数学II　1

・産業連関分析による動機

▷ 2種の産業 A_1、A_2 があり、A_1、A_2 における生産額を x_1、x_2 とする。
(生産額) = (中間需要) + (最終需要) であり、(中間需要) = (投入係数) × (生産額) である。この条件のもと、A_1 における A_1、A_2 の投入係数を a_{11}、a_{12}、A_2 における A_1、A_2 の投入係数を a_{21}、a_{22} とし、また A_1、A_2 の最終需要を d_1、d_2 とする。以上から以下が立式される。

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + d_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + d_2 \end{cases}$$

これを満たす非負の x_1、x_2 が存在する条件は何か？

・価格・利潤による動機

▷ 2種の製品 A_1、A_2 があり、その価格を x_1、x_2 とする。上記に倣って、A_1 への A_1、A_2 の投入係数を a_{11}、a_{12}、A_2 への A_1、A_2 の投入係数を a_{21}、a_{22} とする。ここで A_1、A_2 の利潤を p_1、p_2 とすると、各生産額は

$$\begin{cases} A_1 \cdots a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ A_2 \cdots a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \text{であるから} \begin{cases} p_1 = x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) \\ p_2 = x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \end{cases} \text{である。}$$

この時、非負定数 λ に対し、$p_1 = \lambda\cdot(A_1\text{の生産額})$、$p_2 = \lambda\cdot(A_2\text{の生産額})$ が成立するなら、どのような関係が存在しているのか？

$$\begin{cases} x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) = \lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) \\ x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = \lambda(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{\lambda+1}x_1 - (a_{11}x_1 + a_{12}x_2) = 0 \\ \frac{1}{\lambda+1}x_2 - (a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = 0 \end{cases}$$

では、投入係数が全て与えられたとして、どのような λ であれば、$x_1 \geqq 0$、$x_2 \geqq 0$、$x_1 + x_2 > 0$ を同時に満たす x_1、x_2 となるか？

以降 $\rho = \frac{1}{1+\lambda}$ とする。

$$\begin{cases} (\rho - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = 0 & \text{—①} \\ -a_{21}x_1 + (\rho - a_{22})x_2 = 0 & \text{—②} \end{cases}$$

であり、これらを調整することにより、

$$\begin{cases} \{(\rho - a_{11})(\rho - a_{22}) - a_{12}a_{21}\}x_1 = 0 & \text{—①}' \\ \{(\rho - a_{11})(\rho - a_{22}) - a_{12}a_{21}\}x_2 = 0 & \text{—②}' \end{cases}$$

となるから、①' + ②' より

$\{(\rho - a_{11})(\rho - a_{22}) - a_{12}a_{21}\}(x_1 + x_2) = 0$　$x_1 + x_2 > 0$ であるから、

$$(\rho - a_{11})(\rho - a_{22}) - a_{12}a_{21} = \rho^2 - (a_{11} + a_{22})\rho + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \quad \text{—③}$$

③に関する判別式 $D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \geqq 0$

ゆえに、③は実数解 ρ_+、ρ_- を必ず持つと分かる。

以降 ρ_+ を考える。

NO.

DATE

$$\rho_+ = \frac{a_{11}+a_{22}+\sqrt{D}}{2} = \frac{1}{2}\left(a_{11}+a_{22}+\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}a_{21}}\right)$$
$$\geqq \frac{1}{2}\left(a_{11}+a_{22}+\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(a_{11}+a_{22}+|a_{11}-a_{22}|\right)$$
$$= \begin{cases} a_{11} & (a_{11}\geqq a_{22}) \\ a_{22} & (a_{11}\leqq a_{22}) \end{cases} \left(=\max\{a_{11}, a_{22}\}\right)$$

ここで $\rho=\rho_+$ のとき、$x_1\geqq 0$、$x_2\geqq 0$、$x_1+x_2>0$ を同時に満たす解が存在することを示す。

(i) $\rho_+>a_{11}$ のとき、$x_2=1$ とすれば $x_1=\dfrac{a_{12}}{\rho_+-a_{11}}\geqq 0$

(ii) $\rho_+>a_{22}$ のとき、$x_1=1$ とすれば $x_2=\dfrac{a_{21}}{\rho_+-a_{22}}\geqq 0$

(iii) $\rho_+=a_{11}$ のとき $a_{12}a_{21}=0$

$\begin{cases} a_{12}=0 \text{ なら } x_1、x_2 \text{ は任意} \\ a_{21}=0 \text{ なら } a_{12}x_2=0 \text{ より } x_2=0、x_1 \text{ は任意} \end{cases}$

(iv) $\rho_+=a_{22}$ のとき、$a_{12}a_{21}=0$

$\begin{cases} a_{12}=0 \text{ なら } a_{21}x_1=0 \text{ より } x_1=0 \quad x_2 \text{ は任意} \\ a_{21}=0 \text{ なら } x_1、x_2 \text{ は任意} \end{cases}$

(i)〜(iv) より任意の非負定数 λ に対し、$x_1\geqq 0$、$x_2\geqq 0$、$x_1+x_2>0$ を同時に満たす解は存在する。

- n 次産業連関分析と線形代数

これに、systematic な解法を与えるものが、matrix、linear algebra である。
最終目標は以下の通り。

「Perron-Frobenius の定理の理解」

NO.

DATE . .

数学II $\boxed{2}$

・行列

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} & [m行] \\ [n列] & \end{array}$$

a_{kl} $(k=1\cdots m,\ l=1\cdots n)$ は実数又は複素数

$(m\times n)$ 行列 (←サイズ)

▷和 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\pm e & b\pm f \\ c\pm g & d\pm h \end{pmatrix}$

▷積 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$ (具体例から)

※積ABの成立条件は、(Aの列数)=(Bの行数)である。

以下 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ とする。

▷その他 (i) aを実数又は複素数とすれば $aA = \begin{pmatrix} a\cdot a_{11} & \cdots & a\cdot a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ a\cdot a_{m1} & \cdots & a\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ と表される。

(iii) 成分(k, l)とはk行目l列の成分である。

(iv) 単位行列とは $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ のような行列のことである。

Eで表すことが多く、一般に $EA=A$ である。

▷注意 (i) 一般に、行列A、Bに対し $AB \neq BA$

(イコール成立する場合もあるが、しない方が多い)

(ii) $A\neq O$、$BA=A$ なら $B=E$ とは限らない

▷ $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、$BA=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=A$

(iii) $AB=O$ でも $A=O$ 又は $B=O$ とは限らない 注) $O=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ (零行列)

▷ $A=B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、$AB=O$

(iv) 成分がすべて実数でも $A^2=-E$ となるAは存在する

▷ $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ なら $A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$

(v) $A^2=E$ を満たすAは無限に存在する

▷ $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}$ とすれば、$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E$

NO.

DATE . .

▷ 様々な行列

(i) 正方行列

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(ii) 対角行列

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(iii) 上三角行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(iv) 下三角行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(v) 対称行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ a_{ji} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

上で $a_{ij} = a_{ji}$

(vi) 転置行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

上をAとする。Aの転置行列 A^T は上の通り

▷ 正則と連立方程式

n次行列 A に対し、$AX = XA = E$ なる X が存在するとき、Aを正則という。
またこのとき、$X = A^{-1}$ と書き、XはAの逆行列という。
2次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ があるとき、その行列式(determinant)を
$\det A$、$|A|$ と表し、$\det A = ad - bc$ と表される。これを利用すれば、
Aの逆行列 $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ と表される。
またAにA^{-1}が存在する、つまりAが正則である条件は $\det A \neq 0$ である。
ここで逆行列を利用して2元1次連立方程式を解いてみる。

▷ $\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ を解け。

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\det A = 2\times 2 - 3\times 1 = 1$、 $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ より。

A^{-1}を<u>左から</u>かけて、$A^{-1}A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ //

▷ 最終目標

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ に対し、$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow (I - A)\mathbf{x} = \mathbf{d}$ を満たす

かつ $x_1 \cdots x_n \geq 0$ も満たす $\mathbf{x}$ が存在する A の条件を求める。

数学II　3

▷ 行列の基本変形

$$\begin{cases} 2x+3y+z=-2 \\ x+2y+z=1 \\ x+y+2z=3 \end{cases}$$ について $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ とすれば $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aは上の方程式の係数行列という。行列の基本変形を行うときは、

$A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ を考えるとよい。A'を拡大係数行列という。

行に関する基本変形は以下の通り
1. ある行に別の行の $\lambda(\neq 0)$ 倍を加える
2. ある2つの行を入れかえる
3. ある行を $\lambda(\neq 0)$ 倍する。

↓このような方法を掃き出し法という。

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & -14 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

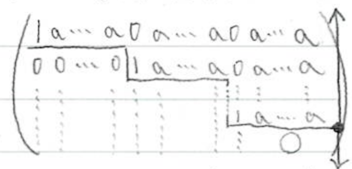
(一定の規則から答を導くアルゴリズム
→ 計算機の強力性)

▷ この掃き出し法の方向性(目的)は何か。

→ 任意の行列は上記の基本変形により、一意的に簡約された階段行列となる。

階段行列(右例参照)

図3.1



▷ この部分の行数が階数

▷ $$\begin{cases} x-2y+2z=1 \\ x-y+3z=4 \\ 2x-5y+3z=-1 \end{cases}$$ $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ (略)

Aを簡約すると $A'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となり $\begin{cases} x+4z=7 \\ y+z=3 \end{cases}$ $z=k$ とおくことにより

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (kは実数) と表せる。

▷ 行列の階数

図3.1 で行全体が0成分となる行より上の行の数が階数で rank と表す。

数学II ④

▷ 斉次連立方程式 $A\cdot x=0$

↔ 非斉次連立方程式 $A\cdot x=b\ (\neq 0)$

斉次連立方程式は自明な解 $x=0$ を常に持つと分かるが、

では一方で他の解（非自明な解）は持つか、持つならどのような条件か。

→ $m\times n$ 行列 A に対し $\mathrm{rank}\,A=r\ (0\leqq r\leqq n)$ とすれば、

$A\cdot x=0$ が非自明解を持つ条件は $r<n$ に等しい。

$r<n$ のとき $A\cdot x=0$ に対しては $n-r$ 個の解 $x_1\cdots x_{n-r}\ (\neq 0)$ が存在し、

かつ任意の解 x は、$x=\sum_{i=1}^{n-r}\lambda_i x_i=\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_{n-r}x_{n-r}$ と表せる。

さらに $\lambda_1\cdots\lambda_{n-r}$ は x によって一意的に定まる実数又は複素数である。

▷ $$\begin{cases} x_1-x_2+x_3-3x_4=0 \\ -2x_1+2x_2-5x_3+3x_4=0 \\ -x_1+x_2-3x_3+x_4=0 \end{cases}$$ 係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -5 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ について

簡約すると $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となり $\mathrm{rank}=2$

ここで $\begin{cases} x_1-x_2-4x_4=0 \\ x_3+x_4=0 \end{cases}$ より $x_2=\lambda_1$、$x_4=\lambda_2$ として、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\lambda_1+\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\lambda_2 \quad (\lambda_1,\lambda_2 \text{は実数})$$

▷ 逆行列の導出

n 次行列 A に対し、$\mathrm{rank}\,A=n$ とすると、

$(A\ \vdots\ I)$ から $(I\ \vdots\ B)$ に基本変形できるとき A は正則で $B=A^{-1}$ である。

▷ n 次正方行列において以下は全て同値である。

1. $\mathrm{rank}\,A=n$
2. 任意ベクトル b に対し $Ax=b$ が唯一の解を持つ。
3. $Ax=0$ の解は自明解に限られる
4. A を簡約すると単位行列 E となる
5. A は正則である。

$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ に対し $\operatorname{rank}A \neq \operatorname{rank}(A \vdots \boldsymbol{b})$ のとき、方程式の解は存在せず、
$\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}(A \vdots \boldsymbol{b}) = r$ のとき、解は存在し、解構造は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_0 + (\text{斉次方程式基本解の線形結合})\ \text{である。}$$

ここで λ_i は実数、$\boldsymbol{x}_i$ を $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の一次独立な解という。$(i=1\cdots n-r)$
さらに $\boldsymbol{x}_0$ は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ のある解(特殊解)である。

線形空間 (linear space)

集合 V は閉集合、すなわち「$\boldsymbol{x}_1 \in V$ かつ $\boldsymbol{x}_2 \in V$ ならば $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2 \in V$」を満たす集合であると前提した上で以下を満たす集合を実/複素線形空間という。

1. $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$
2. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$
3. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ なる要素 $\boldsymbol{0} \in V$ が存在
4. 任意の $\boldsymbol{x} \in V$、$\boldsymbol{x}' \in V$ に対し $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{0}$
5. 任意の $a, b \in \overset{\mathbb{R}}{\mathbb{C}}$、$\boldsymbol{x} \in V$ に対し $(a+b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}$
6. 任意の $a \in \overset{\mathbb{R}}{\mathbb{C}}$、$\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y} \in V$ に対し $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}$
7. 任意の $a, b \in \overset{\mathbb{R}}{\mathbb{C}}$、$\boldsymbol{x} \in V$ に対し、$(ab)\boldsymbol{x} = a(b\boldsymbol{x})$
8. $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

上記8つを線形空間の公理という。
V が線形空間として話を進める。
$a_1 \cdots a_n \in V$ に対し、$\sum_{i=1}^{n} c_i a_i \ (c_i \in \mathbb{R})$ を線形結合というが、

$$\sum_{i=1}^{n} c_i a_i = 0 \ \begin{cases} \Rightarrow & c_i = 0 \\ \not\Rightarrow & c_i = 0 \end{cases} \ (i=1\cdots n)\ \text{ならば}\ a_1 \cdots a_n\ \text{を}\ \begin{matrix}\text{線形独立} \\ \text{線形従属}\end{matrix}\ \text{という。}$$

$e_1 \cdots e_n \in V$ に対し、「$e_1 \cdots e_n$ が線形独立」かつ「任意の v に対して $c_1 \cdots c_n \in \mathbb{R}$ を用いて、$v = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$ と書ける」ことが満たされているとする。
このとき、後者「任意の…と書ける」ことを「$e_1 \cdots e_n$ が V を張る」と言う。
また、$e_1 \cdots e_n$ を V の基底と言い、この基底の数を V の次元 (dimension) と言う。
(V の次元) $= \dim V$ と表記する。

NO.

DATE

数学Ⅱ 5

▷ 行列式 (determinant)

$1\cdots n$ を $\sigma(1)\cdots\sigma(n)$ に移すことを置換と言い $\sigma = \begin{pmatrix} 1 \cdots n \\ \sigma(1)\cdots\sigma(n) \end{pmatrix}$ と表す。
また2文字を入れかえることを互換と言い i, j の互換を (i, j) と表す。
置換は互換の積により表され、その個数の偶奇は置換によって一意的である。
またこの個数 k に対し、$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^k$ を置換 σ の符号という。
ここで n 次行列 A に対し、

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \right)$$ と表される。

※ここで、S_n とは置換全体の集合であり S_n 中の置換の総数は $n!$ である。
あまりにも分かりにくい定義であるから具体例で考えよう。

▷ 例

(1) 置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ の符号は、$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2)$ より、$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^1 = -1$

(2) 置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の符号は、$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 4)(2\ 3)$ より、$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^2 = 1$

(3) 2次行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の行列式を求めよう。

$S_2 = \{1, 2\}$ であり $\sigma(1) = 1$、$\sigma(2) = 2$ とする。

置換 $\sigma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ において $\mathrm{sgn}(\sigma^1) = 1$ 置換 $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ において $\mathrm{sgn}(\sigma^2) = -1$

$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ となる。

(4) 3次行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式を求めよう。

$S_3 = \{1, 2, 3\}$ であり $\sigma(1) = 1$ $\sigma(2) = 2$ $\sigma(3) = 3$ とする。

$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\sigma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\sigma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\sigma^6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

に対し、$\mathrm{sgn}(\sigma^1) = \mathrm{sgn}(\sigma^4) = \mathrm{sgn}(\sigma^5) = 1$ $\mathrm{sgn}(\sigma^2) = \mathrm{sgn}(\sigma^3) = \mathrm{sgn}(\sigma^6) = -1$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

これを n 次行列で行うのは大変なので、次に挙げる性質を用いる。

(i) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ ca_{i1} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ c_{j1} & \cdots & c_{jn} \\ a_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{j1} & \cdots & c_{jn} \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ (v) $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$ (行にも列にも成立)

余因子と余因子展開

n次行列 A に対し、第i行と第j列を取り除いてできる$(n-1)$次行列 D_{ij} を考える。このとき、Aの成分(i,j)（つまりa_{ij}のこと）に対し、

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det D_{ij}$ を a_{ij} の余因子という。

ここで $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ （前者をj列の余因子展開、後者をi行の余因子展開という）

余因子行列

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$ を Aの余因子行列という。 ← 順番が転置しているのに注意!!

$A \cdot \tilde{A} = \det A \cdot E$ が成立し、$\det A \neq 0$ ならば Aは正則で $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}$

（余因子は難しいです。最低限上だけ知っていれば大丈夫かと…）

数学Ⅱ　$\boxed{6}$

固有値問題

n次行列Aに対し、$Ax=\lambda x$を満たす、スカラー・ベクトルの組(λ, x)を探す問題を固有値問題と言い、ここでλを固有値、xを固有ベクトルと言う。
上の式を整理して、$(\lambda I-A)x=0$となるから、xが非自明解を持つには、
$\det(\lambda I-A)=0$となる必要がある。この式をAの固有方程式$\varphi_A(\lambda)=0$という。

例 $A=\begin{pmatrix}8&-10\\5&-7\end{pmatrix}$に対し　$\det\left(\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8&-10\\5&-7\end{pmatrix}\right)=0$となるから、
$\det\begin{pmatrix}\lambda-8&10\\-5&\lambda+7\end{pmatrix}=0$　$\lambda^2-\lambda-6=0$より　$\lambda=-2, 3$となる。
$\lambda=-2$のとき　$\begin{pmatrix}-10&10\\-5&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$より　$x=c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
$\lambda=3$のとき　$\begin{pmatrix}-5&10\\-5&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=0$より　$x=c\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$
固有空間を求める場合は、$V(-2;A)=c\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$、$V(3;A)=c\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$と書く。

$\varphi_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{d_1}(\lambda-\lambda_2)^{d_2}\cdots(\lambda-\lambda_m)^{d_m}=0$、$\sum_{i=1}^{m}d_i=n$となっているとき、
d_iをλ_iに対する重複度と言う。ここで
$\dim(V(\lambda_i;A))\leqq d_i$が成立している。

n次行列Aに対し、ある正則な行列Pを持ってきて、
$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}a_1&\cdots&0\\0&\cdots&a_n\end{pmatrix}$と表せるとき、$A$は対角化可能な行列という。
Aが対角化可能である条件は、Aの各固有値に対し、
$\dim(V(\lambda_i;A))=d_i$が成立することである。

例 $A=\begin{pmatrix}5&6&0\\-1&0&0\\1&2&2\end{pmatrix}$とする。$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-5&-6&0\\1&\lambda&0\\-1&-2&\lambda-2\end{vmatrix}=0$
$(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+6)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)=0$より　$\lambda=2, 3$
$\lambda=2$のとき重複度は2
$\begin{pmatrix}-3&-6&0\\1&2&0\\-1&-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$より　$x=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}c_1+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}c_2$となり　$\dim(2;A)=2$
$\lambda=3$のとき重複度は1
$\begin{pmatrix}-2&-6&0\\1&3&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$より　$x=\begin{pmatrix}-3\\1\\-1\end{pmatrix}c$となり　$\dim(3;A)=1$
$\therefore$ Aは対角化可能である。
このときPにあたるものは、上で求めた固有ベクトルの基底を並べればよくて、$P=\begin{pmatrix}-2&0&-3\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$である。ただし一意的ではない。

NO.

DATE . .

数学II ⑦

産業連関分析における条件式

$$(E-A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$ について $E-A=B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ とすれば

$B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ $\therefore$ $\boldsymbol{x}=B^{-1}\boldsymbol{d}$ となるが、$\boldsymbol{x}\geq 0$ なる条件ではない。

では、以下の2条件

$$\begin{cases} \boldsymbol{d}\geq 0 \\ A\geq 0 \iff b_{ij}\ (1\leq i,j\leq n,\ i\neq j)\leq 0 \end{cases}$$

のもとで、$\boldsymbol{x}\geq 0$ なる B の条件とは何か。

<Hawkins-Simonの条件>

以下1〜4は全て同値

1. $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ はある $\boldsymbol{d}>0$ に対し $\boldsymbol{x}\geq 0$ なる解を持つ
2. $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ は任意の $\boldsymbol{d}\geq 0$ に対し $\boldsymbol{x}\geq 0$ なる解を持つ
3. 任意の $k=1\cdots n$ に対し $\det\begin{pmatrix} b_{11}\cdots b_{1k} \\ b_{k1}\cdots b_{kk} \end{pmatrix}>0$
4. B には非負な逆行列 B^{-1} が存在する。(つまり $B^{-1}\geq 0$ である)

これは $B=E-A$ についてであり、A に直接的な条件を考えたい。

<Perron-Frobeniusの定理>

n次行列 $A\geq 0$ に対し、以下が成立する。

$\lambda(A)\cdots$ A の実数固有値 $\lambda\geq 0$ のうち、最大のもの、とすれば

ある $\boldsymbol{x}\geq 0$ に対し、$A\boldsymbol{x}\geq\lambda(A)\boldsymbol{x}$ であり、

$\rho E-A$ が非負逆転可能、$\rho>\lambda(A)$ は同値である。

また、$\lambda(A)$ をフロベニウス根という。

数学II(文科) 前半まとめ

三竹 大寿　　　(TA: 蟹 圭佑)

2018年4月 - 5月

1. 行列の足し算・引き算：問1.2，1.3，1.5，1.6

3次正方行列の例で確認. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ とする.

1.1 足し算・引き算

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & 2+b & 3+c \\ 4+d & 5+e & 6+f \\ 7+g & 8+h & 9+i \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2d+3g & b+2e+3h & c+2f+3i \\ 4a+5d+6g & 4b+5e+6h & 4c+5f+6i \\ 7a+8d+9g & 7b+8e+9h & 7c+8f+9i \end{pmatrix}$$

1.2 非可換：$AB \neq BA$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b+7c & 2a+5b+8c & 3a+6b+9c \\ d+4e+7f & 2d+5e+8f & 3d+6e+9f \\ g+4h+7i & 2g+5h+8i & 3g+6h+9i \end{pmatrix} \neq AB$$

1.3 零行列と単位行列

$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ を零行列, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を単位行列という.

$$O + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = B$$

$I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 & b & c \\ d & e+1 & f \\ g & h & i+1 \end{pmatrix}$ これは特にどうもならない.

$$OB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O$$

$$IB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = B$$

2 行基本変形

(i) i 行目を a 倍する.

(ii) i 行目と j 行目の入れ替え.

(iii) i 行目を a 倍して j 行目に足す. の 3 つの技の組み合わせ.

2.1 簡約な行列・階数：問 3.3 , 4.3(1) , 5.4 , 5.5

(注：第 4 回 5/1 分の問題番号が $5.n$ になっている. 正しくは $4.n$)
行基本変形で階段行列 (簡約な行列) に変形しましょう. 生き残った行数を階数 (rank) と呼びます.
左から順番に消していきましょう.

2.2 拡大係数行列・連立方程式：問 3.1 , 3.4 , 4.1

例えば 3 次方程式を解く際には, 3 型の拡大係数行列を行基本変形で階段行列に変形すると, 解ける.
(例)

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ x-y-z=3 \end{cases} \text{これを行列で表すと} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列を行基本変形して

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

これは $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ つまり $x=2, y=-3, z=2$ と解けるのである.

2.3 逆行列：問 2.3 , 2.4 , 4.3(2)

A とかけて I になるやつを A の逆行列といい, A^{-1} と書く. $A \cdot A^{-1} = I$. 実数でいうところの逆数.
(2 次正方行列のとき)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(一般にも $\tilde{A}$ を余因子行列として $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$ は成り立つ. ただし余因子行列が大変なので非推奨.)
(3 次以上のとき：吐き出し法)
3 次以上の場合はこちらがオススメ. 拡大係数行列の行基本変形で求まる.
(例)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ の逆行列を吐き出し法で求てみよう.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{であるので,} \ A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

各自 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ となることを確認していただきたい.

3 行列式：問6.2，7.1，7.2，7.4

定義は複雑なので覚えないでよい．「ふーん、そうなんだー。」くらいの認識で十分, 今後コンピュータに計算させる場合やシステマティックに計算したい場合には思い出してほしい.

3.1 2 次正方行列の行列式

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

3.2 3 次正方行列の行列式

サラスの公式

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cde - ceg - bdi - afh$$

3.3 n 次正方行列の行列式

4 次以上の場合は 2 次の $ad - bc$ や 3 次のサラスのような便利な公式は無い (少なくとも私 TA は知らない).

「i 行 (列) 目を a 倍して j 行 (列) 目に足す」変形と余因子展開をして, 2, 3 次の場合に帰着.

(注 1) 行＆列基本変形の (iii) のみしか許されないことに注意.

(注 2) 余因子展開では符号がプラマイで順番に出てくることに注意.

(例)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 0 \\ 9 & 6 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{vmatrix} + 0 - 0 + 0 = -4\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

(解説)

まず, 1 行目を-2 倍して 2 行目に足す, 1 行目を-3 倍して 3 行目に足す, 1 行目を-4 倍して 4 行目に足す.

次に余因子展開をするが, このとき 1 行 1 列の成分 (今回は 1) の符号が+であり, そこから上下左右にひとつ動くと符号が入れ替わる. そのため 4 の符号は-であることに注意する.

4 のかかった余因子行列の行列式は, 3 列目を-2 倍して 2 列目に足し, 3 列目を-3 倍して 1 列目に足すと, 1 列目と 2 列目が 0 になる.

最後はサラスを使ってもよいし, 1 列目で余因子展開したと思ってもよいし, 零ベクトルを含むからといってもよいし, 階数が落ちているからといってもよいが, 行列式は 0 になる.

4 最後に

この文書は当講義 TA の独断と偏見により作成されたものであります. みなさんの勉強およびテスト対策の助けになれば幸いですが, この文書の内容を A, テストの内容を B としたときに, $A \subset B$ とも $A \supset B$ とも限らないことに注意してください. これだけやれば大丈夫的な保証は無いので過信はされぬよう...

一つの使用法として, この文書を上に抜粋した演習問題を解きながら一周し, その後で講義のノートと共に演習問題を全問コンプリートしていくというのが良いと思います.

後半は固有値・固有ベクトル・対角化からのペロン-フロベニウスの定理もあり大変ですが ，総復習回までに前半の復習を終えて臨めると素敵だと思います. やってみて分からない部分があれば授業前後 TA は基本ヒマなので聞いてみてください. あと 1 カ月, いっしょに頑張りましょう！

数学II(文科) 後半まとめ

三竹 大寿　　　　(TA: 蟹 圭佑)

2018年6月

1章から3章までが一続きで, 4章は1章の補足的な感じです. とりあえず1章から3章を頑張りましょう.

1 固有○○シリーズ前半：問 8.1(A)(B)

固有多項式, 固有値についてです.

定義：固有値, 固有ベクトル

正方行列 A に対し,

$$Av = \lambda v$$

を満たすスカラー (実数, 複素数)λ とベクトル v を, それぞれ A の**固有値**, 固有値 λ の**固有ベクトル**と呼ぶ.

固有ベクトル, 固有空間, 対角化については Perron-Frobenius の定理の運用には直接必要ではないので, 一旦飛ばして4章に書いておきます.

例えば $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となり, 固有値-1 の固有ベクトル $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, 固有値 4 の固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ という感じです. この例を通して A の固有多項式と固有値の求め方を見ていきましょう

1.1 固有多項式

行列 A の**固有多項式**とは $\lambda I - A$ の行列式のことです, 因数分解までしてしまいましょう.

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2) - 3 \cdot 2 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4) \end{aligned}$$

1.2 固有値

行列 A の固有値は, 固有多項式の根として現れます. さらにその根の重複度のことを, 固有値の**重複度**とも呼びます. つまり A の固有値は $\lambda = -1, 4$ で, 重複度はどちらも 1 です.

このために上で因数分解までしていたわけですね.

1.3 例B

$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ についてここまでやってみましょう.

固有多項式は $\det(\lambda I - B) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & -1 \\ 3 & \lambda-4 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 12\lambda^2 + 44\lambda - 48 = (\lambda-2)(\lambda-4)(\lambda-6)$

従って固有値は $\lambda = 2, 4, 6$(各重複度 1). .

1.4 例C

$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ でもやってみましょう.

固有多項式は $\det(\lambda I - C) = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -6 & 3 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & -4 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = (\lambda-2)^2(\lambda-3)$

従って固有値は λ=2(重複度 2),3(重複度 1).

2 Hawkins-Simon の定理：問 9.1

n 次正方行列 B, n 次元ベクトル x, d に対し, 方程式

$$Bx = d$$

を考えてみましょう.

2.1 定理の内容

Hawkins-Simon の定理 Ver.1

任意の $i \neq j$ に対し $b_{ij} \geq 0$ を満たすとき, 次は同値

(i) ある $d > 0$ に対して, $x \geq 0$ なる解をもつ.

(ii) 任意の $d > 0$ に対して, $x \geq 0$ なる解をもつ.

(iii) 任意の $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\det \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kk} \end{pmatrix} > 0$$

経済学の問題としては, (i),(ii) が"正値解を持つ"ことを意味しているので重要そうです.
下の Ver.2 では b_{ij} に対する仮定の不等号の向きが逆になることに注意してください.
全ての成分が非負 ($b_{ij} \geq 0$) のとき, 行列が**非負**であるといい, $B \geq 0$ と表します.

Hawkins-Simon の定理 Ver.2

任意の $i \neq j$ に対し $b_{ij} \overset{\leq}{\cancel{\geq}} 0$ を満たすとき, 次は同値.

(iii) 任意の $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\det \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & \cdots & b_{kk} \end{pmatrix} > 0$$

(iv) B は非負逆転可能. すなわち $B^{-1} \geq 0$.

数学 (線形代数) の問題としては, (iv) が"逆行列の正負"について論じられていて趣深いです.

それらの興味深い (興味深さには個人差があります) 問題を, (iii) の条件 ("Hawkins-Simon 条件") で簡単に判別できるよーというのが, Hawkins-Simon の定理の嬉しさです.

2.2 定理の適用

$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ についてやってみましょう.

まず, Hawkins-Simon の定理 Ver.2 の仮定 $b_{ij} \leq 0$ $(i \neq j)$ についてですが, 対角成分以外が 0 以下になっていることを目視してください. これが成り立っていないと, 定理 Ver.2 は使えないので注意してください.

$$\det(2) = 2 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

よって Hawkins-Simon の条件を満たすので, 非負逆転可能であることが分かります. 実際,

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

であり, 逆行列が非負であることが確かめられます.

3 Perron-Frobenius の定理 : 問 10.1

今度は $\rho \in \mathbb{R}$ に対して次の方程式を考えてみましょう.

$$(\rho I - A)x = d$$

3.1 定理の内容

Perron-Frobenius の定理

非負 n 次正方行列 A に対し,

$$\lambda(A) = \max\{\lambda \geq 0 \mid \lambda \text{は} A \text{の固有値}\}$$

とおくと, 次が成立する.

(1) ある $x \geq 0$ に対して, $Ax = \lambda(A)x$ が成り立つ. (固有ベクトルで非負なものが存在する.)

(2) $\rho I - A$ が非負逆転可能 $\Leftrightarrow \rho > \lambda(A)$

3.2 定理の適用

$T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ について $\rho I - T$ がいつ非負逆転可能か考えてみましょう.

Perron-Frobenius の定理の仮定 $T \geq 0$ が満たされているので, 適用できます.

まず $\lambda(T)$ を求めましょう. そのためには T の固有多項式から固有値を計算します.

固有多項式は

$$\det(\lambda I - T) = \begin{pmatrix} \lambda-4 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -2 & \lambda-3 \end{pmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 8\lambda + 12 = (\lambda^2 - 4\lambda - 4)(\lambda - 3) = (\lambda + 2(\sqrt{2} - 1))(\lambda - 2(\sqrt{2} + 1))(\lambda - 3)$$

より固有値 $\lambda = -2(\sqrt{2} - 1), 2(\sqrt{2} + 1), 3$. 従って $\lambda(T) = \max\{2(\sqrt{2} + 1), 3\} = 2(\sqrt{2} + 1)$.

Perron-Frobenius の定理より $\rho > 2(\sqrt{2} + 1)$ のときに $\rho I - T$ は非負逆転可能であることが分かります. 実際,

$$(\rho I - T)^{-1} = \begin{pmatrix} \rho-4 & -2 & 0 \\ -1 & \rho & -1 \\ 0 & -2 & \rho-3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(\rho^2 - 4\rho - 4)(\rho - 3)} \begin{pmatrix} \rho^2 - 3\rho - 2 & 2(\rho - 2) & \rho + 2 \\ \rho - 3 & (\rho - 3)(\rho - 4) & \rho - 3 \\ 2 & 2(\rho - 4) & \rho^2 - 4\rho - 2 \end{pmatrix}$$

は, $\rho > 2(\sqrt{2} + 1)$ で非負になります.

例えば $\rho = 5 > 2(\sqrt{2} + 1)$ とすると,

$$(5I - T)^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 8 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \geq 0$$

非負になりましたね.

4 固有〇〇シリーズ後半 : 問 8.1(C), 8.2

これで最終章になります. 固有〇〇シリーズ後半は対角化もあり重要なのですが, 難しいし長くなってしまったので, 余力または意欲のあるときに読むことをオススメします.

4.1 固有ベクトル

固有ベクトルは, 各固有値に対して定まります. つまり, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値-1 と 4, それぞれに固有ベクトル v_{-1}, v_4 が出てくる感じです. (各固有値に対して 1 以上重複度以下本の固有ベクトルが出ます.)

それでは, v_{-1} を求めてみましょう.

$$Av_{-1} = -1 \cdot v_{-1}$$

が固有値-1 の固有ベクトルの定義であったので, これを移項してあげて

$$(-1 \cdot I - A)v_{-1} = 0$$

を満たす $v_{-1} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求めれば良いわけです.

実際に計算すると,

$\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + 3y \\ 2x - 3y \end{pmatrix} = 0$ より,

$v_{-1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ として取ることができることが分かります. ($v_{-1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ などでも間違いではないです.)

同様に $(4I-A)v_4=0$ を計算して, $v_4=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

また, このとき,

$Av_\lambda=\lambda v_\lambda$

$$Av_{-1}=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}=-1\cdot v_{-1}$$

$$Av_4=\begin{pmatrix}1&-3\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}=4\cdot v_4$$

が成り立っています. 素晴らしいですね.

4.2 固有空間

行列 A の重複度 n の固有値 λ に対し, 一次独立な全ての固有ベクトルを $v_{\lambda,1},\cdots,v_{\lambda,k}$ としたとき $(k\le n)$,

$$V(\lambda;A)=\{c_1v_{\lambda,1}+\cdots+c_kv_{\lambda,k}\mid c_1,\cdots,c_k\in\mathbb{R}\}$$

を固有値 λ の**固有空間**と言います.

固有ベクトルをいい感じに並べればいいので, $V(-1;A)=\left\{c\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\;\middle|\;c\in\mathbb{R}\right\}$, $V(4;A)=\left\{c\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\;\middle|\;c\in\mathbb{R}\right\}$ がそれぞれ固有値-1, 4 の固有空間です.

4.3 対角化

左上から右下への対角線上以外が 0 になる行列を**対角行列**と言って, 適当な正方行列 A を正則行列 P で, $P^{-1}AP$ が対角行列になるようにすることを**対角化**と言います.

実はこの P は, 固有ベクトルを並べればできあがります. とりあえず見てみましょう.

$P=(v_{-1},v_4)=\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\end{pmatrix}$ と置くと, $P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&1\\2&-3\end{pmatrix}$ であり,

$P^{-1}AP=$ 対角行列

$$P^{-1}AP=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&1\\2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&4\end{pmatrix}$$

無事, 対角化ができました. よかったです.

4.4 例 B

$B=\begin{pmatrix}3&-1&1\\-3&4&0\\0&-1&5\end{pmatrix}$ のそれぞれの固有値 $\lambda=2,4,6$(各重複度 1) に対し, 各固有値に対する固有ベクトルは $(\lambda I-B)v_\lambda=0$ を計算することで, $v_2=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$, $v_4=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_6=\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}$ と求められます.

各固有値に対する固有空間は,

$$V(2;B)=\left\{c\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}\ \middle|\ c\in\mathbb{R}\right\},\ V(4;B)=\left\{c\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\ \middle|\ c\in\mathbb{R}\right\},\ V(6;B)=\left\{c\begin{pmatrix}2\\-3\\3\end{pmatrix}\ \middle|\ c\in\mathbb{R}\right\}$$ です.

対角化のため, $P=(v_2,v_4,v_6)=\begin{pmatrix}2&0&2\\3&1&-3\\1&1&3\end{pmatrix}$ とおくと, $P=\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix}3&1&-1\\-6&2&6\\1&-1&1\end{pmatrix}$ で,

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&4&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

やりましたね.

4.5 例 C

$C=\begin{pmatrix}5&6&-3\\0&2&0\\2&4&0\end{pmatrix}$ の固有値は λ=2(重複度 2),3(重複度 1) でした. 固有値 2 の固有ベクトルは重複度 2 より 1 本か 2 本出てきます. 今回は 2 本でてきて $v_{2,1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_{2,2}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ で, 固有空間は

$$V(2;C)=\left\{c_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\ \middle|\ c_1,c_2\in\mathbb{R}\right\}$$ です.

固有値 3 の固有ベクトルは $v_3=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}$, 固有空間は $V(3;C)=\left\{c\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\ \middle|\ c\in\mathbb{R}\right\}$ となります.

そして, $P=(v_{2,1},v_{2,2},v_3)=\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ とおくと $P=\begin{pmatrix}-2&-4&3\\0&1&0\\1&2&-1\end{pmatrix}$ で,

$$P^{-1}CP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

こちらもなんとか対角化ができました.

5 最後に（前半まとめとほぼ一緒です. コピペです. ）

この文書は当講義 TA の独断と偏見により作成されたものであります. みなさんの勉強およびテスト対策の助けになれば幸いですが, この文書の内容を A, テストの内容を B としたときに, $A\subset B$ とも $A\supset B$ とも限らないことに注意してください. これだけやれば大丈夫的な保証は無いので過信はされぬよう...

一つの使用法として, この文書を上に抜粋した演習問題を解きながら一周し, その後で講義のノートと共に演習問題を全問コンプリートしていくというのが良いと思います.

あと少し, いっしょに頑張りましょう！

数学II(文科)

三竹 大寿　　(TA: 蟹 圭佑)

2018/4/10

P6 演習問題1 1.1

問 1.1

行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ について次を答えよ.

(1) サイズ　(2) 第 1 行　(3) 第 2 列　(4) (2,1) 成分

P6 演習問題1 1.2

問 1.2

$A = \begin{pmatrix} a+b & 2c & a+b \\ b+c & 2b & a+1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b & c & c \\ c & b & b \end{pmatrix}$ とする.

(1) $2A+B, A-2B$ を計算せよ.　(2) $A-2B=O$ となるとき a,b,c を求めよ.

P6 演習問題1 1.3

問 1.3

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ に対し, $\begin{cases} X+2Y=A \\ 2X-Y=B \end{cases}$ を満たす行列 X,Y を求めよ.

P6 演習問題1 1.4

問 1.4

$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対し, $\begin{cases} X+Y=A \\ 2X-Y=B \end{cases}$ を満たす行列 X,Y を求めよ.

P6 演習問題1 1.5

問 1.5

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

積 Ae_1, Ae_2, Ae_3 を計算せよ.

P6 演習問題1 1.6

問 1.6

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ に対し,

(1) 積 $X=AB$ を計算せよ.　(2) $X(X+2I)X$ を求めよ.

数学II(文科)

三竹 大寿　　　(TA: 蟹 圭佑)

2018/4/17

問 2.1

正方行列 A が $A^{\mathrm{T}} = A$ を満たすとき, A を対称行列という. 次の行列が対称行列であるように a, b, c を定めよ. (A^{T} は A の転置行列である.)

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2c+1 & 3 \\ a & -2 & c \\ b & a-2 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & b-2 & 1 \\ a & 3 & c \\ b-2 & a+1 & 5 \end{pmatrix}$

問 2.2

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とるする. $B = (A^{\mathrm{T}})A$, $C = A(A^{\mathrm{T}})$ を求めよ.

P18 演習問題3
3.5

問 2.3

$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $P^{-1}AP$ を計算せよ.

(2) A^k $(k = 1, 2, \ldots)$ を (1) を用いて求めよ.

問 2.4

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする. 逆行列を用いて (x, y) を求めよ.

問 2.5

$A^2 = A$ であるような 2 次正方行列をすべて求めよ.

数学II(文科)

三竹 大寿 (TA: 蟹 圭佑)

2018/4/24

問 3.1

次の連立１次方程式を拡大係数行列の基本変形を用いて解け.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

問 3.2

次の行列が簡約でない理由を述べ, 基本変形で簡約な行列に変形せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

P24 演習問題4 4.2 (3)(4)(6)

問 3.3

次の行列を行基本変形で階段行列にし, 階数を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 11 \\ 5 & 12 & 19 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 2 & -6 & -4 \\ 3 & -9 & -6 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ -4 & 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$

P24 演習問題4 4.3、4.4

問 3.4

(1) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ の階数を求め、$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$ を解け.

(2) 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ の階数を求め、$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$ を解け.

数学II(文科)

三竹 大寿　　(TA: 蟹 圭佑)

2018/5/1

問 5.1

次の連立 1 次方程式を解け．ただし，$a, b \in \mathbb{R}$ とする．

(1) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 9 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ -3x_1 + x_3 + 4x_4 = -3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ ax_1 + x_2 = b \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = -6 \\ 3x_1 - 5x_2 + 16x_3 - 29x_4 = -5 \end{cases}$

問 5.2

次の連立 1 次方程式が解を持つように a, b, c を定めて，これを解け．

(1) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = a \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 - 11x_2 - 7x_3 + 5x_4 = b \\ x_1 - 9x_2 - 8x_3 + 5x_4 = c \end{cases}$

問 5.3

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ が正則であるか否かを調べよ．

(2) 行列 $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ．

数学II(文科)

三竹 大寿　　(TA: 蟹 圭佑)

2018/5/8

P54 演習問題9 9.2

問 5.1

1 番目と 2 番目のベクトルの 1 次結合として 3 番目のベクトルを表せ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

P54 演習問題9 9.4

問 5.2

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ a \end{pmatrix}$ の 1 次結合で書けるときの a の値を求め, 1 次結合として表せ.

P54 演習問題9 9.5

問 5.3

$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とする.

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ が a_1, a_2 で生成される空間 $< a_1, a_2 >$ に属するための b_1, b_2, b_3 の必要十分条件を求めよ.

P54 演習問題9 9.7

問 5.4

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が 1 次独立であるか判定せよ.

P54 演習問題9 9.8

問 5.5

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$ が 1 次従属であるときの a の値を求めよ.

数学II(文科)

三竹 大寿　　　　(TA: 蟹 圭佑)

2018/5/15

P36 演習問題6
6.3

問 6.1

次の置換 σ_1, σ_2 を互換の積に表し，符号を求めよ．

(1) $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　　(2) $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

P36 演習問題
(3)→6.4(7)
(4)→6.6(2)
(5)→6.6(1)

問 6.2

次の行列の行列式を計算せよ．

(1) $A_1 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$　　(2) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　　(3) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

(4) $A_4 = \begin{pmatrix} 64 & 63 \\ 65 & 64 \end{pmatrix}$　　(5) $A_5 = \begin{pmatrix} x & x-1 & x-2 \\ x+1 & x & x-1 \\ x+2 & x+1 & x \end{pmatrix}$

P36 演習問題6
6.7、6.8(1)

問 6.3

(1) A が m 次行列, B が $m \times n$ 行列, D が n 次行列のとき $\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = |A||D|$ を示せ．

(2) A, B を n 次正方行列とするとき $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B||A-B|$ を示せ．

数学II(文科)

三竹 大寿　　　(TA: 蟹 圭佑)

2018/5/22

P42 演習問題7 7.2

問 7.1

第 1 列で余因子展開して行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$　　(3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 0 & 1 & 1 \\ y & 1 & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

P42 演習問題7 7.4

問 7.2

次の行列式を因数分解せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$　　(3) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$

P42 演習問題7 7.5

問 7.3

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

が成り立つことを示せ.

問 7.4

次の等式が成り立つことを示せ.

(1) $\begin{vmatrix} a+b+c & -c & -b \\ -c & a+b+c & -a \\ -b & -a & a+b+c \end{vmatrix} = 2(a+b)(b+c)(c+a)$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & a \\ x & y & b & b \\ x & y & z & c \end{vmatrix} = -(x-a)(y-b)(z-c)$

数学II(文科)

三竹 大寿　　　(TA: 蟹 圭佑)

2018/6/5

P96 演習問題16
16.1(3)(5)(8)(15)

問 8.1

次の行列 (1)-(4) について, (A) 固有多項式を求めよ. (B) すべての固有値とその重複度を求めよ. (C) 各固有値に対する固有空間を求めよ. ($a \in \mathbb{R}$)

(1) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

問 8.2

次の行列は対角化されるか調べ, 対角化できれば対角化せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 13 & -30 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$　(4) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

問 8.3

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする. A^n $(n \in \mathbb{N})$ を求めよ.

数学II(文科)

三竹 大寿 (TA: 蟹 圭佑)

2018/6/12

問 9.1

次の行列の逆行列が非負行列かどうか, Hawkins-Simon 条件を利用して調べよ. その上で実際に逆行列を求めて, Hawkins-Simon 条件で調べた結果と整合性がとれているか検証せよ.

(1) $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

数学II(文科)

三竹 大寿　　　　(TA: 蟹 圭佑)

2018/6/19

問 10.1

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $\rho I - A$ が非負逆転可能であることの, ρ に関する必要十分条件を求めよ.

(2) また, そのときの $(\rho I - A)^{-1}$ を求めよ.

A＝$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$に対し、$A^n$ を求めよ。ただし、n は自然数とする。

A が対角化可能かどうかを調べる。対角化可能であれば、A を対角化する行列 P を求め、余因子行列を用いて P^{-1} を求める。$P^{-1}AP$ の形を利用すれば A^n を求めることができる。

A の固有空間を求めよう。A の固有値をλとおけば、det(λE−A)＝0 より、

$\begin{vmatrix} \lambda-5 & -6 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ -1 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$＝0　行の基本変形により行列式を計算すると、$(\lambda-2)^2(\lambda-3)=0$

∴λ＝2、3　ここで、$\lambda_1=2$、$\lambda_2=3$ とおく。また、固有ベクトルを X_1、X_2 とおく。

λ_1 について、重複度は 2 である。

$\begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}X_1=0$ より、$X_1=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}c_1+\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}c_2$ と表せ、X_1 の次元は 2 である。

λ_2 について、重複度は 1 である。

$\begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}X_2=0$ より、$X_2=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}c$ と表せ、X_2 の次元は 1 である。

以上より、全ての固有値に対し、固有値の重複度と固有空間の次元が一致するから、A は対角化可能である。このとき、A を対角化可能にする P は、全ての基底を並べたもので、この場合、

P＝$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$である。仮に、P＝$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$とおく。余因子を求めると、

$A_{11}=1$、$A_{12}=-1$、$A_{13}=1$、$A_{21}=3$、$A_{22}=-2$、$A_{23}=2$、$A_{31}=0$、$A_{32}=1$、$A_{33}=0$ となるから、

余因子行列$\tilde{P}$は、余因子の並べ方に注意すると、$\tilde{P}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$となる。

detP＝1 より、$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$となる。ここで、

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$であるから、$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$

$\therefore A^n=P(P^{-1}A^nP)P^{-1}=\begin{pmatrix} 3^{n+1}-2^{n+1} & 2\cdot3^{n+1}-3\cdot2^{n+1} & 0 \\ 2^n-3^n & 3\cdot2^n-2\cdot3^n & 0 \\ 3^n-2^n & 2\cdot3^n-2^{n+1} & 2^n \end{pmatrix}$ …答

授業のよい復習になる練習問題です。この 1 題が解けるかだけでも定着度が測れます。