著者　Yoshi

2018 S1

これは 2S セメスターに開講される「基礎実験 III(物理学)」の参考資料である。予習問題および課題と質問の答え、実験における注意、考察の例を紹介する。教科書の内容を少しまとめただけなので詳しいことは東京大学が出版している『基礎物理学実験』を参照して欲しい。なお、考察に関しては優上を目指すことを仮定したものが多く掲載されている(追記：書いていくにつれてめんどくさくなってしまったのでほとんど有用な考察は掲載されていない。申し訳ない。)。適当に書いておけば優はくるのでそんなに身構えて書く必要はない。

基礎物理学実験ではノートに実験の目的、概要、原理、方法、結果、考察などを記入していき、それを最終週に提出して評価される。実験の予習には 2〜3 ページ、実験の記録に 4〜6 ページ (グラフを貼り付けたりする) ほど使うのでノートは少なくとも 40 枚綴り以上 (つまり 80 ページ以上) が良い。筆者は 30 枚綴りのノートを購入してしまったため大変苦労している。結局 57 ページに無理やり収めたが...。ちなみに評価は内容ではなく字の綺麗さでつけられている説があるので綺麗に書こう。

先述でもあったように実験ではグラフを多々描く。なので方眼のグラフ用紙は毎回持って来る必要があるだろう (実験 3 では片対数グラフも必要)。クラスで割り勘して買うと経済的に優しくなる。またグラフを貼り付けるのりも必須である。貼り付けていないと試問が通らない。

この資料に載っている問題に対する答えはあっていることは保証しない。またこの資料の使用により東京大学から何らかのペナルティが課されたとしても一切関知しない。全ての責任は読者が負うものとする。またこのシケプリは不完全なので、これを基に完全なシケプリが作られることを願っている。この目的達成のために内容を参考にすることは一向に構わない。

目次

実験 1

物理実験学入門

1 概要

この実験は物理学実験のガイダンス時に全体で行われる実験であり、唯一予習がいらない実験である。内容は、6 つのサイコロが入った透明の入れ物を 100 回振り、のべ 600 回の出目のうち、ある目が出た回数を調べるというものである。このデータを全体で集め、サイコロの各目の出る確率は理想的なサイコロと同様に $\frac{1}{6}$ なのかどうかを考察する。

2 予習問題

予習はない。代わりに実験標準偏差と不確かさについての説明をしよう。
標準偏差については高校範囲であるから読者もよく知っていることと思う。しかしこの物理学実験及び多くの実験や調査で用いられるのは不偏標準偏差といわれるものであり、これが実験標準偏差である。異なる点は、普通平均を取るときには要素数で割ると思うが、不偏標準偏差では (要素数 -1) で割る点である。式にすれば以下の通りだ。

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

ただし $\bar{x}$ は n 個のデータの平均である。さて、これを使いやすい形に少し変形してみよう。

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \\ &= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2\right)}{n-1}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\bar{x}^2}{n-1}} \\
&= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\cdot n\bar{x} + n\bar{x}^2}{n-1}} \\
&= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}} \\
&= \sqrt{\frac{n}{n-1}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2\right)}
\end{aligned}
$$

このように受験の時によく使われる分散の出し方「二乗の平均ー平均の二乗」に $\frac{n}{n-1}$ をかけてやることで不偏分散及びその正の平方根をとって不偏標準偏差が求められる。

不確かさとは計測の時の機器の限界だったり統計的な不確かさといったものがあげられる。多分これについてはガイダンスの時によくよく説明してくれるしぶっちゃけ用語とかどうでもいいのでここでは取り上げない。ここでは不確かさの表記について書いておく。例えばデータの個数が $n = 8$、データの平均値が $\bar{x} = 6.5393$、実験標準偏差が $\sigma = 0.064643$ と得られたとしよう。このデータの平均値の不確かさを評価して結果としたい。手順は以下の通りである

1. 実験標準偏差をデータの個数の平方根で割る。

$$\mu = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0.064643}{\sqrt{8}} = 0.02286$$

2. μ を有効数字一桁に直す。

$$0.02286 \longrightarrow 0.02$$

3. 平均値の桁を μ に揃える。

$$6.5393 \longrightarrow 6.54$$

4. 平均値 $\pm\mu$ とかく。

$$6.54 \pm 0.02$$

これだけである。ちなみに最後の書き方は 6.54(2) としても良い。
実は後ひとつ追加ルールとして $\mu = 0.01$ などと最後の桁が 1 になった時には有効数字をもう一桁とって $\mu = 0.010$ とする決まりがあったりする。ちなみに一般的にはこの不確かさは二桁取るのが普通だが基礎物理実験学では一桁で統一する決まりになっていることに注意しよう。
考察等で不確かさを含む値について参考値などとの整合性を考える時には 2σ 区間と言って $\pm$ の後の数字を二倍した区間に入っているかどうかで判定したりする。(例でいうと 6.50 から 6.58 の区間に参考値など比べたいデータが入っているかどうかということである。) これは基礎統計でいうところの 95% 信頼区間というものに関係するのだが詳しいところは基礎統計の授業に任せることにしよう。ここで駄文を参考にするより教科書を

ちゃんと読んだ方がいいぞ。参考になりそうな PDF への URL[*1]も用意しておく。とりあえず二倍した範囲に入って入れば OK ということさえ知って入れば十分だ。

3 実験の Point

前に出た目が次の目に影響しないようにするため、容器の上面に三回ほど当てて振ると良い。この実験はただひたすらサイコロを振るだけなので実験中ほとんど考えることがない。ひたすら振ろう。

4 課題と質問

1. 与えられた式を $V = abc$ で割ればすぐに出る。およそ 3%。

2. ガイダンス時に配られたであろう講義資料に長々と単位の歴史について書かれているからこれを参考にすれば良いであろう。簡単にまとめると、精度よく測れるようになって計測し直したら値がずれていました、なんてことが起きると混乱が起きるからなどと言ったことがかければ良い。

3. これについてはガイダンス資料にものっているし、実験 10 で行うのでそこを参考にするように。1 メートルは 1% ほど短くなる。

4. 教科書 p26,27 より $\mu = Mp, \sigma = \sqrt{Mp(1-p)}$ である。代入すると $\mu = 50, \sigma = 5$。$N = 45$ については σ 区間に入っていることから十分高い確率でそのような結果が得られると言える。$N = 65$ については 2σ 区間にも入っていないことからそのような結果が得られる確率は十分低いと言える。

5. 正の相関があるときは教科書 (22) 式は使えない。参考 PDF で相関がある場合について書かれているのでそこを見ると良いだろう。式としては
$$\frac{\Delta V}{V} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{\Delta a \Delta b}{ab} + \frac{\Delta b \Delta c}{bc} + \frac{\Delta c \Delta a}{ca}\right)}$$
になる。これより不確かさは 3%。
相関がないとき、先の根号内第四項は打ち消しあうはずなので、
$$\frac{\Delta V}{V} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{c}\right)^2}$$
で与えられ、不確かさは 1.7%。

5 考察

この実験の考察が必要かどうかは議論が分かれている。なぜなら実験結果について教官

[*1] `https://unit.aist.go.jp/mcml/rg-mi/uncertainty/docs2/IntroductionToUncertainty.pdf`

が考察を話してしまうからである。筆者は配られたデータシートをノートに貼り付けて終わりにした。(面倒なので)

実験結果をまとめてみると、目によってでる確率が違うように見て取れる。これらが有意な差なのかは基礎統計で勉強するようなことをすれば確かめられるが、まあ棒グラフを見れば明らかかって感じでもある。考察をわざわざ書こうと思ったらこのチェックをして見れば良いのではないだろうか。提案だけしてこの章を終える。

実験 2

オシロスコープ

1 概要

オシロスコープの使い方を学ぶついでに波の特徴について調べるという実験。実験 2,3,4 は連続しておりここで学んだオシロスコープを使って実験 3 は進んでいくことになる。わざわざ教科書で戻って確認するのは面倒なので基本的な操作はこの実験で覚えてしまおう。

2 予習問題

今回はオシロスコープの使い方を学ぶだけなので予習問題は存在しない。

3 実験の Point

声の波形をスケッチするときには絶対に「あ」の波形をまっ先に写してはいけない。人にもよるが「あ」の波形はとても乱高下が大きい。筆者としては「お」や「う」をオススメしたい。ちょうどいい感じに「う」を発音するとほとんどサインカーブになり、とても写しやすい。ただ二種類以上取るとしたら「あ」の波形も取っておくと考察が書きやすいだろう。

4 課題と質問

予習問題と同様で今回はない。

5 考察

もし二種類以上の母音を記録したのであれば、母音の波形の違いについての考察すると良いかもしれない。下記の web サイト[*1]を参考にすると良いかもしれない。参考文献を用いるのであれば、ノートにその本のタイトルやサイトの url を共に明記しておこう。

この章での考察の例として最小二乗法および不確かさの伝播則について取り上げよう。この 2 つは実験をする上で重要な事柄であり、教科書でも後ろの付録や冒頭の測定量の取り扱いで詳しく説明されている。教科書の該当ページを参照しながら読んでほしい。

[*1] http://www.geocities.jp/myonsei/boin_aiueo.html

実験 C7 ではグラフ用紙にプロットした点から直感的に線を引きその傾き (正確には傾きの逆数、cot) からパルスの伝播速度を求めた。この処理をより適切に行うために最小二乗法を活用する。最小二乗法は一口に言ってしまえば、測定値と最確値との差の二乗の和が最小になるようにプロットされた点が従うであろう曲線を導出する方法である。ここで期待されるグラフは Δt を時間差、l をケーブル長とすると一次関数 $\Delta t = kl + \Delta t_0$ なので教科書 G.1 での式 (30) を用いる。教科書においてそれぞれの変数は $t \longrightarrow l, R \longrightarrow \Delta t, R_0 \longrightarrow \Delta t, k$ のように対応する。

$$k = \frac{\left(\sum l_i\right)\left(\sum \Delta t_i\right) - n\left(\sum l_i \Delta t_i\right)}{\left(\sum l_i\right)^2 - n\sum l_i^2}$$

これに実験値を代入することで実測値 $c' = \dfrac{1}{k}$ を得る。

次にこの値の不確かさを不確かさの伝播則を用いて算出する。以下の考察は下記[*2]の PDF を参考にした。不確かさの伝播則とは、教科書序章「測定量の扱い方」にもあるように、ある実験値 $x, y, z, \cdots$ に対して求めたいもの ω が $\omega = f(x, y, z, \cdots)$ と与えられる時、不確かさ $\Delta\omega$ が以下のように与えられることである。

$$\Delta\omega = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 (\Delta y)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 (\Delta z)^2 + \cdots}$$

また、参考 PDF より $\sigma_k = \sigma_t \sqrt{\dfrac{n}{n\sum l_i^2 - \left(\sum l_i\right)^2}}$ と相対不確かさ $\sigma_k = \dfrac{\Delta k}{k}$ が表わせる。(ここで不確かさ Δt と時間差 (計測値)Δt が分かりずらくなってしまったのは申し訳ない...)。不確かさの伝播則をさらに用いて $c' = \dfrac{1}{k}$ より、

$$\sigma_{c'} = \sqrt{\left(-\sigma_k\right)^2} = \sigma_k$$

が導ける。これは先の不確かさの伝播則よりも教科書 P.16 の式 (22) に代入すればすぐにわかる。これで測定した値 $c' \pm \sigma_{c'}$ がわかった。$c' \pm 2\sigma_{c'}$ の区間に理論値 1.99×10^8m/s が入っているだろうか？

これは読者の測定結果によるから一概には言えないがおそらく $2\sigma_{c'}$ 区間には入っていないだろう。これはケーブル長の方にも不確かさがあることが原因となっていると考えられる。先ほどの不確かさの式はケーブル長が正確だと仮定し、時間差の不確かさによってケーブル中の光の速度の不確かさを見積もっていた。ケーブル長の不確かさが時間差の不確かさよりも十分小さいと言えなければ先の式は成り立たないが、実際はそんなことはいえないのではないか？実験を振り返ってみよう。オシロスコープに繋げるのに T 字コネクタを用いたりケーブルを長くするために I 字コネクタを用いたのではないだろうか。これらによって延長される長さが 1cm だとすると相対不確かさは 0.01 となる。もし時間差の不確かさよりもケーブル長の不確かさが十分大きければ先の縦横軸を入れ替えれば適切に見積もれそうである。そうでない場合は 2 つともの不確かさを考慮する必要があり、計算は相当複雑になるだろう。

[*2] http://www.cc.u-ryukyu.ac.jp/~fukami/p0.pdf

実験 3

交流回路の特性

1 概要

実験 2 で使い方を学んだオシロスコープを用いて交流回路 (直列共振回路と高域透過フィルター回路) の特徴を確かめる実験。オシロスコープの使い方を実験 2 でちゃんと覚えているとサクサク進むが実験 A(直列共振回路) の方には応用課題があり、4 限終了までみっちりやる事になる。

2 予習問題

1. 直列共振回路において共振周波数、共振幅、Q 値を求める。
   $L = 10\mathrm{mH}$、$C = 0.001\mu\mathrm{F}$、$R = 1\mathrm{k}\Omega$ だが、コイルの抵抗があるので $R = 1050\Omega$ を各式に代入したものが解になる。

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 5.03 \times 10^4\,\mathrm{Hz}$$
$$f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L} = 1.7 \times 10^4\,\mathrm{Hz}$$
$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 3.0$$

2. 時間の単位を作り出すだけの問題。
   $RL, \frac{C}{L}, \sqrt{LC}$ が基本の 3 つになる。作ろうと思えばいくらでも作れるのでこれらが書いてあれば十分だろう。

3 実験の Point

注意する点としてはこの実験については教科書に誤植がたくさんある事である (第五版第 1 刷現在)。正誤表が配られたら先に全ページ直しておくお k とをオススメする。さらにこの実験では片対数グラフ用紙が必要になる。この実験くらいでしか片対数グラフ用紙は使わないのでクラスで買っておくといいだろう。周波数と測定値の記録は教科書にある表 1 が印刷して配られるので事前に表をかく必要はない。

4 課題と質問

1. (a)f_1 から f_2 の範囲を答えれば良いだろう。
   (b) 線形微分方程式なのでそれぞれの信号について (a) で求めた範囲と照らし合わせ、投下するかどうかを考える。A7 の結果通り、250Hz の信号は透過せず削除される。
2. (a) 周波数の奇数倍の信号が回路に加わる。
   (b) 上と同様に考えて、50kHz の信号のみが透過し、それ以外は削除される。つまり単位つの正弦波が現れる。

5 考察

物理実験のシケプリとして期待されることとして考察が何パターンか書いてあることが挙げられるだろうが、書くのが面倒になってきてしまった。本当に申し訳ない。化学実験で代々使われている「とある化学の基礎実験 (くそじっけん)」のような超優秀なシケプリには到底なりそうもない。このシケプリを作成していてあれを作った凄さがとてもよくわかるようになった。

さて懺悔していても成績には繋がらないのでとりあえず筆者がどんな考察を書いたのかだけ概要を説明する。なおこの全文を載せないわけはあまりにクソな考察になってしまったからであり、読者は教科書にある考察のヒントを存分に活用すべきである。この考察のヒントには小学生の自由研究にでもありそうな簡単なことから説明するのがめんどくさいものまで色々なレベルが存在しているので、自分の持ち合わせている時間に合わせて選ぼう。

さて、筆者の書いた考察の目標は「実験 A9 で、減衰時間を求めるために振幅が初期の $\frac{1}{e}$ になる時間を使うが、これを正確に測ろうとするために振動のピーク値をとるときが該当時間になるようなコンデンサーの電気容量を選択する」である。なんでこんなことをしたのか今となっては当時の自分に聞いてみたいが、このようなよくわからないことを書いていても考察としては認められるので放っておこう。減衰振動は振幅が常に減衰し続けるので、ピーク値を読み取っただけでは減衰の離散的な様子しかわからない。これを目分量で補完して実験 A9 では振幅 $\frac{1}{e}$ となる時間を求めるわけだがオシロスコープに減衰する曲線を書き込むことができないのでかなり曖昧な判定になる。実際筆者の実験では理論値と 5.0μs の誤差が生まれてしまった。そこで理論的な減衰振動曲線をコンデンサーの電気容量の関数として求め、振幅 $\frac{1}{e}$ となる時間に振動がピーク値をとるような電気容量の候補を見つけだした。

なにを書いているんだ？と思っただろう。説明力の NASAofNASA だ。筆者の考察はかなり式を解くのが面倒なので全くオススメしないが、この「誤差が大きくなってしまう原因を考える」というだけでも考察になるであろうから参考にしていただけたら幸いである。

実験 4

減衰振動・強制振動

1　概要

パソコンに全てをお願いする実験。実際は音叉にコイルを用いて振動を与えて、音叉の振動を計測しているのだが全ての工程をパソコンでやっているのでこれらの器具に手をつけることはない (逆に触ってはいけない)。実験教官によると、教科書に書かれている方法ではうまく測ることができずパソコンで色々な工夫がなされているそうだが、この内容を我々が知ることはない。この部分を考察してもよいであろう。ともかくこの実験はパソコンの数値を動かして値を読み取ることしかしないのでものすごく早く終わる。

2　予習問題

予習問題はない。

3　実験の Point

マイク信号の振幅の最大値や位相差の絶対値はグラフを読み取らずとも表示されているので簡単。位相差の符号についてはグラフから読み取るしかなく、これはマイク側の信号が駆動振動よりも左側に位相がずれていれば (マイク側が早く振動していれば) 位相差は正になる。

4　課題と質問

●　参考課題 1

これは実験すると確かめられる。ずっと装置を on にしていると固有振動数が大きくなるはずである。これにより計測し続けることで f_2 の値が大きく測定され Δf_r は過大評価され、減衰率が過大評価される。

●　参考課題 2

音叉の振動は速度を表しているので実験結果よりブランコの速度がもっとも早くなる最下点で押してあげると、強制振動と速度の振動が同位相になり、もっとも適する。

5　考察

実験 3 でも書いたが面倒になってしまった。これは筆者が受けた実験の順番が

1,9,10,11,2,3,4 なのが原因なのだが、そんなことは読者の方々にはどうでも良いであろう。

さて筆者は参考問題 1 を参考にして音叉の温度上昇による影響をできるだけ小さくして音叉の特徴を調べるときにはどうすれば良いのかということを書いた。まあつまり、参考問題 1 とほとんど一緒のことを書いてしまった、ということだ。進振り戦争を戦っていく点数の亡者にとってこの行為はほとほと愛想をつかすことであろう。

さっさと考察のアイデアの 1 つでも出しやがれ！といった声が聞こえてきそうだ。自分でもしていない考察について口を出すのは大変恐縮ではあるが幾つか出しておこう。まず冒頭の概要でも書いた完全ブラックボックスになっている工夫についての考察だ。これは教員がぽろっといったことなのでどれくらいすごい工夫がなされているのか知らないし、本当にあるのかも考えていないのでわからないが、一番教員ウケしやすそうなネタではある。

２つ目は参考問題 2 に書かれている「今回の測定結果に基づいて」という箇所についてだ。わざわざアンダーラインが引かれているあたり何か訳ありそうだ。そもそもブランコを押してあげるときは速度ゼロの時に押してあげるのが普通じゃないか？参考課題 2 を書いているときにとても違和感がありまくりだったので誰かこの辺のことについてちゃんと考えてこのシケプリを修正してください。お願いします。

上の２つ目に関連して、外力ではなく一人で漕ぐときどうやって漕ぐべきか、またどのようにしてブランコは漕がれているのかを考えるのも楽しそうである。これは参考になりそうなサイトの url[*1] をつけておく。

[*1] http://www008.upp.so-net.ne.jp/takemoto/buranko.htm

実験 9

剛体の力学

1 概要

変形を十分無視出来る物体の運動が剛体の運動方程式に従うことをたしかめる実験。剛体の運動方程式によれば加速度は物体の加速度は材質つまり密度によらず、半径 a と回転半径 k をもちいて $\dfrac{1}{1+(k/a)^2}$ と表わせる。回転半径とはその物体角部分の回転軸の距離からの実効的な平均値を与えていて、この値が大きいほど回転軸からの距離が大きいのでモーメントは大きくなり早く回転する。

2 予習問題

(1) 各回転体の加速度を求める。そのためにモーメントの式から回転半径を導き出す。

1. 中身の詰まった円柱の回転半径は $a\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ なので、$\dfrac{1}{1+(k/a)^2} = \dfrac{2}{3}$
2. 無限小の厚みであるパイプの回転半径は a なので、$\dfrac{1}{1+(k/a)^2} = \dfrac{1}{2}$
3. 球の回転半径は $a\sqrt{\dfrac{3}{5}}$ なので、$\dfrac{1}{1+(k/a)^2} = \dfrac{5}{8}$

よって加速度の大きさを比較すると、球 $>$ 円柱 $>$ パイプとなる。

3 実験の Point

測定自体はすぐに終わる。ただそのあとの値処理が面倒臭い。足し算と引き算の練習なので常識的な東大生ならば 3 時までには帰れるだろう。使った斜面の角度を記録しておくのを忘れないように。ちなみに『理科年表 2018 年度版 種々の緯度に対する重力の正規値 1980 年重力式による計測*1』によると緯度 36° での重力加速度は 9.79819198m/s^2 である。

4 課題と質問

今回は課題も質問も無〜し。

*1 http://www.rikanenpyo.jp/member/?module=Member&p=Contents%26page%3DMS1catE%3AE%5EContents%26page%3D1_cGEx11x1650_2018_1%3Aco&action=Contents&page=1_cGEx11x1650_2018_1

5 考察

1

基本的に以下のような方針をとれば球よりは速く回転する。

1. 質量が回転軸に偏っている。
2. 回転に関与しない所に質量が偏っている。

質量が回転軸によっている例では、円錐を 2 つあわせたそろばんの玉の形や鉄心の両端に薄い円盤がくっついた形が挙げられる。次の回転に関与しない所に質量が偏っている例は考察 2 で出てくる中身が液体の物体を考えれば良い。
これらを考慮してものすごく回る回転体を作ろうとすると、軽いプラスチック (PET など) で両端に円盤がくっついた筒を作ってその中を水銀で満たすなどすれば良いであろう。

2

中が液体の缶と凍らせて中身が固体となった缶では、中身が液体の缶の方が早く斜面をすべり下りる。この理由について考察してゆく。
まず中身が凍っている時を考える。中身の密度を ρ_{con}、缶の密度 (アルミニウム) を ρ_{can} とする。缶の厚みを δ として缶の外径を a、高さを l とすれば運動方程式は以下のようになる。

$$\begin{cases} \pi l \left((a-\delta)^2\rho_{con} + \left(a^2-(a-\delta)^2\right)\rho_{can}\right)\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\ \qquad = \pi l \left((a-\delta)^2\rho_{con} + \left(a^2-(a-\delta)^2\right)\rho_{can}\right) g\sin\theta - F \\ I_z\dfrac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} = aF \\ a\phi = x \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \pi l \left((a-\delta)^2\rho_{con} + \left(a^2-(a-\delta)^2\right)\rho_{can}\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = \pi l \left((a-\delta)^2\rho_{con} + \left(a^2-(a-\delta)^2\right)\rho_{can}\right) g\sin\theta - \frac{I_z}{a^2}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

ここで I_z について考えると

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{\pi l(a-\delta)^2\rho_{con}(a-\delta)^2}{2} + \frac{\pi l(a^2-(a-\delta)^2)\rho_{can}\left((a-\delta)^2+a^2\right)}{2} \\ &= \frac{\pi l((a-\delta)^4\rho_{con} + (a^4-(a-\delta)^4)\rho_{can})}{2} \end{aligned}$$

なのでこれを代入して、

$$\pi l\left((a-\delta)^2\left(\rho_{con}\left(1+\frac{(a-\delta)^2}{2a^2}\right)-\rho_{can}\left(1+\frac{(a-\delta)^2}{2a^2}\right)\right)+\frac{3}{2}a^2\rho_{can}\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$
$$=\pi l\left((a-\delta)^2\rho_{con}+\left(a^2-(a-\delta)^2\right)\rho_{can}\right)g\sin\theta$$

$$\longrightarrow\pi la^2\left(\left(1-\frac{2\delta}{a}\right)\left(\rho_{con}\left(\frac{3}{2}-\frac{\delta}{a}\right)-\rho_{can}\left(\frac{3}{2}-\frac{\delta}{a}\right)\right)+\frac{3}{2}\rho_{can}\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$
$$=\pi l\left(\left(1-\frac{2\delta}{a}\right)\rho_{con}+\frac{2\delta}{a}\rho_{can}\right)ga^2\sin\theta \qquad (a\gg\delta)$$

$$\longrightarrow\pi la^2\left(\left(\frac{3}{2}-\frac{4\delta}{a}\right)\rho_{con}+\frac{4\delta}{a}\rho_{can}\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$
$$=\pi l\left(\left(1-\frac{2\delta}{a}\right)\rho_{con}+\frac{2\delta}{a}\rho_{can}\right)ga^2\sin\theta \qquad \left(\frac{\delta}{a}\text{ の二乗項を無視}\right)$$

$$\Longleftrightarrow\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\left(\left(1-\frac{2\delta}{a}\right)\rho_{con}+\frac{2\delta}{a}\rho_{can}\right)}{\left(\left(\frac{3}{2}-\frac{4\delta}{a}\right)\rho_{con}+\frac{4\delta}{a}\rho_{can}\right)}g\sin\theta$$

次に、中身が液体のままの時を考える。この時中身は回転しないと考えられるので、運動方程式はそのままに、I_z の値だけを変えれば良い。外身の缶だけのモーメントだから、

$$I_z=\frac{\pi l(a^2-(a-\delta)^2)\rho_{can}\left((a-\delta)^2+a^2\right)}{2}$$

これを運動方程式に代入して、

$$\pi l\left((a-\delta)^2\left(\rho_{con}-\rho_{can}\left(1+\frac{(a-\delta)^2}{2a^2}\right)\right)+\frac{3}{2}a^2\rho_{can}\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$
$$=\pi l\left((a-\delta)^2\rho_{con}+\left(a^2-(a-\delta)^2\right)\rho_{can}\right)g\sin\theta$$

$$\longrightarrow\pi la^2\left(\left(1-\frac{2\delta}{a}\right)\left(\rho_{con}-\rho_{can}\left(\frac{3}{2}-\frac{\delta}{a}\right)\right)+\frac{3}{2}\rho_{can}\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$
$$=\pi l\left(\left(1-\frac{2\delta}{a}\right)\rho_{con}+\frac{2\delta}{a}\rho_{can}\right)ga^2\sin\theta \quad (a\gg\delta)$$

$$\longrightarrow\pi la^2\left(\left(1-\frac{2\delta}{a}\right)\rho_{con}+\frac{4\delta}{a}\rho_{can}\right)\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$
$$=\pi l\left(\left(1-\frac{2\delta}{a}\right)\rho_{con}+\frac{2\delta}{a}\rho_{can}\right)ga^2\sin\theta \quad \left(\frac{\delta}{a}\text{ の二乗項を無視}\right)$$

$$\Longleftrightarrow\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\left(\left(1-\frac{2\delta}{a}\right)\rho_{con}+\frac{2\delta}{a}\rho_{can}\right)}{\left(\left(1-\frac{2\delta}{a}\right)\rho_{con}+\frac{4\delta}{a}\rho_{can}\right)}g\sin\theta$$

よって、$\left(\frac{3}{2}-\frac{4\delta}{a}\right)\rho_{con} > \left(1-\frac{2\delta}{a}\right)\rho_{con}$ だから、$\frac{\left(\left(1-\frac{2\delta}{a}\right)\rho_{con}+\frac{2\delta}{a}\rho_{can}\right)}{\left(\left(\frac{3}{2}-\frac{4\delta}{a}\right)\rho_{con}+\frac{4\delta}{a}\rho_{can}\right)} < \frac{\left(\left(1-\frac{2\delta}{a}\right)\rho_{con}+\frac{2\delta}{a}\rho_{can}\right)}{\left(\left(1-\frac{2\delta}{a}\right)\rho_{con}+\frac{4\delta}{a}\rho_{can}\right)}$ となり、中身が液体のままの缶の方が早く回ることがわかる。
実際に適当な値を代入して計算してみると、$l=0.1\mathrm{m}, a=0.03\mathrm{m}, \delta=0.0001\mathrm{m}, \rho_{con}=$

$1.0 \times 10^3 \mathrm{kg/m}^3, \rho_{can} = 2.7 \times 10^3 \mathrm{kg/m}^3$ として、

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\left(1-\frac{2\delta}{a}\right)\rho_{con}+\frac{2\delta}{a}\rho_{can}\right)}{\left(\left(\frac{3}{2}-\frac{4\delta}{a}\right)\rho_{con}+\frac{4\delta}{a}\rho_{can}\right)} &= \frac{\left(\left(1-\frac{2\cdot 0.0001}{0.03}\right)\cdot 1.0\times 10^3+\frac{2\cdot 0.0001}{0.03}\cdot 2.7\times 10^3\right)}{\left(\left(\frac{3}{2}-\frac{4\cdot 0.0001}{0.03}\right)\cdot 1.0\times 10^3+\frac{4\cdot 0.0001}{0.03}\cdot 2.7\times 10^3\right)} \\
&= 0.664
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\left(1-\frac{2\delta}{a}\right)\rho_{con}+\frac{2\delta}{a}\rho_{can}\right)}{\left(\left(1-\frac{2\delta}{a}\right)\rho_{con}+\frac{4\delta}{a}\rho_{can}\right)} &= \frac{\left(\left(1-\frac{2\cdot 0.0001}{0.03}\right)\cdot 1.0\times 10^3+\frac{2\cdot 0.0001}{0.03}\cdot 2.7\times 10^3\right)}{\left(\left(1-\frac{2\cdot 0.0001}{0.03}\right)\cdot 1.0\times 10^3+\frac{4\cdot 0.0001}{0.03}\cdot 2.7\times 10^3\right)} \\
&= 0.983
\end{aligned}$$

よって回転体の加速度 g' および 0.5m 転がした時にかかる時間は、$g = 9.80, \theta = 4.85°$ として

$$\begin{aligned}
g'_{liquid} &= 0.664 \cdot 9.80 \cdot \sin 4.85° \\
&= 0.550\,\mathrm{m/s}^2 \\
t_{liquid} &= \sqrt{\frac{2\cdot 0.5}{0.550}} \\
&= 1.35\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'_{frozen} &= 0.983 \cdot 9.80 \cdot \sin 4.85° \\
&= 0.815\,\mathrm{m/s}^2 \\
t_{frozen} &= \sqrt{\frac{2\cdot 0.5}{0.813}} \\
&= 1.11\,\mathrm{s}
\end{aligned}$$

となる。これは実験値と大体一致している (はず)。よって液体部分が回転していないと考えると、中身が液体の缶の方が速く斜面をすべり下りる理由をよく説明できる。

実験 10

ケーターの可逆振り子

1　概要

重力加速度を求める実験である。理想的な振り子とは違い、実体がある単振り子ではその重心及びモーメントを求めるのが難しい。そこでケーターの可逆振り子ではこれらの要素を測定しなくとも重力加速度が求められる工夫がなされている。実験内容は一方の振り子が 10 周期する時間をストップウォッチで 8 回測り、次に振り子をひっくり返して同じことをする。重りは二箇所についていて一方は固定されているがもう一方は可動式である。この可動式の重りを計 4 箇所に動かし上述の測定を行い、振り子をひっくり返しても変わらないような 10 周期分の時間を計算及びグラフから求め、重力加速度まで算出する。詳しい原理は予習問題で解説する。

2　予習問題

1. $I = I_G + Mh^2$ を示せ。
   これは平行軸の定理と呼ばれるもので一年の必修で導出は習ったかと思う。ある密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ の物体についてモーメント I 考えると、

$$
\begin{aligned}
I &= \int (x^2 + y^2)\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V \\
&= \int (((x' + x_G)^2 + (y' + x_G)^2)\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V \\
&= \int ((x'^2 + y'^2)\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V + 2\underline{\int (x' x_G + y' y_G)\rho(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V} + (x_G^2 + y_G^2)\int \rho \mathrm{d}V \\
&= I_G + Md^2
\end{aligned}
$$

   下線部はゼロになる。これは以下から示される。

$$
\begin{aligned}
\vec{R_G} &= \frac{\sum m_i \vec{r_i}}{M} \\
&= \frac{1}{M}\sum m_i \vec{R_G} + \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r_i'} \quad (\vec{r_i} = \vec{R_G} + \vec{r_i'}\text{を代入}) \\
&\therefore \sum m_i \vec{r_i} = 0
\end{aligned}
$$

   以上で平行軸の定理は示された。

2. $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{L_{AB}}{g}}$ を示せ。

これは教科書の (8)(9) 式 $T_X = 2\pi\sqrt{\dfrac{\frac{I_G}{M}+h_X^2}{gh_X}}$ を変形し、I_G を消去するだけで得られる。

$\dfrac{I_G}{M} = \left(\dfrac{T_0}{2\pi}\right)^2 gh_A - h_A^2$ より

$$\begin{aligned}
\left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 &= \frac{\left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 gh_A - h_A^2 + h_B^2}{gh_B} \\
\left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2\left(1-\frac{h_A}{h_B}\right) &= \frac{-h_A^2+h_B^2}{gh_B} \\
\therefore \quad T_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{h_A+h_B}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{L_{AB}}{g}}
\end{aligned}$$

3 実験の Point

計測するときには必ずステンレス棒が抜かれているかどうか確認するべきである。このステンレス棒一本で周期は変わってしまう。筆者はこれで計 8 回分計測のし直しに迫られた。さらに考察で使うために計測前及び後の振幅、そして 100 周期分の時間も測っておくと良いだろう。

4 課題と質問

質問 1

理想的な単振り子の長さを求めてみよう。$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ を l について解いて、$l = \dfrac{T^2 g}{4\pi}$

これに実験で求めた値を代入すれば良い。不確かさについては $\Delta l = l\sqrt{\left(\dfrac{\Delta T}{T}\right)^2} = l\left(\dfrac{\Delta T}{T}\right)$ で求められる。

これは教科書中にも書いてあったように 1m に近い値になる。

5 考察

ここでは 9.3 にあるエネルギー散逸について取り上げる。

徐々に振り子の揺れが小さくなる現象は、回転軸周りの摩擦や空気抵抗によりエネルギーが失われていることが原因である。これはエネルギー散逸と一般に呼ばれる現象でこの振り子の例では粘性減衰とも呼ばれる。

粘性減衰係数を γ とすると粘性減衰力を角速度に比例する形で $f = \gamma\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}$ と表すことにしよう。この粘性減衰についてはまだわかっていないことが多くこの形で置くのは単にだいたい一致しててかつ解きやすいからである。さてこれで運動方程式は以下のようになった。

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} + \frac{Mgh}{I}\phi = 0$$

この式を解く方法としてはラプラス変換を用いる方法が一番スッキリしていると思うのだ

が駒場生の多くはまだラプラス変換をやっていないだろうから解の推定をおこなって解く方法を取ろうと思う。しかし二階微分方程式はおそらく力学もしくは振動波動論でやっていることからあまり詳しくは書かないで置く。詳しくはそちらの教科書を参照されたい。そこでこの方程式の概略について述べる。$\phi = Ae^{\lambda t}$ と置き、微分方程式に代入。そして出てきた二次方程式を解いたのち解の重ね合わせの原理から $\phi = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t}cos(\omega t + \alpha)$ が求まる。ただし、$\omega = \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \frac{Mgh}{I}}$ である。

さて次に極大極小をとる t を求めよう。そのために ϕ を微分する。

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= -\frac{a\gamma}{2}e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega t + \alpha) - a\omega e^{-\frac{\gamma}{2}}\cos(\omega t + \alpha) \\
&= -ae^{-\frac{\gamma}{2}}\left(\frac{\gamma}{2}\cos(\omega t + \alpha) + \omega\sin(\omega t + \alpha)\right) \\
&= -ae^{-\frac{\gamma}{2}}\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \omega\sin(\omega t + \alpha + \beta)} \qquad \left(\tan\beta = \frac{\omega}{\gamma^2/4}\right)
\end{aligned}$$

ここで初期条件として $t = 0$ の時極大から振り子をスタートさせたとすると $\alpha + \beta = m\pi$ である。よって極大極小の条件として $t = n\frac{\pi}{\omega} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$ を得る。

次は一周期ごとにどれほど振幅が変わるのかを見積もる。N 回目の極大値と $N+1$ 回目の極大値の振幅をそれぞれ求めると、

$$|A_N| = |A|\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{2N\pi}{\omega}\right)|\cos\alpha|, \qquad |A_{N+1}| = |A|\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{2(N+1)\pi}{\omega}\right)|\cos\alpha|$$

であるから一周期分の振幅変化 $|\Delta A|$ は、

$$\begin{aligned}
\Delta A &= |A|\exp\left(-\frac{\gamma N\pi}{\omega}\right)|\cos\alpha|\left(1 - \exp\left(-\frac{\gamma\pi}{\omega}\right)\right) \\
&= |A|\exp\left(-\frac{\gamma N\pi}{\omega}\right)|\cos\alpha|\left(1 - \left(1 - \frac{\gamma\pi}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma\pi}{\omega}\right)^2 + \cdots\right)\right) \\
&\approx \frac{\gamma\pi}{\omega}|A_N|
\end{aligned}$$

よって $|A_N| - |A_{N+1}| = \frac{\gamma\pi}{\omega}|A_N|$ から $|A_n| = \left(1 - \frac{\gamma\pi}{\omega}\right)^{n-1}|A_0|$ と求まる。
さらに $T = \frac{2\pi}{\omega}$ なので $|A_n| = \left(1 - \frac{\gamma}{2}T\right)^{n-1}|A_0|$。この式から γ を見積もることができる。

最後に予習問題 2 と同様に計算して T_0 を γ も用いて表してみよう。

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\left(\frac{Mgh}{I} - \frac{\gamma^2}{4}\right)^{-1/2} = 2\pi\left(\frac{Mgh}{I_G + Mh^2} - \frac{\gamma^2}{4}\right)^{-1/2}$$

より

$$T_A = 2\pi\left(\frac{Mgh_A}{I_G + Mh_A^2} - \frac{\gamma^2}{4}\right)^{-1/2} \Longleftrightarrow \frac{I_G}{M} = \left\{\left(\frac{2\pi}{T_A} + \frac{\gamma^2}{4}\right)\right\}^{-1} gh_A - h_A^2$$

$$\left(\frac{2\pi}{T_B}\right)^2+\frac{\gamma^2}{4}=\frac{Mgh_B}{M\left\{\left(\frac{2\pi}{T_A}\right)^2+\frac{\gamma^2}{4}\right\}^{-1}gh_A-M(h_A^2-h_B^2)}$$

ここで $T_A=T_B=T_0$ として $\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2+\frac{\gamma^2}{4}=S$ と置くと、

$$S=\frac{Sgh_B}{gh_A-S(h_A^2-h_B^2)}\Longleftrightarrow S=\frac{g}{h_A+h_B}$$

となるから、

$$\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2=\frac{g}{LAB}-\frac{\gamma^2}{4}\Longleftrightarrow T_0=2\pi\left(\frac{g}{L_{AB}}-\frac{\gamma^2}{4}\right)^{-1/2}\approx 2\pi\sqrt{\frac{L_{AB}}{g}}\left(1+\frac{L_{AB}}{g}\frac{\gamma^2}{8}\right)$$

よって $\left(\frac{L_{AB}}{g}\right)^{3/2}\frac{\gamma^2\pi}{4}$ だけ周期が大きくなると概算できる。重力加速度について整理すると、

$$g=\frac{4\pi^2L_{AB}}{T_0^2}+\frac{\gamma^2L_{AB}}{4}$$

よって粘性抵抗を考慮しない場合、重力加速度は小さく計算されてしまう。この値はだいたい $0.001\mathrm{m/s^2}$ くらいなので実験で求めた値よりも正確な値を求める時は考慮する必要が出てくる。

実験 11

電磁力

1　概要

コンデンサの極板間及び電流を流した導線間に働く微小な力を電子天秤を用いて測定する。セッティングさえうまくできれば実験はうまくいくだろう。

2　予習問題

(1) 教科書の (13) 式 $F = \dfrac{\varepsilon_0 S}{2l^2}V^2$ に各値を代入すれば求まる。

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\mathrm{C}^2/(\mathrm{m}^2{\cdot}\mathrm{N})$$
$$S = 0.070^2\pi = 0.01539\mathrm{m}^2$$

よって距離 4mm の極板間に働く力は $4.258V^2$ N、4.2mm の極板間に働く力は $3.862V^2$ N なので 100V から 1000V までの力を表にすると以下の通り。

電圧 (V)	100	200	300	400	500
4mm	4.26×10^{-5}	1.70×10^{-4}	3.83×10^{-4}	6.81×10^{-4}	1.06×10^{-3}
4.2mm	3.86×10^{-5}	1.54×10^{-4}	3.48×10^{-4}	6.18×10^{-4}	9.66×10^{-4}
電圧 (V)	600	700	800	900	1000
4mm	1.53×10^{-3}	2.09×10^{-3}	2.73×10^{-3}	3.45×10^{-3}	4.26×10^{-3}
4.2mm	1.39×10^{-3}	1.89×10^{-3}	2.47×10^{-3}	3.13×10^{-3}	3.86×10^{-3}

(2) これも式 (15)$F = \dfrac{\mu_0 I_0 I' L}{2\pi r}$ に代入すれば良い。

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{Wb}/(\mathrm{A}{\cdot}\ \mathrm{N})$$

よって距離 4mm の導線間は $2.45 \times 10^{-5}I^2$ N、距離 5mm の導線間は $1.9 \times 10^{-5}I^2$ 距離 6mm の導線間は $1.5 \times 10^{-5}I^2$ N、なので 1A から 10A までの力を表にすると以下の通り。

電流 (A)	1	2	3	4	5
4mm	2×10^{-5}	9×10^{-5}	2.1×10^{-4}	3.8×10^{-4}	5.9×10^{-4}
5mm	2×10^{-5}	8×10^{-5}	1.7×10^{-4}	3.0×10^{-4}	4.7×10^{-4}
6mm	2×10^{-5}	6×10^{-5}	1.4×10^{-4}	2.5×10^{-4}	3.9×10^{-4}

電流 (A)	6	7	8	9	10
4mm	8.5×10^{-4}	1.15×10^{-3}	1.50×10^{-3}	1.90×10^{-3}	2.35×10^{-3}
5mm	6.8×10^{-4}	9.2×10^{-4}	1.20×10^{-3}	1.52×10^{-3}	1.88×10^{-3}
6mm	5.6×10^{-4}	7.7×10^{-4}	1.00×10^{-3}	1.27×10^{-3}	1.57×10^{-3}

(3) 右ねじの法則及びフレミングの左手の法則より明らか。
平行電流の時引力、反平行電流の時斥力が働く。

3 実験の Point

平行にするのがとても時間がかかる。しかし、そこさえできてしまえばすぐに終わる。
実験 A での計測のためしで使う極板間 1mm、500V での加わる力は -0.01704N。1.2mm では -0.01183N である。g に直すと、-1.7388g から -1.2071g。
実験 (B) では導線の太さを考慮するので実験値は距離 5mm の理論値に近い値になる。これについての考慮は単純に 4mm+0.5mm×2 としても良いし、場所によって磁束密度の値が変わることを考慮して積分しても同じ結果が得られる。

4 課題と質問

● 質問 1

コンデンサーのエネルギーは $E = \frac{1}{2}QV = 3.4 \times 10^{-5}$、電池のエネルギーは $E = EIt = 9288$ だから (秒で計算することに注意)

$$\frac{3.4 \times 10^{-5}}{9288} = 3.7 \times 10^{-8}\text{本}$$

● 質問 2

これはもう予習問題 3 のまんま。

5 考察

この考察が本シケプリ最後の考察になる。しかし、例によって面倒になってしまった。これを書いているのは 8/26、そう基礎実験から三ヶ月ほどたった夏休み真っ只中である。

夏休みとは程遠い世界で基礎実験に苦しんでいる君たちにいきなり夏休みという単語を出したの迂闊だった。ごめんな、すまんな、夏休みはいいぞ。

さて、とりあえず筆者の書いた考察を紹介だけしておく。行ったのは「地磁気の影響を実際に見積もり、国土地理院が出しているデータとの整合性をみる」ということだ。KOMCEE の建っている方角と地磁気方向、および KOMCEE がコンクリートでできていることによる地磁気の減衰を考慮し本当に地磁気だけが影響をもたらしていたのかを考えた。余談だが、確か KOMCEE だかどっかに MRI 装置があるはずである。これは後期

教養学部が有しているもので心理学実験の時に使われるようだ。MRI は強力な磁場を発生させるので、もしかしたらこれによる影響が少し出るかもしれない。まあ断定するのは非常に難しいであろうが。

以上でこのシケプリは終わりである。かなりヤケクソ気味に仕上げてしまったが少しでも役に立てば幸いである。皆が良い成績を取ることを祈っている。