightarrow{p}$ は有限で $m = 0$ の粒子が存在するならば、常に光速で運動

$$p^\mu p_\mu = -m^2 c^2 \to p^\mu p_\mu = 0 \, (\text{light-like})$$

となり、Lorentz 変換で $\overrightarrow{p} = (0, 0, 0)$ にできない。

6.2　運動方程式

Newton の運動方程式

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}=\vec{F}$$

の両辺が Lorentz 変換のテンソル量ではない。Lorentz 共変にするひとつの変更方法は、

$$m\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}=f^\mu$$

$p^\mu=m\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$ より $\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau}=f^\mu$ とも書ける。

左辺は反変ベクトルであり、$\frac{|\vec{v}|^2}{c^2}\to 0$ の極限で、空間成分は $m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$

$\frac{|\vec{v}|^2}{c^2}\to 0$ の極限で空間成分が Newton 力学での $\vec{F}$ になるような反変ベクトル f^μ が存在するか?[31]

自然界の力のうち「強い力」と「弱い力」は短距離離力で量子力学的な取り扱いが必要。(→場の量子論)

電磁気力は、

$$\vec{F}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

(ただし $\vec{B}$ は磁束密度、q は電荷、$\vec{E}$ は電場である。)

あとで示すように

$$f^\mu=\left(\frac{\gamma q}{c}\vec{E}\cdot\vec{v},\gamma q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)\right)\qquad\left(\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}}\right)$$

は反変ベクトルとして変換。

よって運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau}=\gamma\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\gamma}{c}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t},\gamma\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\right)$$

より、

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=q\vec{E}\cdot\vec{v}$$
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=q\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

[31] たいていの系は相対論的には扱えない。例えば剛体は情報が瞬時に伝わってしまうので相対論に矛盾。→場の理論

はこのままで Lorentz 共変である。
ただし、クーロンの法則のような表し方では無理。

↓以下はよくわからないでしょうきっと
重力も今までのような表し方（クーロンの法則とほぼ同じ形）では無理なので、座標に依存する計量 $g_{\mu\nu}(x)$ を導入して、

$$m\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}=0$$

を一般相対性を持つように拡張すると、

$$g_{00}\simeq -1-\frac{2\phi}{c^2},\quad \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}\simeq 0$$

のとき、

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\simeq -m\vec{\nabla}\phi$$

となり、原点に質量 M の質点が存在する場合は、G を Newton の重力定数として、

$$\phi\simeq -\frac{GM}{|\vec{r}|}$$

より、Newton の万有引力の法則を再現している。

以下、再び電磁気力について考える。
一様な磁場中の荷電粒子

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{|\vec{v}|^2}{c^2}}}\right)=q\vec{v}\times\vec{B}$$

両辺を運動量と内積を取る。

$$\begin{aligned}\vec{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}&=q\vec{p}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\\&=q\vec{B}\cdot(\vec{p}\times\vec{v})\\&=0\quad(\because\vec{p}\parallel\vec{v})\end{aligned}$$

より、

$$\vec{p}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\vec{p}|^2=0$$

から、$|\overrightarrow{p}|^2$ は一定である。
また

$$|\overrightarrow{p}|^2 = \frac{m\,|\overrightarrow{v}|^2}{1-\frac{|\overrightarrow{v}|^2}{c^2}}$$

より

$$|\overrightarrow{v}|^2 = \frac{|\overrightarrow{p}|^2}{m^2c^2+|\overrightarrow{p}|^2}c^2$$

から $|\overrightarrow{v}|$ も一定で $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{|\overrightarrow{v}|^2}{c^2}}}$ も一定である。

$$m\gamma\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = q\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{B}$$

⇒等速円運動

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B} &= (0,0,B)\\ \overrightarrow{r} &= (r\cos\omega t, r\sin\omega t, 0)\end{aligned}$$

とする。(ただし B, r, ω は定数)
すると

$$m\gamma r\omega^2 = -qr\omega B$$

$$\omega = -\frac{qB}{m\gamma}$$

$q>0, B>0$ のとき $\omega<0$ で、

$$r = \frac{|\overrightarrow{v}|}{|\omega|} = \frac{m\gamma\,|\overrightarrow{v}|}{qB} = \frac{|\overrightarrow{p}|}{qB}$$

6.3 Compton 散乱

電磁波のエネルギーや運動量は振幅を変えると連続的に変わるが、量子力学的に取り扱うと最小値の整数倍の値しか取ることができなくなる。⇒光の粒子性・光子 (photon)
振動数 ν の電磁波のエネルギー E の最小値

$$E = h\nu = \hbar\omega$$

ここで $h = 6.6\times 10^{34}\,\mathrm{J\cdot s}$ で Planck 定数と呼ばれ、$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ である。

向きは波の進む向きに等しく、$\left|\overrightarrow{k}\right|=$ 波数 $=\frac{2\pi}{\text{波長}}$ である波数ベクトル $\overrightarrow{k}$ のときの運動量 $\overrightarrow{p}$ は、$\hbar\overrightarrow{k}$ の整数倍である。
Doppler 効果の時の進行波の Lorentz 変換より、$\left(\frac{\omega}{c},\overrightarrow{k}\right)$ は反変ベクトルとして変換するので、$\left(\frac{E}{c},\overrightarrow{p}\right)$ も反変ベクトルとなる。
$\omega=c\left|\overrightarrow{k}\right|$ より、

$$\begin{aligned}p^{\mu}p_{\mu}&=-\frac{E^2}{c^2}+\left|\overrightarrow{p}\right|^2\\&=-\frac{\hbar^2}{c^2}c^2\left|\overrightarrow{k}\right|^2+\hbar^2\left|\overrightarrow{k}\right|^2\\&=0\end{aligned}$$

となり、光子は質量ゼロの粒子として振る舞う。

Compton 散乱　波長 λ の光子が静止している質量 m の電子を跳ね飛ばす散乱を考える。
このとき跳ね飛ばされた粒子の進行角度を φ、散乱後の光子の進行角度を θ、散乱後の光子の波長を λ'、散乱後の電子の運動量の大きさを $p=\left|\overrightarrow{p}\right|$ とすると、エネルギー保存則より、

$$\frac{hc}{\lambda}+mc^2=\frac{hc}{\lambda'}+\sqrt{m^2c^4+p^2c^2}$$

各軸の運動量保存則より、

$$\begin{aligned}\frac{h}{\lambda}&=\frac{h}{\lambda'}\cos\theta+p\cos\varphi\\\frac{h}{\lambda'}\sin\theta&=p\sin\varphi\end{aligned}$$

p を消去して、

$$\begin{aligned}p^2&=\left(\frac{h}{\lambda}-\frac{h}{\lambda'}\cos\theta\right)^2+\frac{h^2}{\lambda'^2}\sin^2\theta\\&=\frac{h^2}{\lambda^2}+\frac{h^2}{\lambda'^2}-\frac{2h^2\cos\theta}{\lambda\lambda'}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow\left(\frac{hc}{\lambda}+mc^2-\frac{hc}{\lambda'}\right)^2\\&=m^2c^4+\frac{h^2c^2}{\lambda^2}+\frac{h^2c^2}{\lambda'^2}-\frac{2h^2c^2\cos\theta}{\lambda\lambda'}\end{aligned}$$

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta)$$

$$\lambda_c = \frac{h}{mc}$$

となり、これを**電子の Compton 波長**と呼ぶ。
そして $\lambda' > \lambda$ となり、散乱によって波長が変わったことがわかる。これは電磁波の粒子性を示す重要な結果である。

7 Maxwell 方程式の共変性

7.1 テンソル場

S 系の座標を x^μ、S' 系での座標を x'^μ とし、とくにこの章では

$$x'^\mu = \wedge^\mu{}_\nu x^\nu$$

という一般的な Lorentz 変換を考える。
x^0, x^1, x^2, x^3 の関数 $f\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ を $f(x)$ と略記する。$f\left(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3\right)$ も同様に $f(x')$ と略記する。
S 系での場 $u(x)$ が S' 系での場 $u'(x')$ に

$$u'(x') = u(x)$$

のように変換する時、$u(x)$ をスカラー場という。
S 系での場 $A^\mu(x), F_{\mu\nu}(x)$ が S' 系での場 $A'^\mu(x'), F'_{\mu\nu}(x')$ に

$$A'^\mu(x') = \wedge^\mu{}_\nu A^\nu(x)$$

$$F'_{\mu\nu}(x') = \wedge_\mu{}^\rho \wedge_\nu{}^\sigma F_{\rho\sigma}(x)$$

(ただし $\wedge_\mu{}^\nu = \eta_{\mu\rho} \wedge^\rho{}_\sigma \eta^{\sigma\nu}$ である) のように変換する時、$A^\mu(x)$ を (反変) ベクトル場、$F_{\mu\nu}(x)$ を 2 階の (共変) テンソル場であるという。
一般のテンソル場も同様に定義する。[32]

[32] 同じ点で座標系を変えるとスカラーはそのままだが、ベクトルはいろんな成分が混ざる

合成関数の微分　$f(x,y)$ を x と y の関数、x も y も x' と y' の関数であるとする。$x' \to x' + \Delta x'$ のとき、

$$\begin{cases} x \to x + \Delta x \\ y \to y + \Delta y \end{cases}$$

とすると、

$$\begin{aligned} &\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta x'} \\ =&\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta x'} \\ &+ \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x'} \end{aligned}$$

$\Delta x' \to 0$ で、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f(x(x',y'), y(x',y'))}{\partial x'} \\ =&\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} \end{aligned}$$

同様に考えて $u(x)$ がスカラー場の時、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} u'(x') &= \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} u(x(x')) \\ &= \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} u(x) \end{aligned}$$

より $\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} u(x)$ は、

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} u'(x') = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} u(x)$$

のように変換する。

$$x'^{\mu} = \wedge^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$$

より、この逆変換を考えて

$$\begin{aligned} x^{\nu} &= \left(\wedge^{-1}\right)^{\nu}{}_{\mu} x'^{\mu} \\ &= x'^{\mu}\left(\wedge^{-T}\right)_{\mu}{}^{\nu} \\ &= x'^{\mu}\wedge_{\mu}{}^{\nu} \end{aligned}$$

$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \wedge_{\mu}{}^{\nu}$ より、

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} u'(x') = \wedge_{\mu}{}^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} u(x)$$

よって、共変ベクトル場として変換する。つまり、下付き添字のような変換をするので、$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu}, \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \partial'_{\mu}$ と書き、

$$\partial'_{\mu} u'(x') = \wedge_{\mu}{}^{\nu} \partial_{\nu} u(x)$$

と書く。
同様に例えば $\partial_{\mu} A_{\nu}(x)$ は 2 階の共変テンソル場として変換する。

7.2 波動方程式

$u(x)$ がスカラー場の時、

$$\eta^{\mu\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} u(x) = \partial_{\mu} \partial^{\mu} u(x)$$

はスカラー場として変換するので、

$$\partial_{\mu} \partial^{\mu} u(x) = 0 \to \partial'_{\mu} \partial'^{\mu} u'(x') = 0$$

ここで色々と復活させると、$\partial_{\mu} \partial^{\mu} u(x) = 0$ は

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(\overrightarrow{r}, t) + \nabla^2 u(\overrightarrow{r}, t) = 0$$

となる。
ただしここで ∇^2 は

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u + \frac{\partial^2}{\partial z^2} u$$

という演算子で Laplacian という。
よって

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} u'(\overrightarrow{r}', t') + \nabla'^2 u'(\overrightarrow{r}', t') = 0$$

・これは波の速度が c の波動方程式で、Lorentz 共変である。
・波動方程式は Galilei 変換のもとで不変ではなかった。$\to$ 媒質の変位を表す方程式という解釈が必要である。

ここから、$\partial_{\mu} \partial^{\mu} u(x) = 0$ は、上のような解釈は必要なく、**媒質の変位を表すものではなく、場自体が物理的実体である**と考えることが可能である。[33]

[33] このように考えると色々な現象に説明がつく。

7.3 Maxwell 方程式

$$\begin{cases} \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \rho \\ \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0 \\ \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = \frac{1}{c}\overrightarrow{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \end{cases}$$

この式に馴染みがない人は、以下のように変換。[34]

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E} &\to \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}\overrightarrow{E} \\ \overrightarrow{B} &\to \sqrt{\mu_0}\overrightarrow{B} \\ \rho &\to \sqrt{\varepsilon_0}\rho \\ \overrightarrow{j} &\to \sqrt{\varepsilon_0}\overrightarrow{j} \\ \varepsilon_0\mu_0 &= \frac{1}{c^2} \end{aligned}$$

ここで ρ は電荷密度、$\overrightarrow{j}$ は電流密度ベクトル、

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

である。
ここからこの式の共変性を示していく。まず $\overrightarrow{\nabla} \cdot \left(\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}\right) = 0$ より、$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}$ ならば $\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0$ は恒等的に満たされる。

$$\overrightarrow{\nabla} \times \left(\overrightarrow{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}\right) = 0$$

また、$\overrightarrow{\nabla} \times \ \overrightarrow{\nabla}\phi = 0$ より、$\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$ ならば、$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$ も満たされる。（ϕ はよく電位と呼ばれるもの。A はベクトルポテンシャルと呼ばれるもの。）

[34]単位系の関係。上の式はヘヴィサイド単位系。

$A_\mu = \left(-\phi, \overrightarrow{A}\right)$ が共変ベクトル場として変換すると仮定する。このとき、

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

は 2 階の共変テンソル場。ここで

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$$

より、$F_{\mu\nu}$ は反対称テンソル場である。

$$\begin{aligned} F_{01} &= \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^1} \\ &= \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ &= -E_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{\partial A_2}{\partial x^1} - \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \\ &= B_z \end{aligned}$$

すべて計算すると、

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

となり、$\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B}$ は 2 階の反対称テンソル場の成分となる。
次に、

$$T_{\lambda\mu\nu} = \partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$$

という式を考える。$T_{\lambda\mu\nu}$ を 3 階の共変ベクトルとして、

$$T_{\lambda\mu\nu} = -T_{\lambda\nu\mu}, T_{\lambda\mu\nu} = -T_{\mu\lambda\nu}$$

となり、完全反対称となる。
独立な式は $T_{123} = 0, T_{023} = 0, T_{013} = 0, T_{012} = 0$ の 4 つである。

$$
\begin{aligned}
T_{123} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \\
&= \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{023} &= \frac{1}{c}\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$T_{\lambda\mu\nu} = 0$$

で Lorentz 共変となる。

$$\Rightarrow \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{B} = 0$$

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ のとき、

$$
\begin{aligned}
T_{\lambda\mu\nu} =& \partial_\lambda \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) \\
&+ \partial_\mu \left(\partial_\nu A_\lambda - \partial_\lambda A_\nu\right) \\
&+ \partial_\nu \left(\partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda\right) \\
=& 0
\end{aligned}
$$

より $T_{\lambda\mu\nu} = 0$ は満たされている。
$j^\mu = \left(c\rho, \overrightarrow{j}\right)$ が反変ベクトル場として変換すると仮定して、

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu$$

という式を考える。

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\mu\beta}$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_y & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\partial_\nu F^{0\nu} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

$$\partial_\nu F^{0\nu} = \frac{1}{c} j^0 \Rightarrow \overrightarrow{\nabla} \overrightarrow{E} = \rho$$

$$\partial_\nu F^{1\nu} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu$$

でこれは Lorentz 共変、ここから

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{E} = \rho$$

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{B} = \frac{1}{c} \overrightarrow{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

よって Maxwell 方程式がそのままの形で Lorentz 共変であることが導かれた。

最後に電荷 q を持つ質点について $qF^{\mu\nu} u_\nu$ という量を考える。ここで $F^{\mu\nu}$ は場ではなくて質点の位置での $F^{\mu\nu}$ である。

$$qF^{0\nu} u_\nu = q\gamma \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{v}$$

ここで $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{|\overrightarrow{v}|^2}{c^2}}}$ である。

$\mu = 1$ のときは

$$qF^{1\nu} u_\nu = q\gamma \left((-E_x)(-c) + B_z v_y - B_y v_z \right)$$

よって

$$qF^{\mu\nu} u_\nu = \left(q\gamma \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{v}, q\gamma \left(c\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B} \right) \right)$$

ここで

$$\overrightarrow{E} \to \sqrt{\varepsilon_0} \overrightarrow{E}$$

$$\overrightarrow{B} \to \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \overrightarrow{B}$$

$$q \to \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} q$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c$$

としてSIでの定義に戻すと、

$$qF^{\mu\nu}u_\nu = \left(q\gamma\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{v}, q\gamma c\left(\overrightarrow{E}+\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{B}\right)\right)$$

この下で、

$$\frac{\mathrm{d}p^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{c}F^{\mu\nu}u_\nu$$

上の式を考えると、これはLorentz共変であり、

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = q\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{v}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} = q\left(\overrightarrow{E}+\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{B}\right)$$

となる。