記号論理学・用語の整理

0. 注意

このファイルは 2018 年度 S セメスターで開講された総合科目 A・記号論理学(文科生向け)の授業で登場した用語を整理したものである。授業では多くの分析の手法を扱ってきたが、このファイルで扱うのは専ら用語の意味であり具体的な分析手法などは省略している。従って、このファイルは学習内容の整理・復習の一助となることを期待したものに過ぎず、実際にはレジュメ等を参照しながら各分析手法の実践練習を行うことが必要だと考えられる。また、解説は作者自身の理解を元にレジュメに準拠してまとめたものであるが、あくまで個人用であり、各解説の一部または全部に誤りがある可能性は十分あることを予め了承されたい。

1. 命題論理とその意味論的アプローチ

【論理学の目標】

前提　…　論証の出発点となる命題
導出　…　ある主張(の集まり)から、他の主張を導く過程
結論　…　前提から導出を経て導かれる命題
論証(推論)…　上記 3 つ全体の過程。
演繹　…　論証のうち、既知の事柄から事実を正確に取り出そうとするもの。
推測　…　論証のうち、既知の事柄から未知の事柄を結論として導こうとするもの。

【命題論理】

論理定項　…　推論を形式化する際に、変化させると内容が変わってしまうもの。命題論理では日本語の接続表現(「ならば」「または」など)に相当する。**否定、連言、選言、条件法(、双条件法)**が命題論理の論理定項である。
変項　…　推論を形式化する際に、変化させても推論の正しさに影響を与えないもの。
原子命題　…　一つの記号で表される命題。原子命題を表す記号はそのまま論理式となり、これは原子式と呼ぶ。
分子命題　…　原始命題に否定や連言などを付け加えて出来た命題のこと。
論理式　…　論理定項と命題記号から成る式。定義は 1.6 節参照。

【意味論的アプローチ】

真理関数　…　分子命題の真偽は、**それを構成する原子命題の真偽によって一意に決まる**ことから、原子命題の真偽についての関数だと考えることができる。これを真理関数と呼んでいる。
真理値　…　真理関数における、原子命題や分子命題のそれぞれの真偽のこと。この授業では真を 1、偽を 0 として表現している。

真理表 … 原子命題の真理値を書き出し、その真理値割り当てに対応する分子命題の真理値を書き出すことで真理関数を分析した表のこと。このような分析方法のことを**真理値分析**と呼ぶ。

二値原理 … 全ての命題は真か偽のどちらかである、という原理。命題論理ではこの二値原理が大前提となっているため、全ての命題には真か偽のいずれかが割り振られる。ただし、二値原理は我々の直観に必ずしも一致するものではない(後の**直観主義論理**で詳しく扱う)。

シェーファーの棒 … 論理定項の数は一通りに定まったものではない。例えば、否定と条件法の 2 つの論理定項だけで全ての命題論理の真理値分析を行うことができる。シェーファーの棒は、前項と後項が共に真の時のみ偽を返し、その他の場合は真を返す論理定項であるが、シェーファーの棒を用いると 1 つの論理定項のみで全ての真理値分析を行うことができる。

トートロジー … 原子式の全ての真理値割り当てに対して真になる論理式のこと。命題論理における論理的真理は、トートロジーとなる論理式である。

矛盾式 … 原子式の全ての真理値割り当てに対して偽になる論理式のこと。

推論式 … 前提 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ のもとで、結論 C が導かれるとき、それを $A_1, A_2, \cdots, A_n \Rightarrow C$ と書き、これを推論式と呼ぶ(条件法“→”との区別に注意)。全ての前提に 1 を割り当てる真理値分析のもとで、結論 C の真理値が 1 となるとき、この推論は妥当である。また、この推論式は、論理式 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n) \to C$ と対応する。この論理式がトートロジーであるとき、その推論式妥当である。(この 2 通りの妥当性の証明は結局同じことである。)

2. 命題論理の構文論的アプローチ

【構文論的アプローチ】

構文論 … 原子命題に意味を割り当てた上で、与えられた命題の真偽を分析する意味論的アプローチに対し、記号の意味を考えずに、記号相互の導出規則・変形規則によって与えられた命題を導出することでその論証の正しさを証明する方法。

公理系 … 一群の**公理**と一群の**推論規則**からなる体系。公理系において、その公理が意味的真理(トートロジー)であることは要求されていない、ということに注意が必要。あくまで公理はその公理系における出発点として規定されているに過ぎず、その意味内容は規定されていないのである(p.28-29 参照)。

公理 … 推論の出発点として、無前提に定理として定められる論理式。

推論規則 … ある定理からどのような定理を導くことができるかを定めた規則。

定理 … 公理・定理・推論規則を用いて構成された論理式を定理と呼ぶ。

自然演繹 … 公理系 N(p.30)を用いて行われる構文論的演繹(推論)。ここでまた注意が必要なのは、この公理系 N については一群の推論規則がトートロジーを導き出すための規則であることである。一般に公理系の公理や推論規則は意味内容の規定を必要としないが、この公理系 N では意味内容に関する性質が成立している。また、公理系 N は公理系の要素である公理を一つも持たないことにも注意。

完全性 … 公理と推論規則から証明される全ての論理式がトートロジーであり、かつ全てのトートロジーがこの手続きをもって証明される、という性質。この二つの性質を合わせて公理系の完全性と呼ぶが、狭義には、前者を**健全性**、後者を**完全性**と呼ぶことがある(第 8 節で扱う)。公理系 N は(広義の)完全性を満たす公理系である。

3. 述語論理

【命題の内部構造・述語論理の論理式】

個体指示表現 … 自然言語における固有名詞、「日本で一番高い山」など指示対象が一つに定まる**確定記述句**がそれに当たる。

命題関数 … 「A が B する(である)」などの命題論理では捨象されてしまう命題の内部表現を表すために、述語論理では命題関数という道具を用いる。「x が B する(である)」という述語部分を取り出し、Bx と表すとする。そうすると、Bx の x(**個体変項**と呼ぶ)に個体指示表現 a, b(**個体定項**と呼ぶ)を代入することで、命題 Ba, Bb が得られる。このように、個体からそれに対応する命題を返す関数と考えて、Bx を命題関数と呼ぶ。

一般名辞 … 個体指示表現に対し、「寿司」「山」など一般名詞にあたる表現。一般名辞を主語とする命題は以下の全称・存在の表現を用いて表される。

全称量化子 … 記号∀で表される。(なお all の頭文字を上下反転させた記号である。)∀xFx と書いて、「すべての x について Fx」と読む。

存在量化子 … 記号∃で表される。(なお existence の頭文字を左右反転させた記号である。)∃xFx と書いて、「ある x について Fx (Fx を満たす x が存在する)」と読む。

述語記号 … 命題関数 Fx のうち、個体変項を除いた F の部分を述語記号と呼ぶ。述語記号と個体変項、あるいは述語記号と個体定項のセットが述語論理における原子式となる。

自由変項 … 論理式 Fx における個体変項 x は量化子によって量化されていないため、その真偽を扱うことができない。このような個体変項を自由変項と呼ぶ。

束縛変項 … 論理式∀xFx における個体変項 x は全称量化子によって量化されている。このような個体変項を束縛変項と呼ぶ。また、このとき、Fx は量化子∀x の**作用域**にあると言う。

多項述語論理 … これまで扱ってきた命題関数がただ 1 つの個体を取る単項述語論理に対し、複数の項を取る述語論理を想定することもできる。これを多項述語論理と呼ぶ。

【述語論理の公理系(構文論的アプローチ)】

述語論理の自然演繹 … 命題論理の公理系 N に、全称量化子・存在量化子の導入則・除去則を追加した公理系 N*(p.52 参照)が述語論理の公理系に当たる。証明の仕方は命題論理の自然演繹と同様である。ここでは容易な全称例化・存在汎化の説明は省略する。

全称汎化 … At から∀xAx を導くという推論規則。ここで重要なのは t が全ての個体定項の代表に過ぎず、t 自体が何らかの仮定・前提に依拠したものであってはならない。よって、t が規則を適用する段階でキャンセルされていない仮定に現れない、という条件の元で適用できる。例えば、「東大生の A さんは駒場キャンパスに来たことがある」から「すべての東大生は駒場キャンパスに来たことがある」と導くようなもの。

存在例化 … ∃xAx, At→C から C を導くという推論規則。ここでも t は全ての個体定項の代表であり、t という定項が C の導出に直接関係していてはいけない。例えば、「東大生が存在する。A さんが東大生だとすると、東京大学は学費を受け取っている。」から「東京大学は学費を受け取っている」と導くようなもの。

ド・モルガンの法則　… 命題論理におけるド・モルガンの法則は、述語論理におけるド・モルガンの法則の議論対象となる定項が 2 つだけだった場合と解釈できる。

定言的三段論法　… 3 つの概念が存在し、2 つの(述語)論理式から 3 つ目の論理式を導出するもの。述語論理の範囲で全て証明が可能である。

【述語論理の意味論的アプローチ】

モデル　… 述語論理の真偽を決めるために必要な、**議論領域**と**付値関数**の組み合わせのこと。自由変項が 1 つも現れない論理式(**閉じた論理式**と呼ぶ)は、モデルに応じて真であったり偽であったりする。重要なのは、ここでの定義では自由変項を含む論理式(**開いた論理式**)の真偽を規定していないことである。

議論領域　… 空集合でない個体定項の集合(ここでは D とする)。∀xAx が真であるとは、議論領域 D に属するすべての個体定項 a について Aa が真である、ということを意味する。また、∃xAx が真であるとは、Aa が真となるような議論領域 D に属する個体定項 a が存在する、ということを意味する。

付値関数　… 述語記号には議論領域 D の部分集合であるような集合が割り当てられることになる。例えば議論領域 D を「東大生」、述語記号 F を「文科生である」とすると、述語記号 F には東大生全体の部分集合である文科生の集合が割り当てられていると考えらえる。また、個体定項には、議論領域 D の要素であるような特定の個体が割り当てられる。この割り当てを関数と捉えて、付値関数 V の性質をこのように定式化できる(上記の表現を形式化したに過ぎない)。$V(F)\subseteq D, V(a)\in D$

ここで、述語論理の原子式の真理を定義できる。Fa が真であるとは、a に割り当てられた個体が、F に割り当てられた性質の要素である、と解釈できる。これを形式化すると、Fa が真 $\Leftrightarrow$ $V(a)\in V(F)$となる。

妥当式　… 述語論理における論理的真理。モデルによらず、論理記号の意味のみによって真とされる論理式のことを言う。妥当式は、命題論理におけるトートロジーに対応する。トートロジーは原子式の任意の真理値割り当てに対して真となる論理式のことであったように、妥当式は任意のモデルに対して真となる論理式と定義される。

推論の妥当性　… 命題論理では、全ての前提に 1 を割り当てる真理値分析のもとで、結論 C の真理値が 1 となるとき、その推論を妥当であるとした。同様に、述語論理では、全ての前提を真とするような任意のモデルに対して、結論が真となるとき、その推論が妥当であるということになる。

反証モデル　… 全ての前提を真にしつつ、結論を偽とするようなモデルを反証モデルと呼ぶ。反証モデルが存在すれば、その推論は妥当でないものだったと言うことになる。

存在措定　… 「すべての P は Q である」から「ある P は Q である」を妥当と考えるのは、このような主張から P であるものが存在すると暗黙裡に解釈するからである。これを存在措定と呼ぶ。実際、P が存在しないような反証モデルを用意すれば、この推論は妥当ではなくなる。

4. 公理系の無矛盾性

【公理系の完全性と健全性】

健全性 … 公理と推論規則から得られる論理式(それを**定理**と呼んだ)が全て**トートロジー**となる、という性質。言い換えれば、構文論的に示されたすべての論理的真理が、意味論的にも論理的真理になる、ということである。

完全性 … **トートロジー**がすべて公理と推論規則に基づく証明手続きによって導出可能である(**定理**である)、という性質。言い換えれば、意味論的な論理的真理は、すべて構文論的にも証明可能である、ということである。なお、前述の通り、この健全性と完全性を合わせて(広義の)公理系の完全性と呼ぶ場合があるので注意。また、この授業では健全性の証明のみを扱い、完全性の証明は扱っていない。

メタ論理 … 公理系の健全性を示すというのは、構文論的に示された定理が、意味論的に示されるトートロジーであることを証明することである。従って、この証明をするのには意味論や構文論といったレベルを超越した観点で、その論理式の集まりについて成り立っていること(**メタ定理**)を日本語(**メタ言語**)で示す必要がある。これがメタ論理である。

導出式 … 公理系 N を用いた構文論的アプローチでの証明の各行は、一般に論理式とその仮定から成っている($A\,[n_1, n_2, \cdots, n_m]$)。それを意味論的な式に変換すると、仮定は条件法の前項として理解される(k 行目の仮定を A_k とすると、$(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m) \rightarrow A$)。これを導出式と呼ぶ。

健全性の証明 … 健全性の証明の段取りについて簡単にまとめておこう。構文論的証明の各行に対して、行についての数学的帰納法で証明する。まず 1 行目に対応する導出式がトートロジーであることを証明した上で、n 行目がトートロジーであると仮定すると n+1 行目がトートロジーであることを証明する。公理系 N の 8 つの推論規則それぞれに対し、導出後の n+1 行目の論理式がトートロジーであることを示すことで、数学的帰納法により、証明の全ての行の導出式がトートロジーであることが示される。さて、定理とは仮定なしに書き出された論理式のことであったため、定理の導出式は定理そのものの論理式に等しい。したがって公理系 N の健全性、すなわち命題論理の健全性が証明される。

無矛盾性 … 公理系の無矛盾性とは、論理式 D∧¬D(矛盾式)は公理系の定理ではない、という性質である。公理系 N について健全性が証明されたため、背理法(公理系 N の推論規則の一つである背理法ではないことに注意)によって簡単に命題論理の無矛盾性が証明できる。

【述語論理の無矛盾性】

述語論理の影 … 述語論理の公理系 N*で示される論理式 D に対して、命題論理の公理系 N における論理式 D*を次のように対応させる。まず、D に含まれる量化子を全て除去し、述語記号を持つ論理式は定項や変項を無視して命題記号 P, Q, …で置き換える。このようにして出来た論理式 D*を論理式 D の影と呼ぶ。(記号がややこしいため繰り返すと、*D は N*の論理式*で、*D*は N の論理式*である。以後も注意)

述語論理の無矛盾性の証明もおさらいしておこう。ここで、N*の諸規則の影を作る。全称汎化、全称例化、存在汎化の影はすべて同一律になり、存在例化の影は前件肯定式(MP)になる。したがって、N*の推論規則は N の推論規則と一致する。つまり、N*における D の証明の影を作ると、N における D*の正しい証明になる。すなわち、D が N*の定理ならば、D*は N の定理になる。また、¬D が N*の定理ならば、¬D*は N の定理になる。よって、D∧¬D が N*の定理ならば、D*∧¬D*は N の定理になる。これは命題論理の無矛盾性に反するため、D∧¬D は N*の定理ではない。すなわち、N*も無矛盾である。これにて**述語論理の無矛盾性**が示された。

5. 直観主義論理

【直観主義論理】

古典論理の意味論 … これまで我々が見てきた推論は**古典論理**と呼ばれるものである。古典論理では、あらゆる命題は我々が認識できるか否かに関わらず真または偽である、と考える。例えば「あのパンは美味しい」という命題を考える。この否定は「あのパンは美味しくない」になるはずだが、もしそのパンを食べる前に腐らせて捨ててしまったら、美味しいとも美味しくないとも言えないだろう。しかし古典論理の意味論では、この命題も必ず真または偽でなくてはいけない。このように、古典論理の意味論は、命題の真理は我々の認識とは独立して(ある意味神の視点で)決定している、という考えに立っている。

証明可能性 … **直観主義論理**において中心となる概念。証明可能性という観点で見ると、排中律(A∨¬A)は「A が証明できる、または A でないことが証明できる」と翻訳できるが、これは明らかに正しくない。まだ真とも偽とも証明されていない命題はたくさんあるはずだ。
また、¬¬A が証明できるときを考える。この時、¬A は証明できない(直観主義論理においても A∧¬A は矛盾式である)。しかし、排中律が否定されたため、¬A が証明できないからといって、A が証明できるとは限らない。よって、直観主義論理では二重否定除去も拒否される。

【直観主義論理の公理系】

否定除去則 … 命題論理の公理系 N では、否定の除去則は二重否定除去(¬¬A から A を導いて良い)であった。直観主義論理では二重否定除去は成り立たないため別の否定除去則に置き換える必要がある。それが「D∧¬D から、任意の A を導出して良い」である。
当然、否定除去則が置き換えられると、これまで証明できた命題が証明できなくなるケースが出てくる。例えば、(当然ながら)排中律 A∨¬A は証明できない。なお、二重否定除去は証明できないが、三重否定を一重否定にすることはできる(¬¬¬A→¬A は定理である)。

【直観主義論理の意味論】

知識状態 … **知識状態**は**認識史** K の要素として捉えられる。知識状態には時間的な前後関係が用意されており、知識状態βが知識状態αより後または同時であることを「$\alpha R \beta$」と表す。そうすると、$\alpha R \alpha$(**反射性**)、$\alpha R \beta$, $\beta R \gamma$ならば$\alpha R \gamma$(**推移性**)が成り立つことも容易に理解できる。

証明の蓄積 … 知識状態αで命題 P が証明されていることを「α#P」と表す(レジュメの記号とは違うが以後この記号を用いる)。そうするとレジュメの規則(3)「α#P かつ$\alpha R \beta$ならば、β#P」は、それ以前の知識状態で証明された命題は、以後蓄積されることを示していると分かる(p.84 参照)。

古典命題論理の意味論 … ここで知識状態を全て取っ払うと、古典命題論理の意味論を表現することができる(p.85 参照)。

認識史モデル … 集合 K、関係 R、各知識状態における各原子式の証明可能性を具体的に定めたもの。

妥当式 … 直観主義命題論理における論理的真理。論理式 A が妥当であることは、全ての認識史モデルにおいて、その全ての知識状態αでα#A が存在することと同値である。