NO. 1
DATE 10/10

記号論理学I

論理学とは何か

PやKなどの記号を用いて展開される論理学
↑日常言語が翻訳されたもの

19C～20C G・フレーゲやB.ラッセルによって確立された

推論を研究する(推論の正誤を考える)

推論とは?

(例)三段論法

$$\left.\begin{array}{l}\text{すべての人間は動物である}\\ \text{ソクラテスは人間である}\end{array}\right\}\text{前提 premise}$$

∴ソクラテスは動物である　　結論 conclusion

P_1 ← premise
⋮
P_n
―――
C ← conclusion

・選別の理由（なぜこの5つしか扱わないのか）

①論理学は、これまで主として数学的推論を基礎づけるのに専念してきた

（「だが」などは、数学的には何の意味もない）

②真理関数的

・真理値という概念

命題Aが
- 真 → Aは真（t）の値をもつ
- 偽 → Aは偽（f）の値をもつ

例）

あたたかくて、かつ風が強い

p	（全体で）	q
t	t	t
t	f	f
f	f	t
f	f	f

⇓ 関数で表してみる

かつ(p, q)

かつ(t, t) = t

かつ(t, f) = f　　　「かつ」は真理関数である

かつ(f, t) = f

かつ(f, f) = f

※すべての文結合子が真理関数なわけではない

例）　p だから q

t　?　t　　p、qがtでも、全体がtかどうかは分からない

・文結合子の意味（真理関数の定義）

1. 否定「～」（「¬」）

"pでない" → "～p"

否定に相当する日常語

…でない
…は偽である
…は本当でない　など

真理関数としての定義

p	$\sim p$
t	f
f	t

例）「富士山は火山でない」

もし火山なら…この命題の真理値は偽
火山でないなら…　〃　真

日常の否定表現とのちがい（「～」と「でない」のちがい）

あなたは美しくなくはない ≡ あなたは美しい　と言えるか？

論理学では…

～～(あなたは美しい) ≡ あなたは美しい　二重否定はもとの命題と同値

NO. 12

DATE 10/24

2. 連言「&」(「∧」)

日常的表現

かつ，そして，and

連言の定義

例）$\underline{\text{太郎は大学生であり、}}$ かつ $\underline{\text{一人暮らしである}}$

p　　　　　　　　q

$\Rightarrow$ p & q ← 連言肢

& ← 連言

p & q ← 連言(文)

p	q	p & q
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	f

pとqが両方真の場合のみ、p&qは真となる

「&」と「かつ」のちがい

例）太陽は輝き、かつ 2+3=5 ← 日常語では意味不明

(太陽は輝く) & (2+3=5) ← 論理学的に意味明瞭

3. 選言 「∨」

日常的表現

または, or

選言の定義

例) $\underbrace{\text{次郎は春子が好きか}}_{p}$、または $\underbrace{\text{秋子が好きである}}_{q}$

⇒ $p \vee q$ ← 選言肢

$\vee$ ← 選言

$p \vee q$ ← 選言(文)

p	q	$p \vee q$	($p \veebar q$)
t	t	t ※	f
t	f	t	t
f	t	t	t
f	f	f	f

排反的

※ ・排反的選言

p	$\vee$	q
t	f	t

コチラを採用

⊙ 両立的選言

p	$\vee$	q
t	t	t

少なくともどちらかであればよい
両方満たしていてもよい

例) 受験資格者は日本人か、または日本在住者である

記論

NO. 14

DATE 10/24.

両立的選言が選ばれる理由

…論理理論の単純性・美しさによる

例）ド・モルガンの法則

$$\sim(p \& q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \& \sim q$$

これは、両立的選言の時に成り立つ

4. 含意「→」（「⊃」）

日常的表現

ならば

含意の定義

例）$\underbrace{\text{太郎が犯人}}_{p}$ならば、$\underbrace{\text{次郎も犯人である}}_{q}$

前件 $\underbrace{p \underbrace{\rightarrow}_{\text{含意}} q}_{\text{含意(文)}}$ 後件

前件が真のとき

p	q	$p \to q$
t	t	t
t	f	f

前件が偽のとき

p	q	$p \to q$
f	t	t ※
f	f	t

※ 日常的に考えればどちらとも言えない（条件が成立しない時点で命題は何も言っていない）が、論理学的にはハッキリさせなければならない

そこで…

$$
\begin{tikzcd}
p \to q \arrow[rr, leftrightarrow, "逆"] \arrow[d, leftrightarrow, "裏"'] \arrow[drr, leftrightarrow, "対偶"] & & q \to p \\
\sim p \to \sim q & & \sim q \to \sim p
\end{tikzcd}
$$

対偶の関係にあるものは同値

逆・裏は同値とは言えない

この関係が成り立つように定義する

まとめると…

p	q	$p \to q$	$\sim q \to \sim p$	$q \to p$
t	t	t	t	t
t	f	f	f	t
f	t	t	t	f
f	f	t	t	t

5. 同値 「≡」

「ならば、そしてそのときにかぎり」に相当
if and only if

同値の定義

p	q	$p \equiv q$
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	t

◈ まとめ
(t を 1、f を 0 で表す)

p	$\sim p$
1	0
0	1

p	q	$p \& q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \equiv q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

↑ p. q の真理値によって、命題の真理値が関数的に決まる

・真理表

例1) $p \to (p \,\&\, q)$

p	q	p	$\to$	$(p$	$\&$	$q)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0

まず p、q の下に真理値(0か1)を書き、その後分かるところから判断していく

(p & q)の真理値

全体の真理値

これ全体を真理表という

例2) $p \vee (\sim q \,\&\, r)$

p	q	r	p	$\vee$	$(\sim$	q	$\&$	$r)$
1	1	1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0

全体の真理値

NO. 18

DATE 10/31

練習問題

(a) 太郎が犯人なら、次郎は犯人でない。

(b) レモンはおいしそうにみえるが、すっぱい。

(c) できますよ、やろうと思えば。

(d) 彼は今日か明日来るだろうが、あさっては来ないだろう。

(e) 神も悪魔も存在しないなら、宗教心をおこすことは難しい。

(f) その猫を追い出しなさい。さもなければ、出て行きますよ。

(a) p:「太郎が犯人」　q:「次郎が犯人」

命題：$p \to \sim q$

p	q	$p \to \sim q$
1	1	1 0 0 1
1	0	1 1 1 0
0	1	0 1 0 1
0	0	0 1 1 0

※全て計算する必要はない場合もある

pが偽と分かった時点で、$\sim q$の真理値に関わらず全体は真

(b) p：「レモンはおいしそうにみえる」　q：「レモンはすっぱい」

命題：p & q

p	q	p & q
1	1	1 1 1
1	0	1 0 0
0	1	0 0 1
0	0	0 0 0

(c) p：「やろうと思う」　q：「できる」

命題：p → q

p	q	p → q
1	1	1 1 1
1	0	1 0 0
0	1	0 1 1
0	0	0 1 0

NO. 2

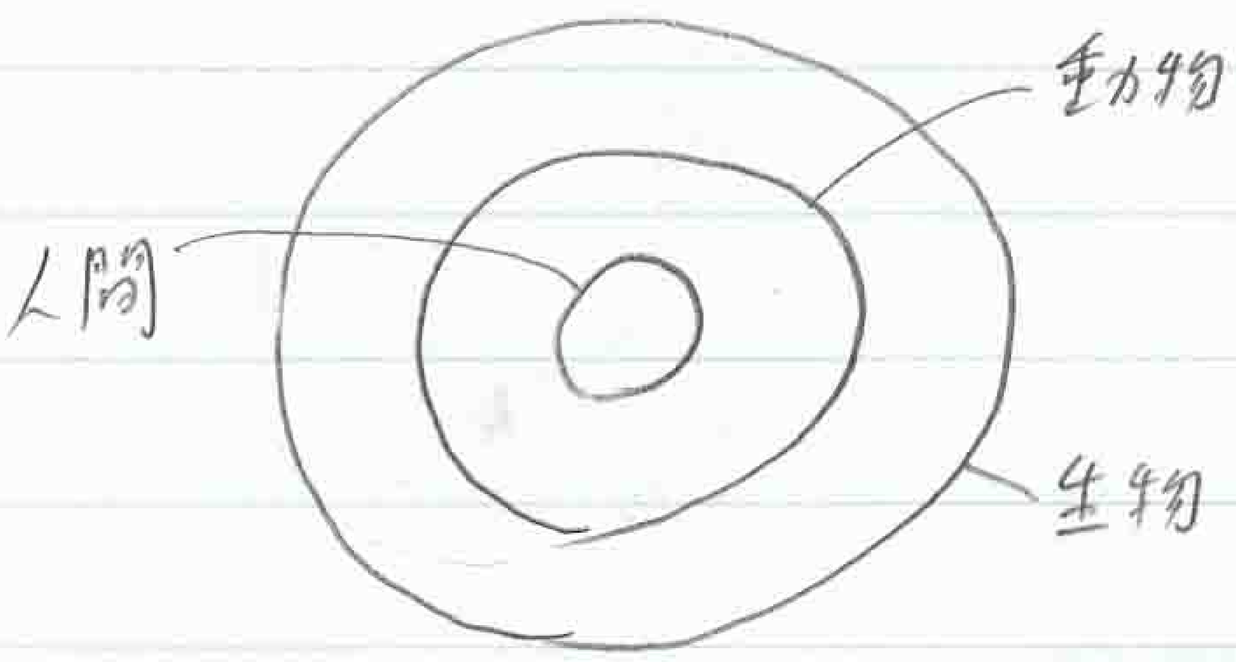
DATE 10/10

正しい推論

すべての人間は動物である
すべての動物は生物である
∴ すべての人間は生物である

正

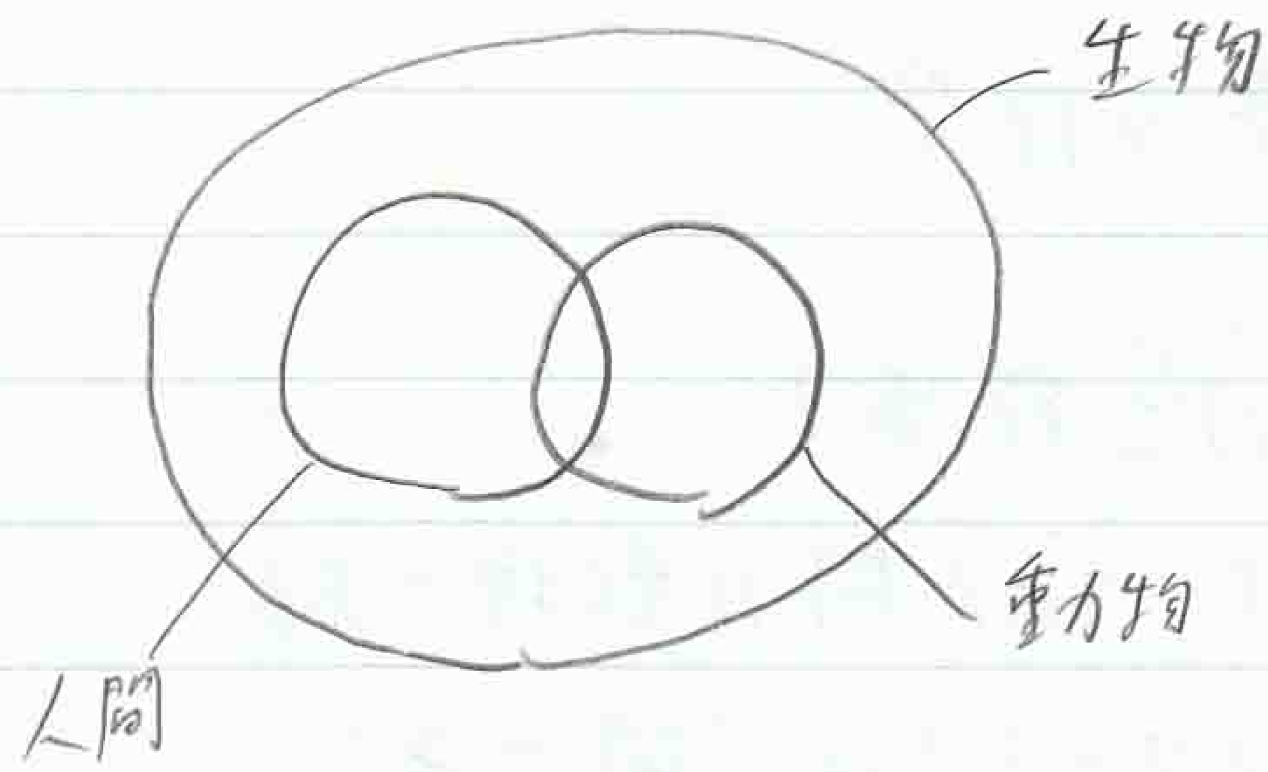
ベン図を描いてみると…



「人間」が「生物」に包含されている

すべての人間は生物である
すべての動物は生物である
∴ すべての人間は動物である

誤



推論の正しさの定義

前提が正しければ、結論も必ず正しい

‖

前提が結論を保証する／前提から結論が導き出せる

(「前提が正しければ」の話なので、結論が実際に正しいとは限らない)

推論が正しい
‖
(論理的に)妥当である

推論の誤りの定義

前提が正しくても、結論が正しいとは限らない

‖

前提から結論が出てこない／前提が結論を含まない

(d) p:「彼は今日来る」　q:「彼は明日来る」　r:「彼はあさって来る」

命題：$(p \vee q) \ \& \sim r$

p	q	r	(p	∨	q)	&	~	r
1	1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0	0	1	0

※ ~rが偽と分かった時点で、p∨qの真理値に関わらず全体として偽

(e) p:「神が存在する」　q:「悪魔が存在する」　r:「宗教心をおこすことは難しい」

命題：$\sim p \ \& \sim q \rightarrow r$ ／ $\sim (p \vee q) \rightarrow r$ でもよい

p	q	r	~	p	&	~	q	→	r
1	1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1	0	0	0

問題 1

ある事件の容疑者 a, b, c につき、次の事実が立証された。
これから、誰が有罪で誰が無罪かを推論せよ。

(1) a, b, c のうち、少なくても1人は有罪である。

(2) a および b が有罪なら、c は無罪である。

(3) b が有罪なら、a も有罪である。

(4) c が有罪なら、a も有罪である。

	A	B	C	A∨B∨C	A&B→~C	B→A	C→A
×	1	1	1	1	1 1 1 0 0 1		
o	1	1	0	1	1 1 1 1 1 0	1 1 1	0 1
o	1	0	1	1	1	0 1	1 1 1
o	1	0	0	1	1	0 1	0 1
×	0	1	1	1	1	1 0 0	
×	0	1	0	1	1	1 0 0	
×	0	0	1	1	1	0 1	1 0 0
×	0	0	0	0			

結論： A は有罪 / B 不明 / C 不明

NO. 24

DATE 11/7

問題2

ドラキュラ伝説の地、トランシルヴァニアで3人の怪しい人物a, b, cに会った。

(1) a, b, cのうち、少なくとも1人は吸血鬼(Q)である。

(2) aがQで、cがQでないなら、bはQである。

(3) cがQなら、a・bのうちにもう1人だけQがいる。

(4) aがQなら、cはQでない。

(5) cがQなら、bはQでない。

誰がQで、誰がそうでないか。

$C \to (A \& \sim B) \lor (\sim A \& B)$ も可

こちらの方が応用がきく

(A, B, Cのうち1人だけ…なで)

	A	B	C	A∨B∨C	A&~C→B	C→(A∨B)&~(A&B)	A→~C	C→~B
×	1	1	1	1	1 0 0 1 1 1	1 0 1 1 1 0 0 1 1 1		
	1	1	0	1	1 1 1 0 1 1	0 1 1 1 1 0 0 1 1 1	1 1 1 0	0 1 0 1
×	1	0	1	1	1 0 0 1 1 0	1 1 1 1 0 1 1 1 0 0	1 0 0 1	
×	1	0	0	1	1 1 1 0 0 0			
×	0	1	1	1	0 0 0 1 1 1	1 1 0 1 1 1 1 0 0 1	0 1 0 1	1 0 0 1
	0	1	0	1	0 0 1 0 1 1	0 1 0 1 1 1 1 0 0 1	0 1 1 0	0 1 0 1
×	0	0	1	1	0 0 0 1 1 0	1 0 0 0 0 0 1 0 0 0		
×	0	0	0	0				

結論：bは吸血鬼、cは吸血鬼でない

aはどちらか分からない

※今は(1)から順に真理表を埋めていったが、(4)や(5)から埋めた方が手間が省けて楽

(特に(2)や(3)は面倒なので最後に調べた方がよい)

・恒真文

例1) $p \vee \sim p$

p	$p \vee \sim p$
1	1 $\boxed{1}$ 0 1
0	0 $\boxed{1}$ 1 0

つねに真なる文 ― 恒真文(=論理法則)

特に、命題論理の恒真文は
トートロジー とよばれる
tautology

例2) $p \,\&\, \sim p$

p	$p \,\&\, \sim p$
1	1 $\boxed{0}$ 0 1
0	0 $\boxed{0}$ 1 0

(トートロジーのもともとの意味:同語反復
「AはAだ」)

つねに偽なる文 ― 矛盾文

矛盾とは?
ある文とその否定を連言で結んだ文
$p \,\&\, \sim p$, $(p \vee q \to r) \,\&\, \sim (p \vee q \to r)$ など

恒真文を否定した文は矛盾文となる
$\sim (p \vee \sim p)$ など
「矛盾」ではない

NO. 26

DATE 11/7

・恒真文の判定法

(1) 真理表

例) $(p \to q) \to (\sim q \to \sim p)$ 　―対偶

p	q	(p	$\to$	q)	$\to$	($\sim$	q	$\to$	$\sim$	p)
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1		0			1
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0

(2) 背理法

証明したい命題 p

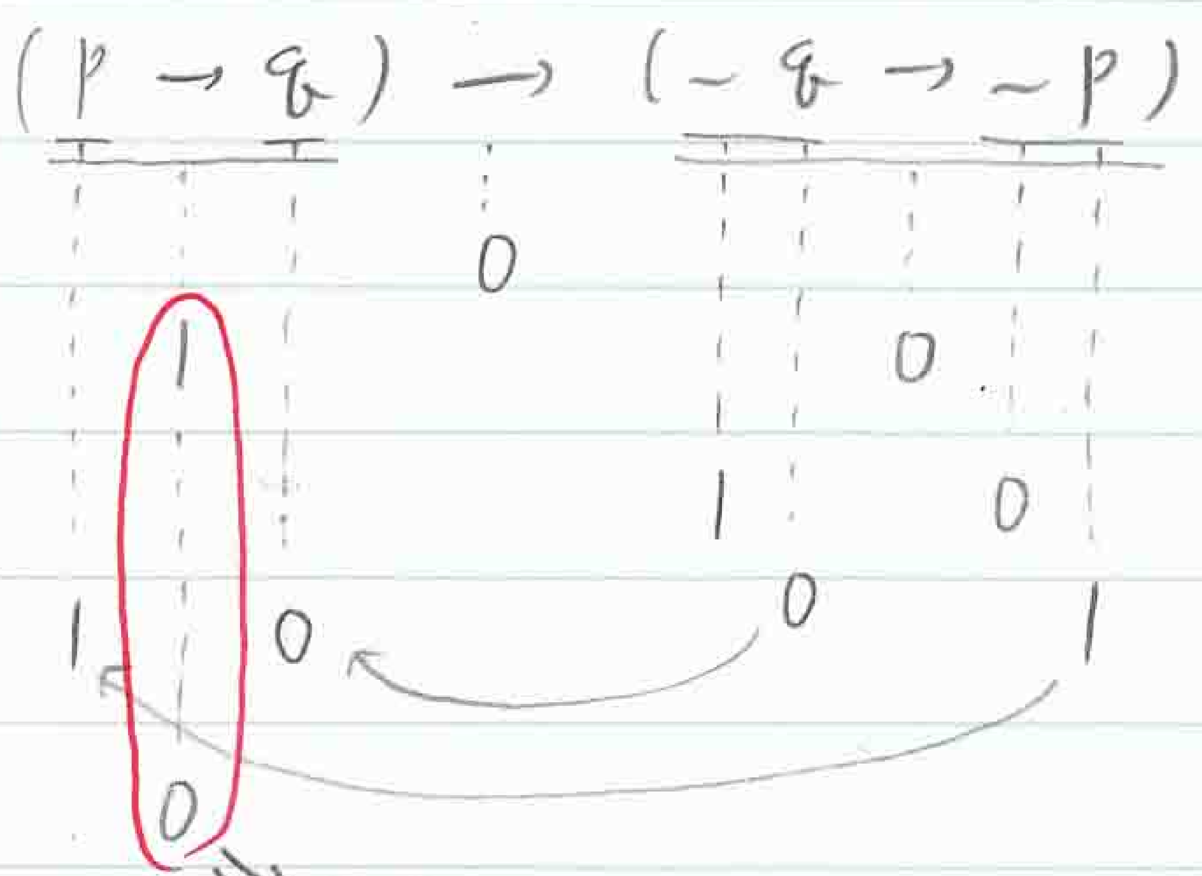
まず、$\sim p$ と仮定する

↓

矛盾 $\Rightarrow \sim\sim p \Rightarrow p$

例) $(p \to q) \to (\sim q \to \sim p)$ がつねに真であることを証明したい

仮定：上の文が偽となることがある



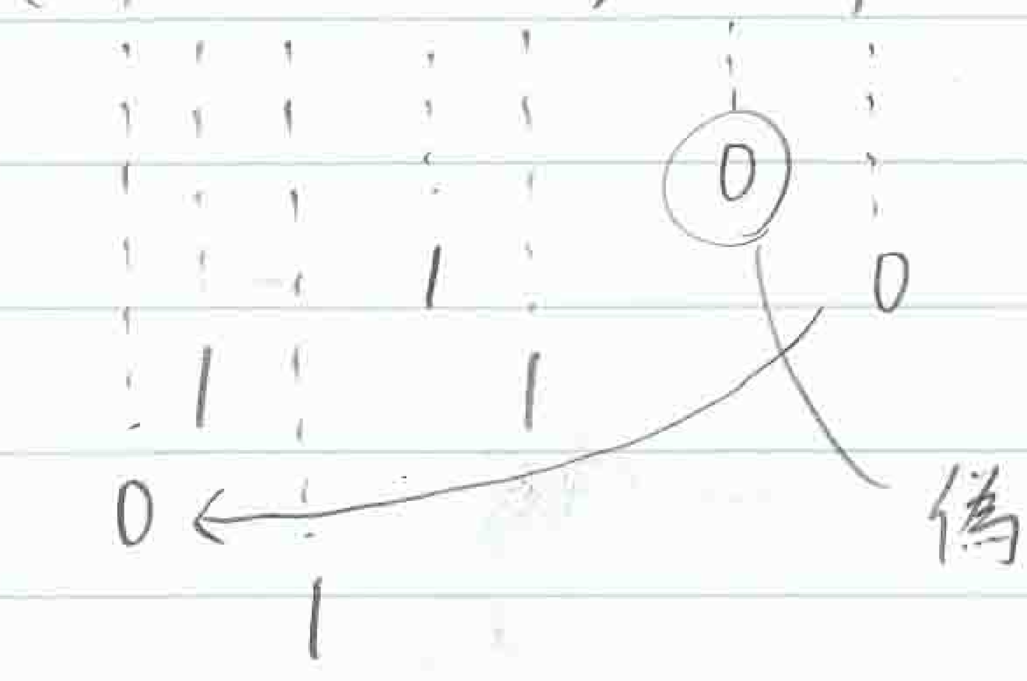
まず真ん中の「→」を偽とおき、確定できるところから埋めていく

⇒ 矛盾

ゆえに恒真文である。

例2)

$((p \vee q) \,\&\, r) \rightarrow p$

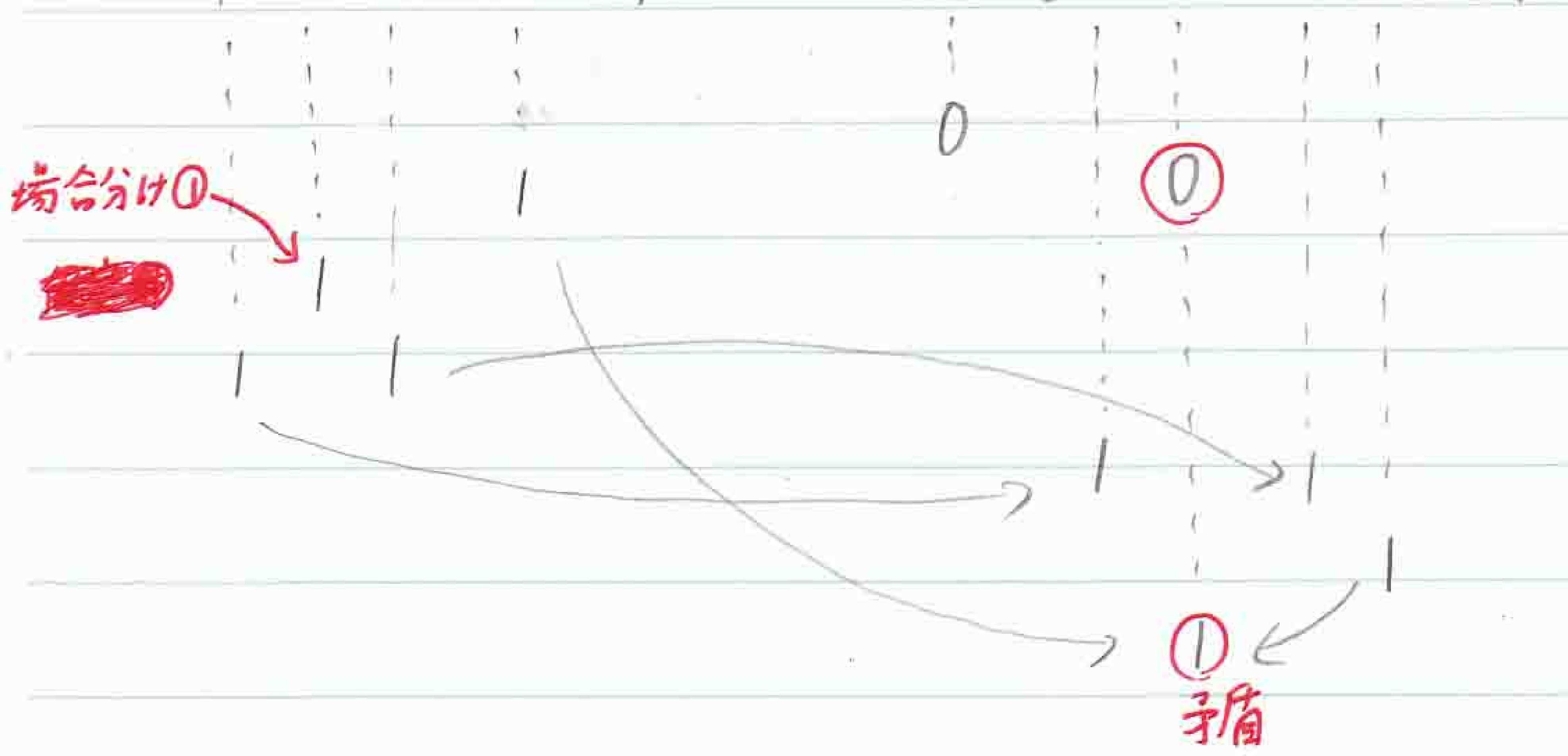


偽とおいても矛盾が生じない

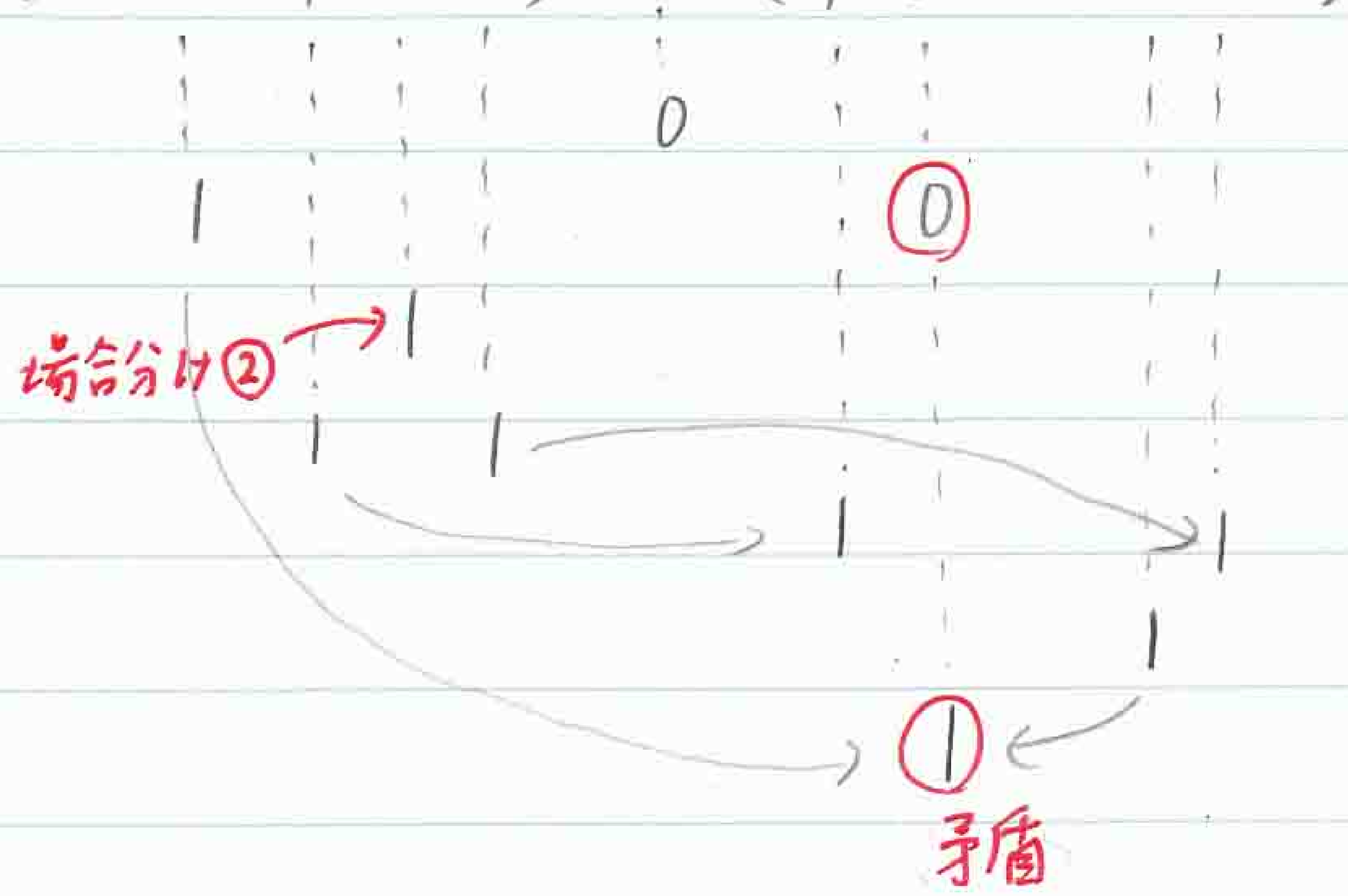
→ 恒真文でない

例3) 場合分けが必要なとき

$(p \,\&\, q) \vee (p \,\&\, r) \rightarrow (p \,\&\, (q \vee r))$



$(p \,\&\, q) \vee (p \,\&\, r) \rightarrow (p \,\&\, (q \vee r))$



①でも②でも矛盾 → 恒真文である

※ ただし、場合分けが多くなると大変!

記論

NO. 28

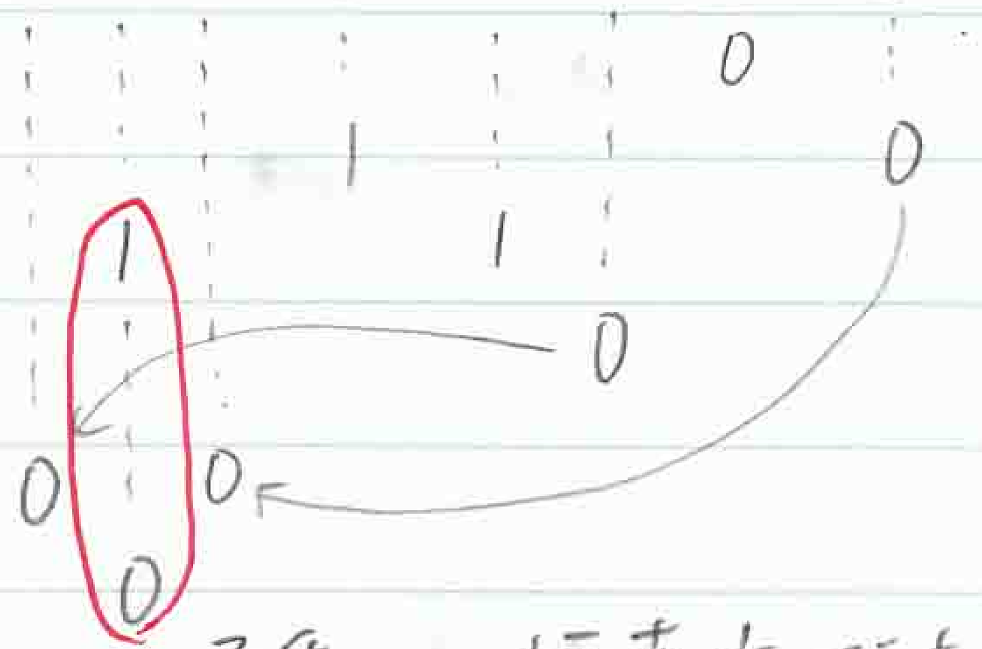
DATE 11/28

問題

(1) $(A \vee B)\ \&\ {\sim}A \to B$

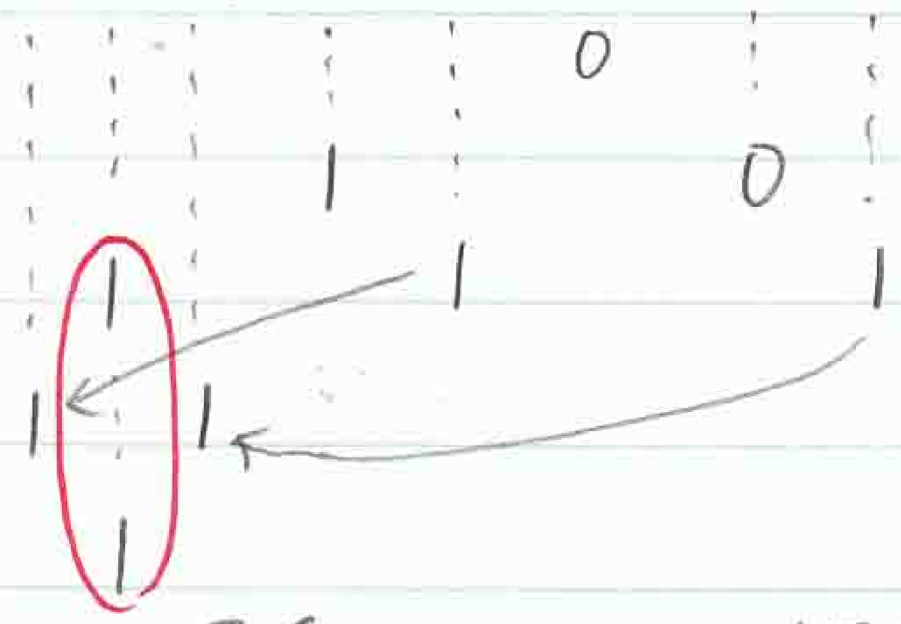
(2) $(A \vee B)\ \&\ A \to {\sim}B$

(1) $(A \vee B)\ \&\ {\sim}A \to B$



矛盾 → 恒真文である

(2) $(A \vee B)\ \&\ A \to {\sim}B$



矛盾しない → 恒真文でない

・恒真文で推論

2つの関係

例)

推論

$A \vee B$
$A \to B$
―――
B

正しい

対応する含意文

$((A \vee B) \,\&\, (A \to B)) \to B$

恒真文

「推論が正しい」＝「含意文が恒真文である」

例題)

ある宝石店に泥棒が入った。
そして調査の結果、次の事実が明らかになった。

(1) 容疑者は a, b, c の3人で、このうち少なくとも1人は犯人である。

(2) a が盗みを行うときは、必ず b を相棒にする。

(3) 犯行時刻に b は行きつけのスナックで酒を飲んでいた。

そこで H 刑事は c が犯人だと結論した。この結論は正しいか。

推論

$A \vee B \vee C$
$A \to B$
$\sim B$
―――
C

この推論は正しい

含意文

$(A \vee B \vee C) \,\&\, (A \to B) \,\&\, \sim B \to C$

矛盾 → 恒真文である

推論の形式的性格 ← 正しさが形式的に決まるということ

※記号論理学＝形式論理学

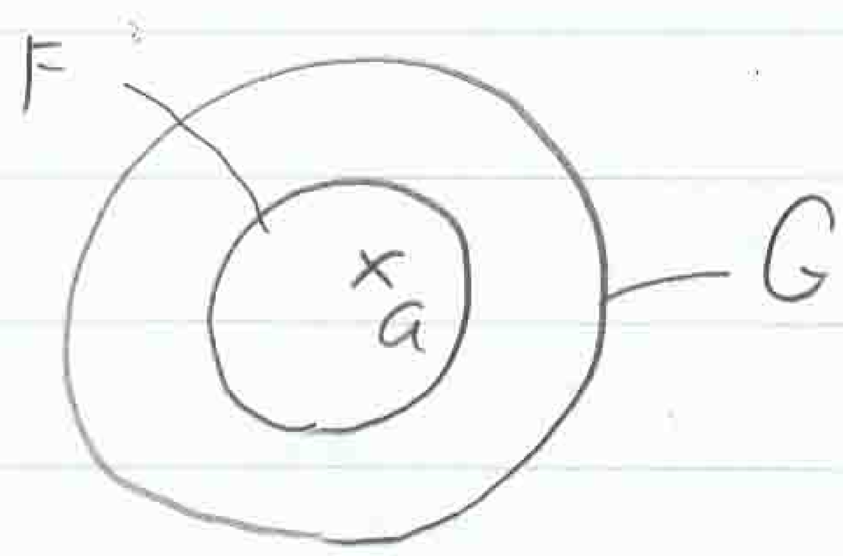
(1) 推論の正しさは文の内容からは独立

(例)

すべての人間は動物である
ソクラテスは人間である
―――――――――――――
∴ソクラテスは動物である

推論の正しさとは
人間・動物・ソクラテスに関わる推論だが、その具体的な内容は関係ない

すべてのFはGである
aはFである
―――――――――――――
∴aはGである



推論の正しさは、少数の論理語による＝文の形式によって決まる
（論理語：文の形式を決定　例）"すべての"）

(例)

王が打つか、または長島が打つ
王は打たない
―――――――――――――
∴長島が打つ

⇒

Pまたは Q
Pでない
―――――――――――――
∴Q

これらの論理語の意味によって
正しさが決まっている

NO. 30

DATE 11/28

問題

(1) aまたはBは、犯人でない。
(2) bが犯人なら、aも犯人でない。

ここから、bは犯人でないと結論できるか。

推論

$\sim A \vee \sim B$

$B \to A$

$\sim B$

含意文

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
(& (& \sim & A & \vee & \sim & B &) & \& & (& B & \to & A &) &) & \to & \sim & B \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & 0 & \\
 & & & & 1 & & & & & & & 1 & & & & & & 1 \\
 & & & & & & 1 & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & 0 & & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & & & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

矛盾 → 恒真文

⇒ 推論「~B」は正しい

・主なトートロジー

1. $p \equiv \sim\sim p$　二重否定の法則

2. $p \equiv p$　同一律

3. $p \vee \sim p$　排中律

4. $\sim(p \,\&\, \sim p)$　矛盾律

5. $p \& p \equiv p$
$p \vee p \equiv p$ } べき等律

6. $p \& q \equiv q \& p$
$p \vee q \equiv q \vee p$ } 交換律

7. $(p \& q) \& r \equiv p \& (q \& r)$
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ } 結合律

8. $p \& (q \vee r) \equiv (p \& q) \vee (p \& r)$
$p \vee (q \& r) \equiv (p \vee q) \& (p \vee r)$ } 分配律

9. $\sim(p \& q) \equiv \sim p \vee \sim q$
$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \& \sim q$ } ド・モルガンの法則

10. $p \& (p \vee q) \equiv p$
$p \vee (p \& q) \equiv p$ } 吸収率

11. $(p \to q) \equiv (\sim q \to \sim p)$ 対偶の法則

12. $((p \to q) \& p) \to q$ 前件肯定式

13. $((p \to q) \& \sim q) \to \sim p$ 後件否定式

NO. 32

DATE 11/28

・命題論理の統語論と意味論

言語

・統語論 syntax (文法に相当)

有意味な表現を確定する。

例) 日本語では…

○「太郎は歩く」

×「は歩く太郎」

①単純な記号を枚挙 ― 語彙

②形成規則を枚挙

・意味論

有意味な表現に意味を付与する。

統語論に則して行う。(全ての表現に対して個別に意味を与えていたらキリがない)

1. 統語論

(1) 語彙

(i) 無数に多くの文記号がある : $p, q, r, \cdots; p_1, p_2, \cdots; q_1, q_2, \cdots$

(ii) 論理定項 (命題論理においては文結合子とよぶ) : $\sim, \&, \vee, \rightarrow, \equiv$

(iii) かっこ : (,)

(2) 形成規則

(i) すべての文記号は整式である
(well-formed formula)

(ii) αとβが整式ならば、次のものも整式である

(a) $\sim \alpha$　　× $\alpha \sim$ 右からつけるのはダメ
(b) $\alpha \& \beta$
(c) $\alpha \vee \beta$
(d) $\alpha \rightarrow \beta$
(e) $\alpha \equiv \beta$

整式の例	整式でない例
p, q　∵(i)	$\& q$
$p \& q$, $(p \& q) \rightarrow r$　∵(i),(ii)	$q \sim \rightarrow p$

NO. 34
DATE 12/5

回帰的規則 (recursive rule)

規則の使用によって産出されたものに対して、再びその規則を適用できる

(2)の(ii)の規則は回帰的である

例) p $\qquad$ p, q

$\sim p$ $\qquad$ $p \& q$

$\sim\sim p$ $\qquad$ $p \& (p \& q)$

$\sim\sim\sim p$ $\qquad$ $p \& (p \& (p \& q))$

⋮ $\qquad$ ⋮

このようにして、無数の整式を作ることができる

2. 意味論

命題論理では、文の真理値だけを問題にする

$p \nearrow$ 真

$\;\;\searrow$ 偽

~~「犬が走る」→~~ 

(1) 任意の文記号に対して、真または偽の値が割り振られる。

どのように割り振るかは自由。

(1つの真理値の割り振りを1つの解釈とよぶ)

(2) 任意の整式α, βに関して

定義

(i) ~αが真である $\overset{def}{=}$ αが偽である

(ii) α&βが真である $\overset{def}{=}$ αとβがともに真である

(iii) $\alpha \vee \beta$ が真である $\overset{def}{\equiv}$ α と β の少なくとも一方が真である

(iv) $\alpha \to \beta$ が 〃 $\overset{def}{\equiv}$ α が偽か、または β が真である

(v) $\alpha \equiv \beta$ が 〃 $\overset{def}{\equiv}$ α と β が同じ真理値をもつ.

例)

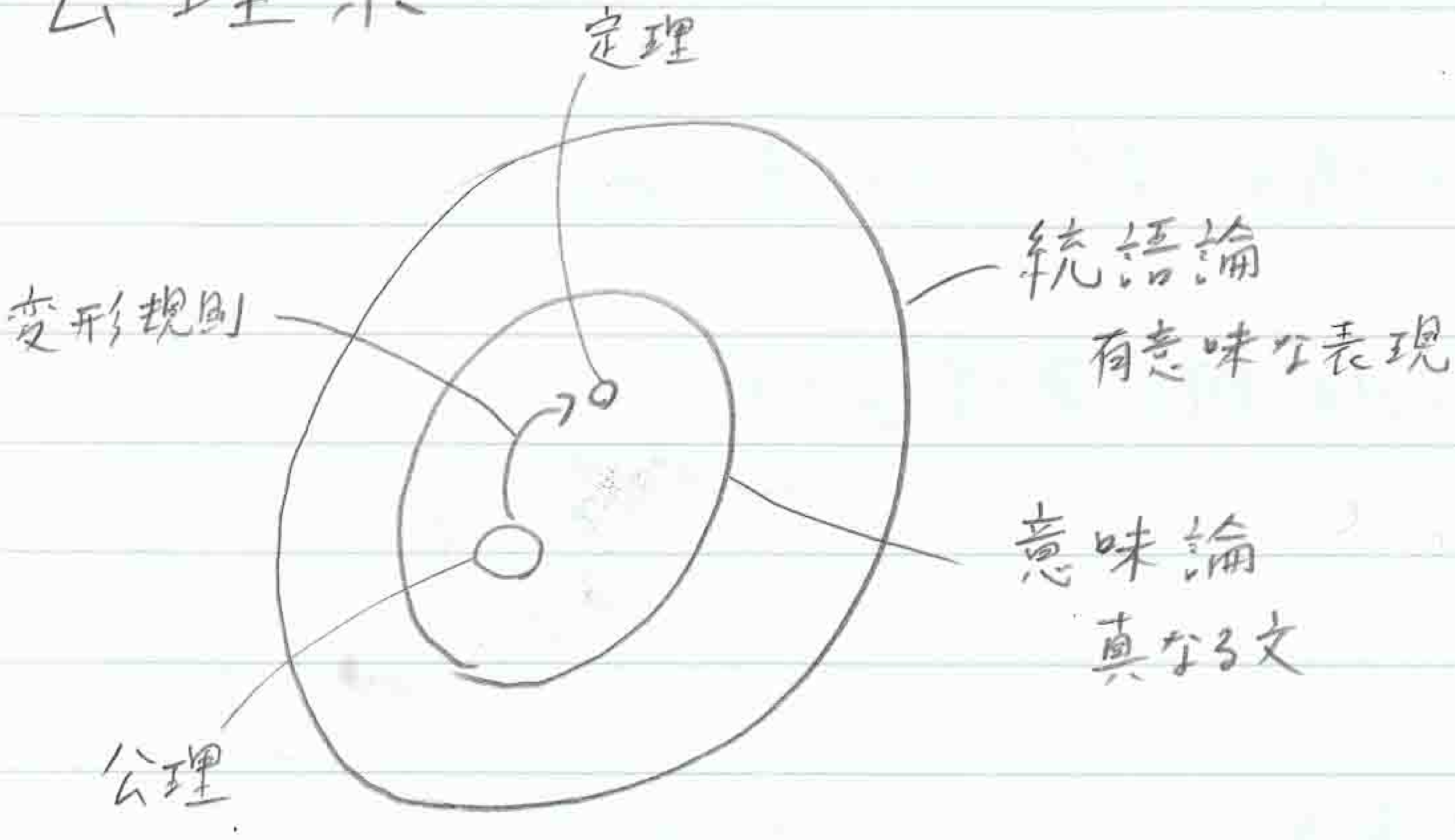
$(p\ \&\ (q \vee p)) \to ((p \vee r)\ \&\ q)$	p	q	r	
1 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1	1	1	0	解釈1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	1	1	1	解釈2
⋮	⋮			⋮

恒真文 — いかなる解釈においても真なる文

NO. 36

DATE 12/5

・公理系



公理と変形規則を定めて真なる文を定理として導き出せるようにしたものを公理系とよぶ。

真なる文のみが導き出される … 健全性
真なる文をすべて導き出せる … 完全性(狭義)
} 完全性(広義)

(完全性をもつようにすることが課題)

・命題論理の公理系 ― ラッセル＝ヒルベルトの公理系

I. 基本記号

(1) 命題変項 p, q, r, … (文記号に相当)
真理値が一定でない

(2) 論理語 ~, ∨ (文結合子に相当)

残りの文結合子は、この2つにより定義される

定義1　$A \,\&\, B \underset{def}{=} \sim(\sim A \vee \sim B)$

〃 2　$A \rightarrow B \underset{def}{=} \sim A \vee B$

〃 3　$A \equiv B \underset{def}{=} (A \rightarrow B) \,\&\, (B \rightarrow A)$

(3) 補助記号　(,), { , }, [,]

Ⅱ. 論理式（整式）

(1) 命題変項は論理式である

(2) Aが論理式ならば、$\sim A$も論理式である

(3) A, Bが論理式ならば、$A \vee B$も論理式である

Ⅲ. 公理

a. $p \vee p \rightarrow p$

b. $p \rightarrow p \vee q$

c. $p \vee q \rightarrow q \vee p$

d. $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \vee p \rightarrow r \vee q)$

IV、変形規則

α. 代入規則

一つの論理式の中の命題変項は、すべて他の1つの論理式で置き換えてよい。
ただし、代入は同時にすべての場所で行う。

例) $p \to p \vee q$

$\Downarrow$ pをr∨sに置き換える

$(r \vee s) \to (r \vee s) \vee q$

× $(r \vee s) \to p \vee q$ すべて同時に換えなければダメ

β. 推論規則

A, Bが任意の論理式であるとき、A→BとAから、Bを得ることができる

V. 定理と証明

公理も定理に含まれるということ

公理に対し変形規則を0回以上適用して得られる論理式を、定理という

公理から定理を得る過程を示した式の表が証明である

定理1 $(q \to r) \to \{(p \to q) \to (p \to r)\}$

証明 1 $(q \to r) \to \{(\sim p \vee q) \to (\sim p \vee r)\}$ ∵ d, α

2 $(q \to r) \to \{(p \to q) \to (p \to r)\}$ ∵ 1, 定義2

結論：

ラッセル＝ヒルベルトの公理系は完全である

つまり

1. 健全である ― 恒真文のみが導き出される
2. 完全である ― すべての恒真文が導き出せる

NO. 4
DATE 10/10

(2) 推論の正しさは、文の事実上の真偽とは独立

(例)

フクロウとキツネはともに鳥である ← 事実としては偽

∴ フクロウは鳥である ← 真

正しい

すべての犬は猫である ← 事実としては偽
ソクラテスは犬である ← 〃

∴ ソクラテスは猫である ← 〃

正しい

※ 前提・結論が事実上正しいかどうかはどうでもいい

記論

NO. 40

DATE 12/12

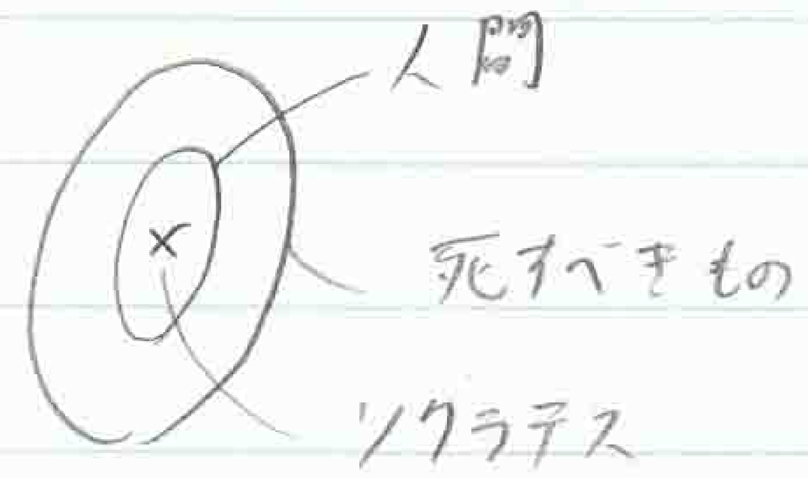
述語論理

・文の内部構造

例) すべての人間は死すべきものである　p

ソクラテスは人間である　q

∴ソクラテスは死すべきものである　r



正しい

⇕　　正しくない

$p \,\&\, q \rightarrow r$

1 1 1 0 0

このような真理値もあり得る

↳ 恒真文でない

命題論理だと、正しい推論も正しくないものになってしまう

なぜか?

⇓

命題論理では「人間」「死すべきもの」などの構成要素まで考えないから

⇓

文の内部構造まで考える = 述語論理

・述定 predictation

ソクラテスは人間である

主語　　述語

↳特定の個体　↳属性(性質)

・述定の記号化

特定の個体を表す名辞 : a, b, c, … アルファベットの小文字
(=個体定項) (ただし x, y, z を除く)

述語(一定の性質を表す名辞) : F, G, … ; A, B
(=述語定項)
何か意味をもつこともある (M=人間 など)
普通は F, G から使う

例) $\underbrace{\text{ソクラテスは}}_{a}$ $\underbrace{\text{人間である}}_{F}$

Fa と表記する (aF はダメ)
— 述語を関数に見立てている (f(x), f(2) のように)

・変項と開放文

(1) Ma
a → 特定個体
M → 特定述語

(2) Mx ← 個体変項の文
x → 不定個体

(3) Φa
Φ → 不定述語 ← 述語変項の文

変項を含む文

例) ソクラテスは人間である — 真理値が定まる
└ 閉鎖文 closed sentence

x は人間である — 真理値が定まらない (xによって変わる)
└ 開放文 open sentence

※ただし、変項を含む文 = 開放文 とは限らない!
変項を含む文でも閉鎖文となることがある (後述)
あくまでも、開放文の定義は「真理値が定まらない文」

・名辞の分類
└ term

個別名辞 singular term (単称名辞)
- 個体定項
- 個体変項

一般名辞 general term
- 述語定項
- 述語変項 (授業では扱わない)

・多項述語

例)

(1) ソクラテスは人間である

項の数が異なる

(2) 神が世界を創造した

トムがジャックをなぐった

東京は大阪より東にある

述語の性格により、完全な文をなすのに必要な個別名辞の数が異なる

述語の項：述語が完全な文をなすのに必要な個別名辞

項の数による述語の分類

1項述語 ： Pt $(P(t))$

2項 〃 ： Pt_1t_2 $(P(t_1, t_2))$

3項 〃 ： $Pt_1t_2t_3$ $(P(t_1, t_2, t_3))$

⋮

n項 〃 ： $Pt_1t_2 \cdots t_n$ $(P(t_1, t_2, \cdots t_n))$

例) $\underbrace{\text{神}}_{a}$が$\underbrace{\text{世界}}_{b}$を$\underbrace{\text{創造した}}_{F}$ $\Rightarrow$ Fab

aとbの順番は重要!

3項述語の例

(3) トムがジャックにボールをあげた

$\underbrace{\text{名古屋}}_{a}$は$\underbrace{\text{東京}}_{b}$と$\underbrace{\text{大阪}}_{c}$の$\underbrace{\text{間にある}}_{F}$ $\Rightarrow$ $Fabc$

NO. 44

DATE 12/12

量化子

・量化子（「すべての〜」）

(1)「すべては流転する」

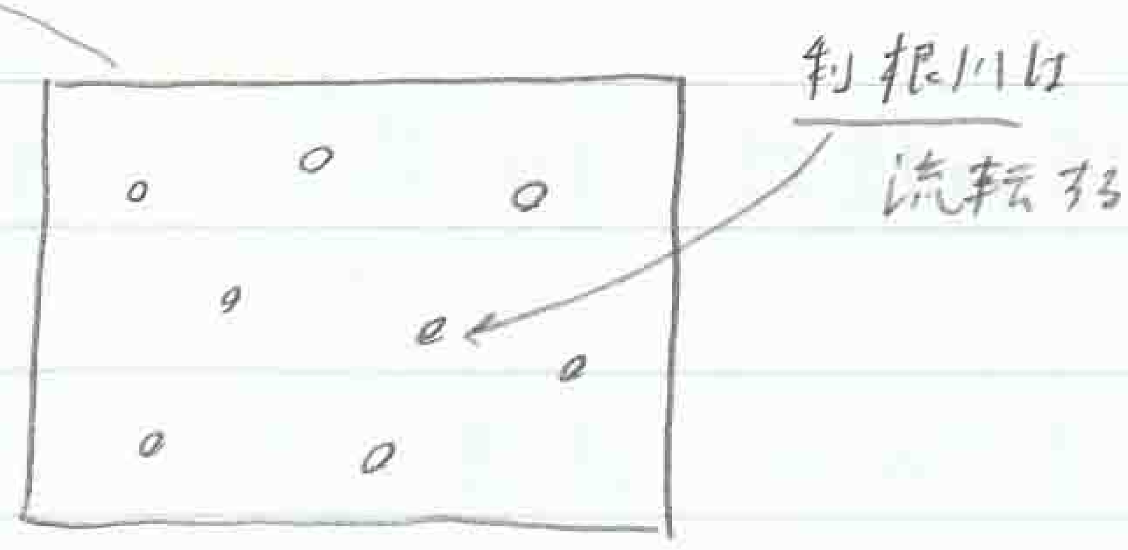
$\underbrace{\text{すべては}}$ $\underbrace{\text{流転する}}_{F}$

話題である対象がある

〃

個体領域 domain

（議論領域 universe of discourse）



(2) $\forall x \; Fx$

$\forall$ → すべての

= すべてのxについて、xはFである

・開放文と量化子

- $\forall x \; Fx$ — 閉鎖文
- $F(x)$ — 開放文

　xは不定個体

Fx

↓

xを量化 — 全称量化

$\forall x \; Fx$ 　 全称 ← 議論領域内のすべての個体について、ある性質を述べる

Fx
$\forall x Fx$ 「開放文(Fx)を量化する」という
"
「量化子を文に作用させる」

(全称) 全称量化子

- $Mx \to Cx$ — 開放文
- $\forall x(Mx \to Cx)$ — 閉鎖文

- Gxy — 開放文
- $\forall x\, Gxy$ ⇐ xは量化されたが、yはそうではない — 閉鎖文

量化は特定の変項に対してなされる

変項を量化する = 変項を束縛する

例) $\forall x\, Gxy$
束縛されていない — 自由変項
束縛されている — 束縛変項

開放文は、すべての変項が束縛されると閉鎖文になる!
真理値が定まらない文

例) xは流転する : xが自由変項であるため、真理値が定まらない — 開放文

すべてのxは流転する : xが束縛されたため、真理値が定まる — 閉鎖文

量化子の作用域

・$\forall x\ Fx \to Gx$

束縛変項

自由変項

作用

・$\forall x\ (Fx \to Gx)$

束縛変項

作用

量化子の作用域
（スコープ）

（練習）

(a) $\forall x\ (Fx \to Lx)\ \&\ Kx$ 開放文

自由変項

(b) $Fa \lor \forall x\ (Kx \to Gxa)$ 閉鎖文

(c) $\forall x\ (Kx \to (Fy\ \&\ Gxa))$ 開放文

自由

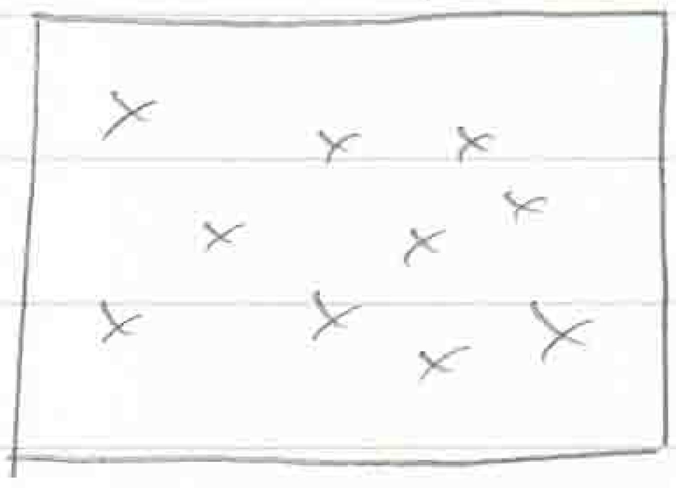
(d) $\forall y\ \forall x\ (Kx \to (Fy\ \&\ Gxa))$ 閉鎖文

(e) $\forall x\ (Kx \to \forall y\ Gxy\ \&\ \forall z\ Fzy)$ 開放文

自由

・その他の量化子

議論領域U



述語定項

F

変項を束縛する量化子はいろいろあるが…?

すべての　全称量化子
多くの
少しの
半分の　　論理学で扱う量化子はこの2つだけ
少なくとも1つの(ある)　存在量化子
1つの
2つの
⋮

論理学で全称と存在の2つの量子化のみを扱う理由

1) 数学の形式化に重要

2) 論理的な性質が明瞭で単純

3) 明瞭な論理的性質をもつ量化子は、全称量化子と存在量化子で定義できる

例) 1つのFがある

⇒ あるxがあって、xはFであり、
　すべてのyについて、yがFならばy=x

・存在量化子

existential quantifier

$\underline{E}$ → $\exists$ で表す

使用例

(a) あるものは保守的である　　$\exists x\, Cx$
保守的である: C

(b) 一角獣がいる（存在する）　　$\exists x\, Ux$
一角獣: U

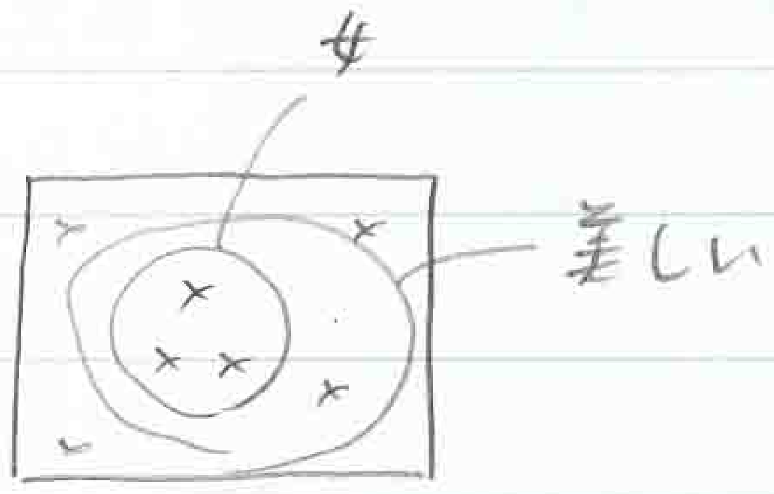
(c) ジェーンよりすてきなものがいる　　$\exists x\, Fxj$
ジェーン: j, よりすてきなものがいる: F

読み方

$\exists x Fx$ …
1) Fなるものがある
2) 〃 存在する
3) 〃 少なくとも1つある
4) あるxがあって、xはFである

$\forall x Fx$ ⟺ すべてのxについて xはFである

「すべてのFはGである」
「あるFはGである」 } の記号化



すべての$\underset{W}{\underline{\text{女}}}$は$\underset{B}{\underline{\text{美しい}}}$

言い換えると…

すべてのxについて、
xが女ならば、xは美しい

$$\forall x\,(Wx \rightarrow Bx)$$

ある女は美しい

女であって、かつ美しいものが存在する
あるxがあって、xは女でありかつ美しい

$$\exists x\,(Wx \,\&\, Bx)$$

(練習)

(1) $\underset{a}{\underline{\text{太郎}}}$はすべての$\underset{F}{\underline{\text{女性}}}$を$\underset{G}{\underline{\text{愛する}}}$

→ すべてのxについて、xが女性ならば、太郎はxを愛する

$$\forall x\,(Fx \rightarrow Gax)$$

論理的真理

(例)

金田が投げるなら、長島が打つ

金田が投げる

∴長島が打つ

⇕

対応する条件文

{(金田が投げるなら、長島が打つ) かつ (金田が投げる)}

ならば (長島が打つ)

一般的に書くと…

$$\frac{\begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{matrix}}{C} \iff \overbrace{(P_1 \text{ かつ } P_2 \cdots \text{ かつ } P_n)}^{\text{正しい}} \text{ ならば } \overbrace{C}^{\text{正}}$$

正しい ＝同値＝ **恒真** (＝論理的真理)

推論が正しい ⇔ 対応する条件文が恒真

つまり、推論の正しさを示すには、対応する条件文が恒真であることを示せばよい

条件文の形をしたもの以外の恒真文の例

・雨が降るか、または雨が降らない

・P または P でない　**排中律**

記論

NO. 50

DATE 12/19

(2) 次郎はある女性を愛する
b

↓

あるxがあって、xは女性であり、かつ次郎はxを愛する

$\exists x (Fx \,\&\, Gbx)$

・多重量化

一つの文に複数の量化子が含まれるもの

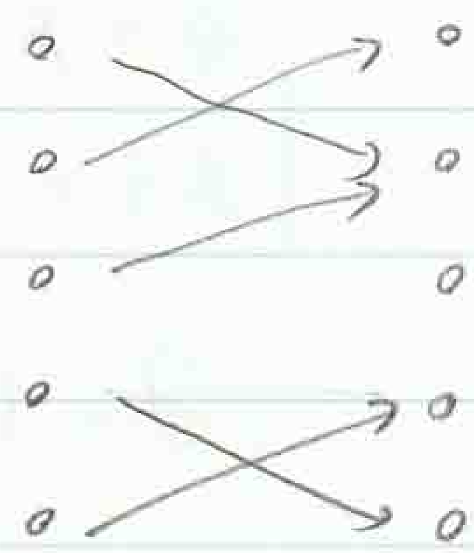
例) すべてのものがあるものを愛する

解釈1) すべてのものがそれぞれあるものを愛する

↓

すべてのxについて、xはあるものを愛する

すべてのxについて、あるyがあって、xがyを愛する



$\forall x \exists y Lxy$

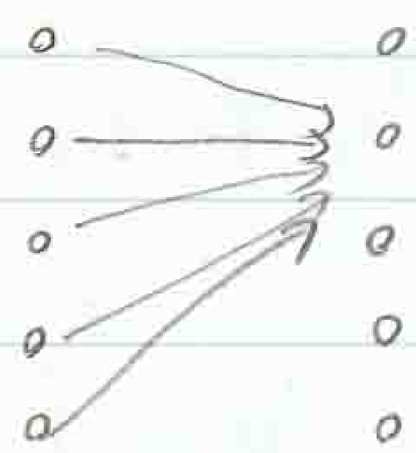
$\begin{cases} \forall x \exists y Lxy & :真 \\ \exists y \forall x Lxy & :偽 \end{cases}$

解釈2) すべてのものがある同一のものを愛する

↓

あるyがあって、すべてのものがyを愛する

あるyがあって、すべてのxについて、xはyを愛する



$\exists y \forall x Lxy$

$\begin{cases} \forall x \exists y Lxy & :真 \\ \exists y \forall x Lxy & :真 \end{cases}$

記号化の例題

・すべての人は万物を愛する
$\underline{人}_F$ $\underline{愛する}_L$

↓

∀x (Fx → xは万物を愛する)

↓

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x\,(Fx \rightarrow \forall y\,Lxy) \\ \equiv \\ \forall x\,\forall y\,(Fx \rightarrow Lxy) \end{array}\right.$$

・ある人は万物を愛する

↓

∃x (Fx & xは万物を愛する)

↓

$\exists x\,(Fx\ \&\ \forall y\,Lxy)$

・すべての男はすべての女を愛する
$\underline{男}_F$ $\underline{女}_G$ $\underline{愛する}_L$

$\forall x\,(Fx \rightarrow \forall y\,(Gy \rightarrow Lxy))$

or

$\forall x\,\forall y\,(Fx\ \&\ Gy \rightarrow Lxy)$

・ある男はある女を愛する
$\underline{男}_F$ $\underline{女}_G$ $\underline{愛する}_L$

$\exists x\,(Fx\ \&\ \exists y\,(Gy\ \&\ Lxy))$

or

$\exists x\,\exists y\,(Fx\ \&\ Gy\ \&\ Lxy)$

・すべての男はそれぞれある女を愛する

$$\forall x(Fx \to \exists y(Gy \,\&\, Lxy))$$

・ある女をすべての男が愛する

$$\exists y(Gy \,\&\, \forall x(Fx \to Lxy))$$

…以上が記号化の基本！ 以下、発展

・馬の頭はすべて大きい

「馬の頭である」をFとおき、$\forall x(Fx \to Gx)$とする ⇒ ×

基本単位にもって分解できる！

xは馬の頭である

(xは馬である：Fx
xはyの頭である：Gxy)

ある馬がいて、xはそれの頭である

＝

あるyがあって、yは馬であり、かつxはyの頭である

⇓

$$\exists y(Fy \,\&\, Gxy)$$

最終的に、上の例文は…

$$\forall x(\exists y(Fy \,\&\, Gxy) \to Lx)$$

記論

NO. 53

DATE 1/9

・馬の頭はすべて動物の頭である

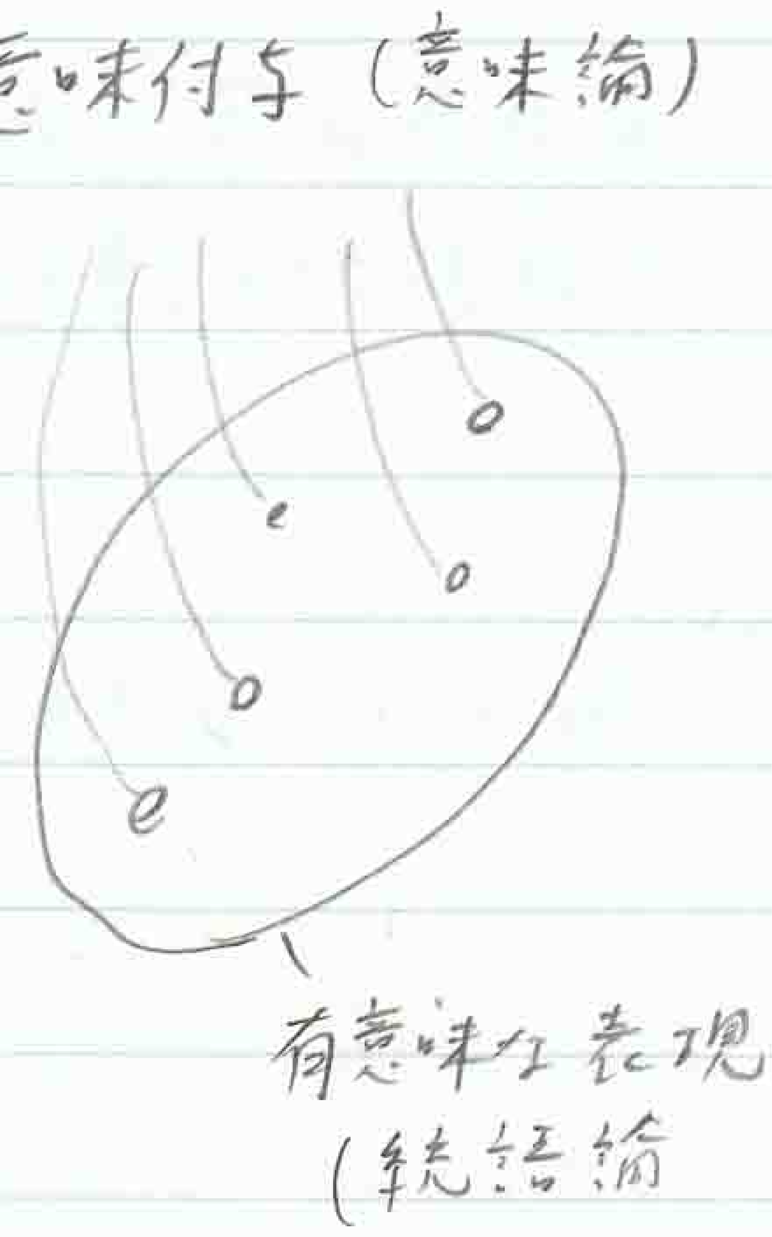
xは馬の頭である：$\exists y(Fy \,\&\, Gxy)$
xは動物の頭である：$\exists z(Hz \,\&\, Gxz)$

$\forall x(\exists y(Fy \,\&\, Gxy) \rightarrow \exists z(Hz \,\&\, Gxz))$

・述語論理の統語論と意味論

言語

- 統語論 … 有意味な表現の範囲の確定
  (文法に相当)
- 意味論 … 各表現に意味を与える



・述語論理の統語論

(1) 語彙

(a) 個体定項 a, b, c, d, …

(b) 個体変項 x, y, z, …

(c) 述語定項 A, B, …, F, G, …

(d) 文記号 p, q, r, …

(e) 量化子 ∀, ∃

(f) 文結合子 ~, &, ∨, →, ≡

(g) 補助記号 (,)

(2) 形成規則

有意味な表現 = 整式 (well-formed formula)

(a) すべての文記号は整式である

(b) $t_1, t_2, \cdots, t_n$ が個体名辞で、P が n 項述語ならば、
$Pt_1t_2 \cdots t_n$ は整式である
例) Fa / Gxb など

(c) x が個体変項で、α が x を自由変項として含む整式ならば、
(i) $\forall x \alpha$, (ii) $\exists x \alpha$ は整式である。

例) $\overset{\text{整式}}{Fx} \Rightarrow \forall x Fx$, $\exists x Fx$ も整式

$Fx \to Gxy \Rightarrow \forall x(Fx \to Gxy), \exists x(Fx \to Gxy) \Rightarrow \exists y \forall x(Fx \to Gxy)$

(d) α と β が整式ならば、次のものも整式である。
(i) $\sim \alpha$ (ii) $\alpha \,\&\, \beta$ (iii) $\alpha \vee \beta$ (iv) $\alpha \to \beta$ (V) $\alpha \equiv \beta$

例) $p \to q$
$Fx \to Gxy$

例) $\forall x(Fx \to \forall y(Gy \to Hxy))$ が整式であることを示す

Gy, Hxy, Fx が整式
$\Rightarrow Gy \to Hxy$ も整式 ($\because$ d)
$\Rightarrow \forall y(Gy \to Hxy)$ 〃 ($\because$ c)
$\Rightarrow Fx \to \forall y(Gy \to Hxy)$ 〃 ($\because$ d)
$\Rightarrow \forall x(Fx \to \forall y(Gy \to Hxy))$ 〃 ($\because$ c)

NO. 56

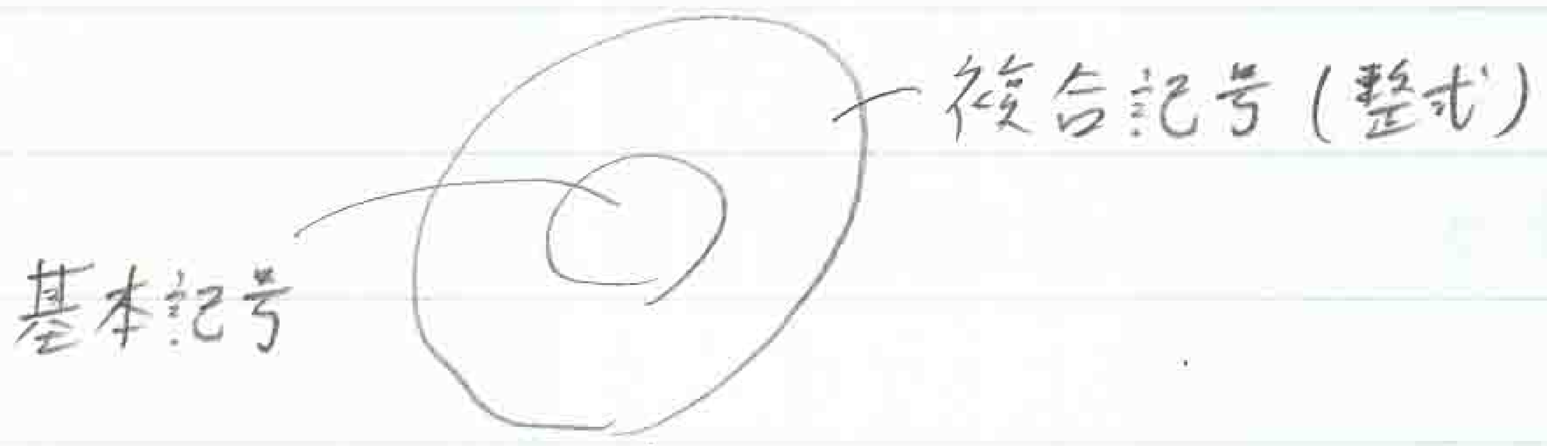
DATE 1/9

・述語論理の意味論

注(1)

基本記号(但し論理語は除く)に意味を与えることを、**解釈**とよぶ。

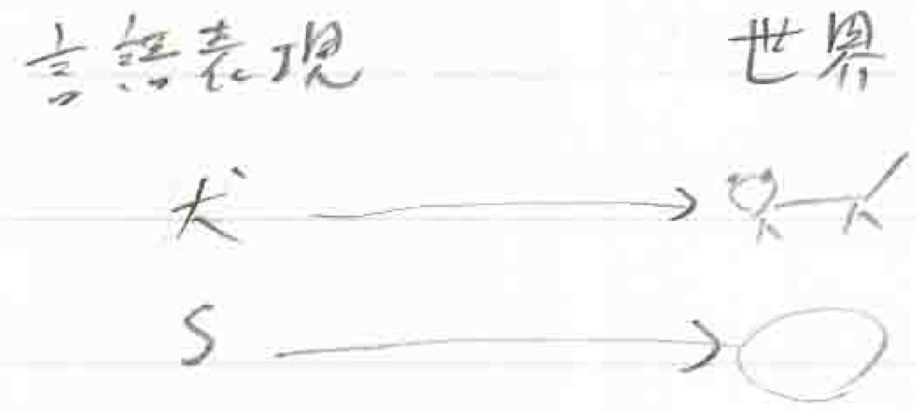
例：「a」という記号に「犬」という意味を与える



注(2)

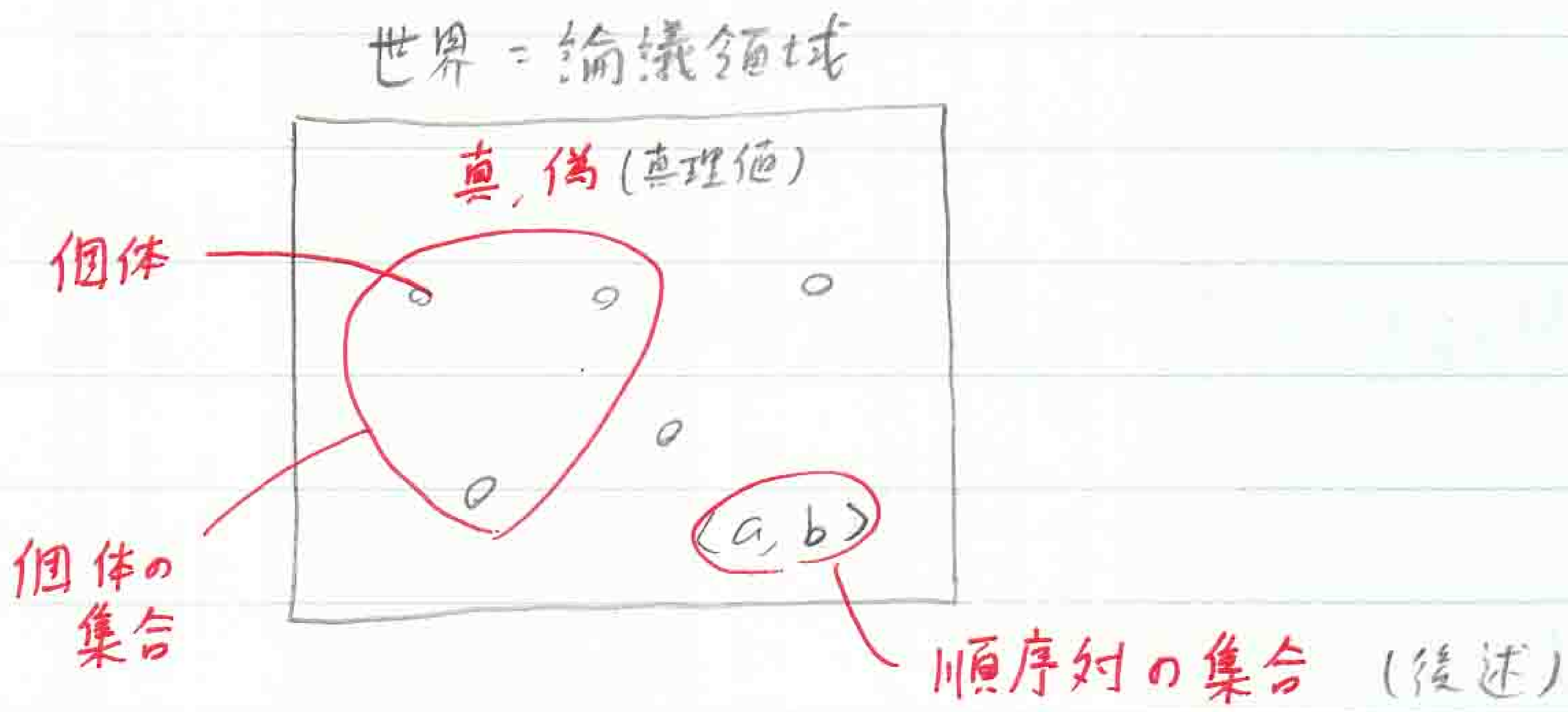
述語論理では、世界は論議領域と同一視される

(一般に、言語表現は世界の中のなにかと対応している



その「世界」が、述語論理では論議領域である、ということ)

では、その論議領域には何が含まれるのか？

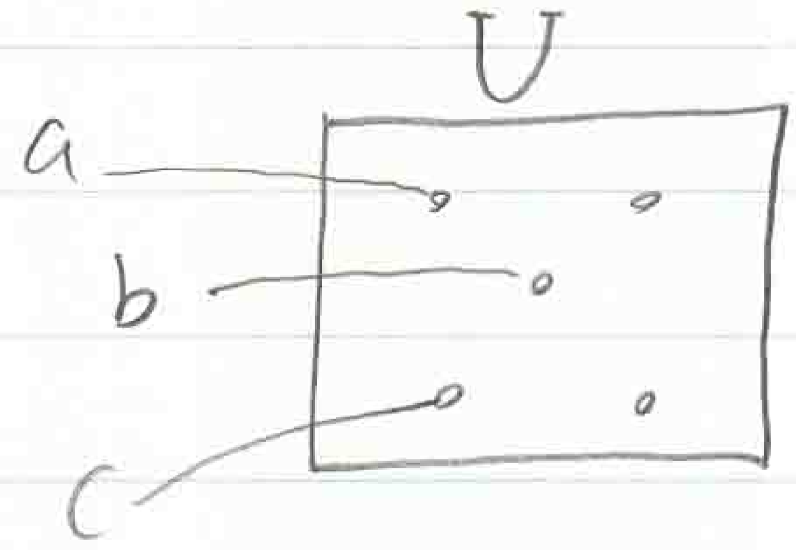


紀論

NO. 57

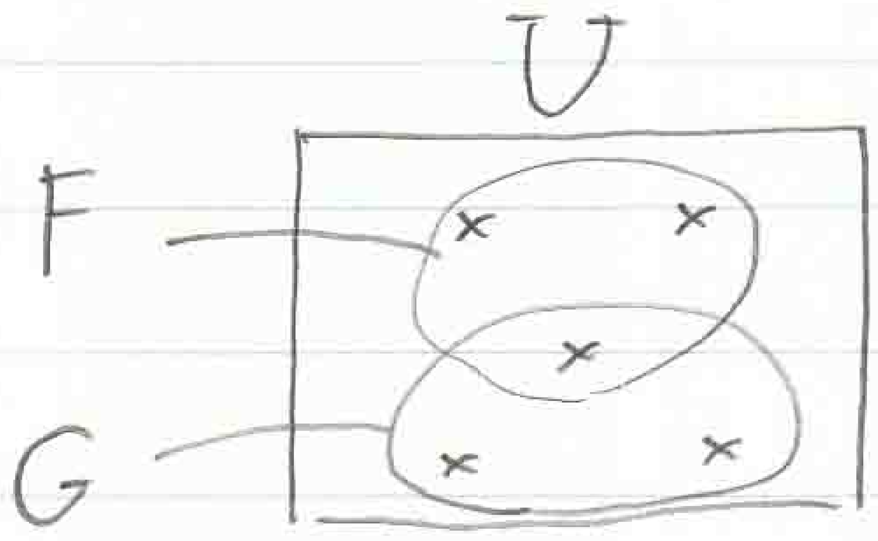
DATE 1./9

(1) 個体定項の解釈



(2) 述語定項の解釈

・1項述語

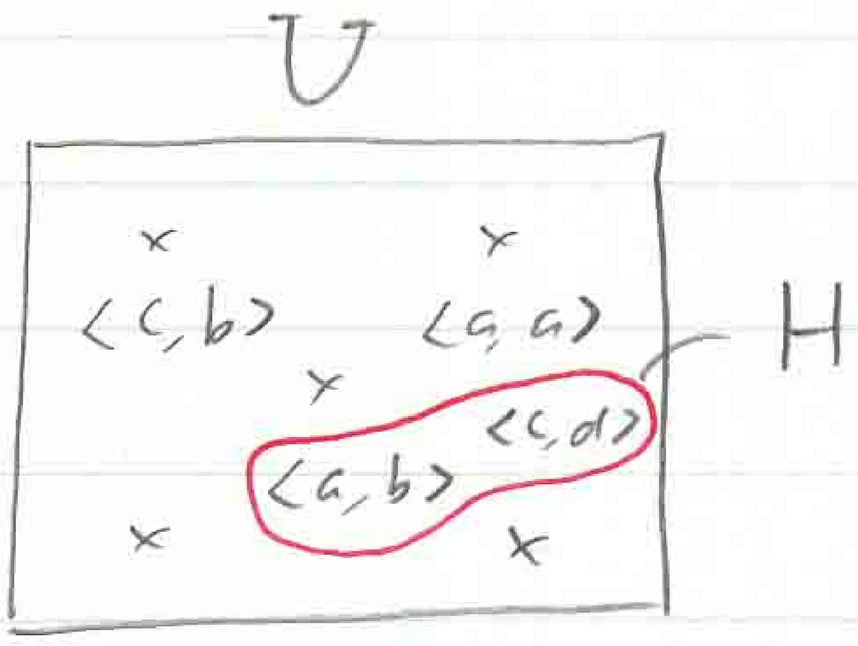


・2項述語

H_{xy} : xはyを愛する

aはbを愛する ⟨a, b⟩

cはdを愛する ⟨c, d⟩

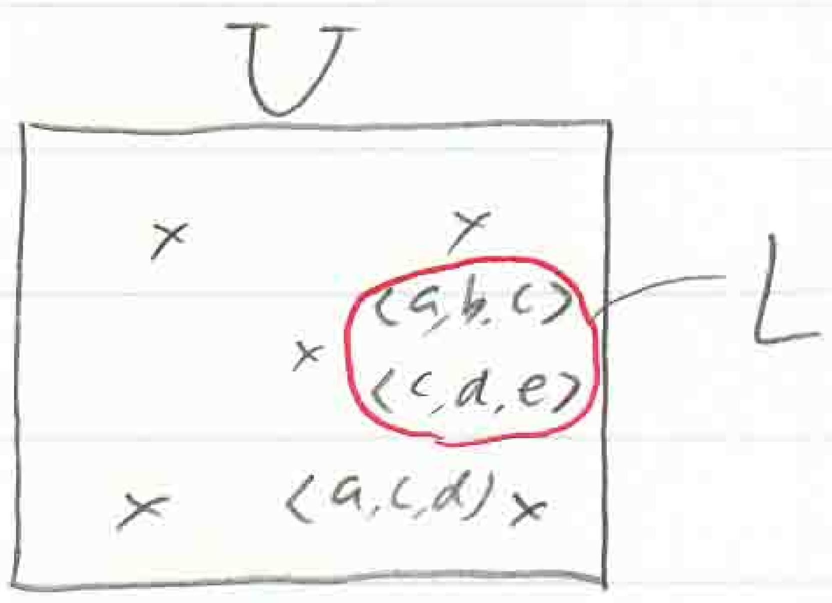


NO. 58

DATE 1/9, 1/16

・3項述語

Lxyz：xはyとzの間にある



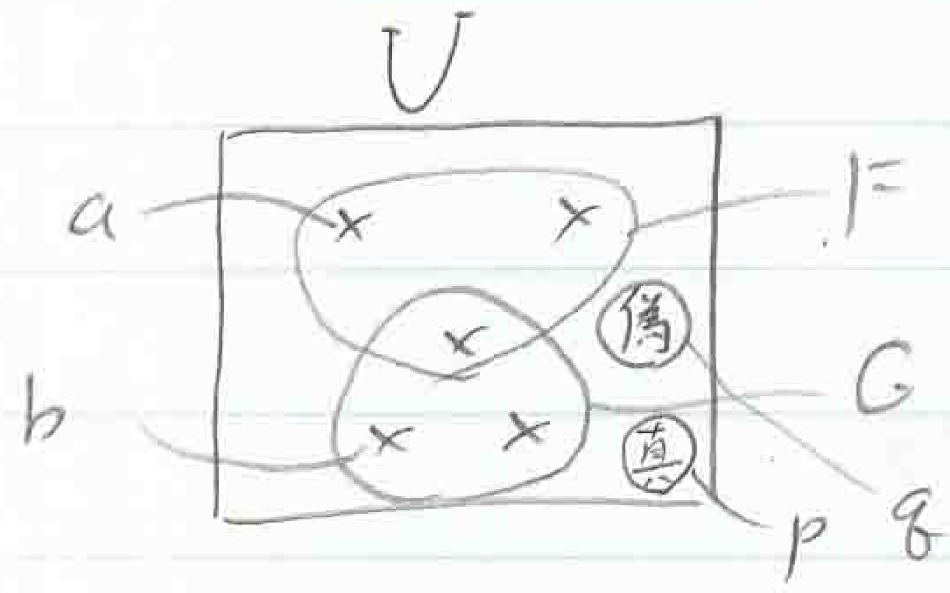
・n項述語には、順序n組の集合が対応づけられる

※「解釈」について

1つの解釈は、

①論議領域
②個体定項の解釈
③述語定項の解釈
④文記号の解釈

によって成り立っている。



(3) 文記号の解釈

文記号は真または偽の値が対応づけられる

記論

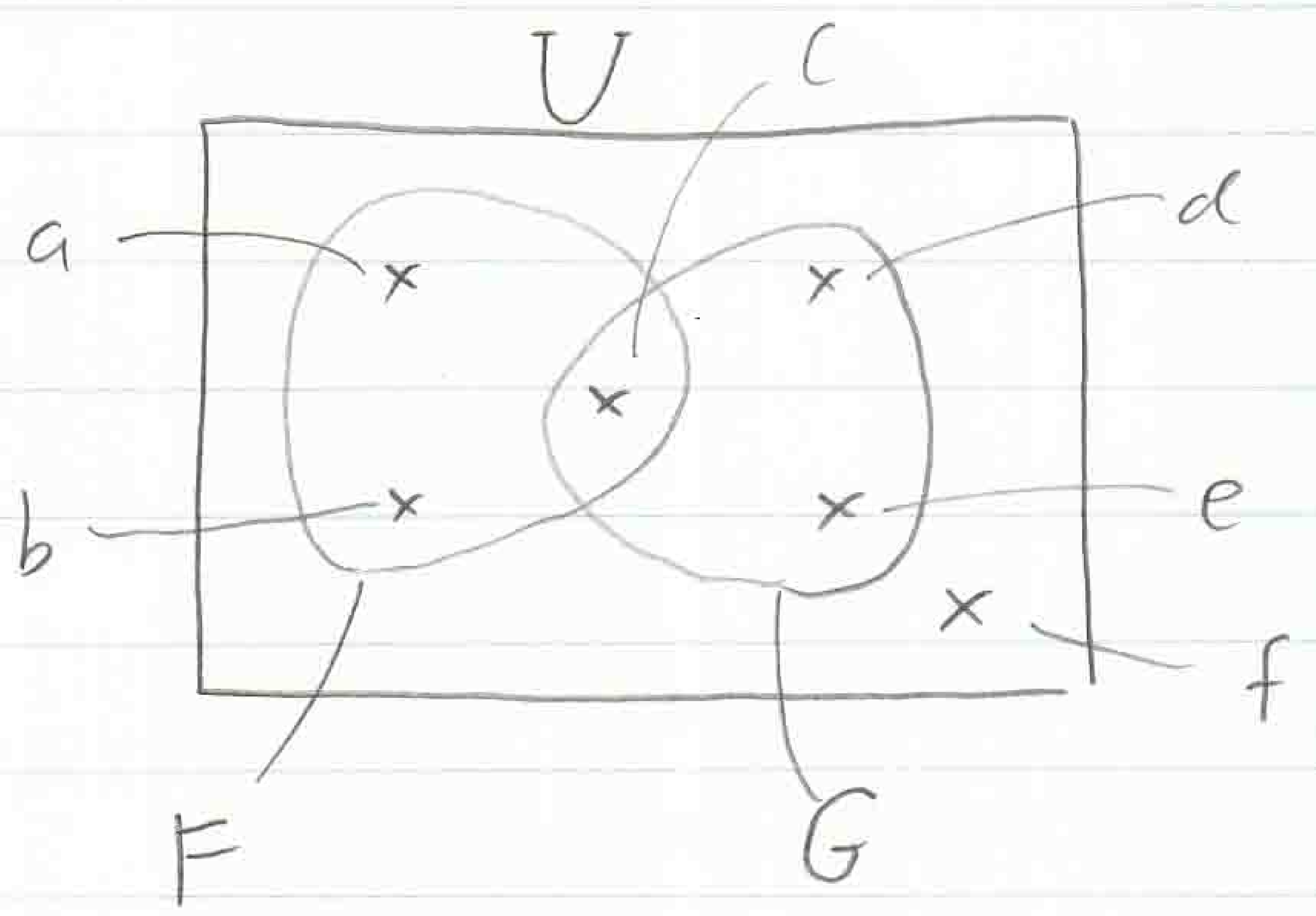
NO. 59
DATE 1/16

(4) Pt という形の閉鎖文の真理条件

Pt が解釈 I において真である

≡ I で t に対応づけられる個体が
　I で P に対応づけられる集合の要素である ($I(t) \in I(P)$)

例)



$F : \{a, b, c\}$
$G : \{c, d, e\}$

このような状況で…

Fa : 真	Ga : 偽
Fc : 真	Gc : 真
Fd : 偽	Gd : 真
Ff : 偽	Gf : 偽

具体的には、a が太郎, d が花子, F が「少年である」のとき
　Fa「太郎は少年である」―真
　Fd「花子は少年である」―偽
ということ
a が F の要素に含まれる

論理語の種類と論理学の分野

①文結合子
ない
または
かつ
ならば

命題論理

述語論理(学)

授業ではココまで

②量化子
すべての
ある

様相論理

③様相子
必然である
可能である

(参考書)

「いかにして推理するか いかにして証明するか」 内井惣七 (やさしい)

「真理・証明・計算」 内井惣七 (コンピューターとの関連)

☆「日常言語の論理学」 オールウド ほか (日常言語と記号言語の関連)

「論理学」 野矢茂樹 (論理学にまつわる哲学的な問題)

「記号論理学」 清水義夫 (理系のテキスト)

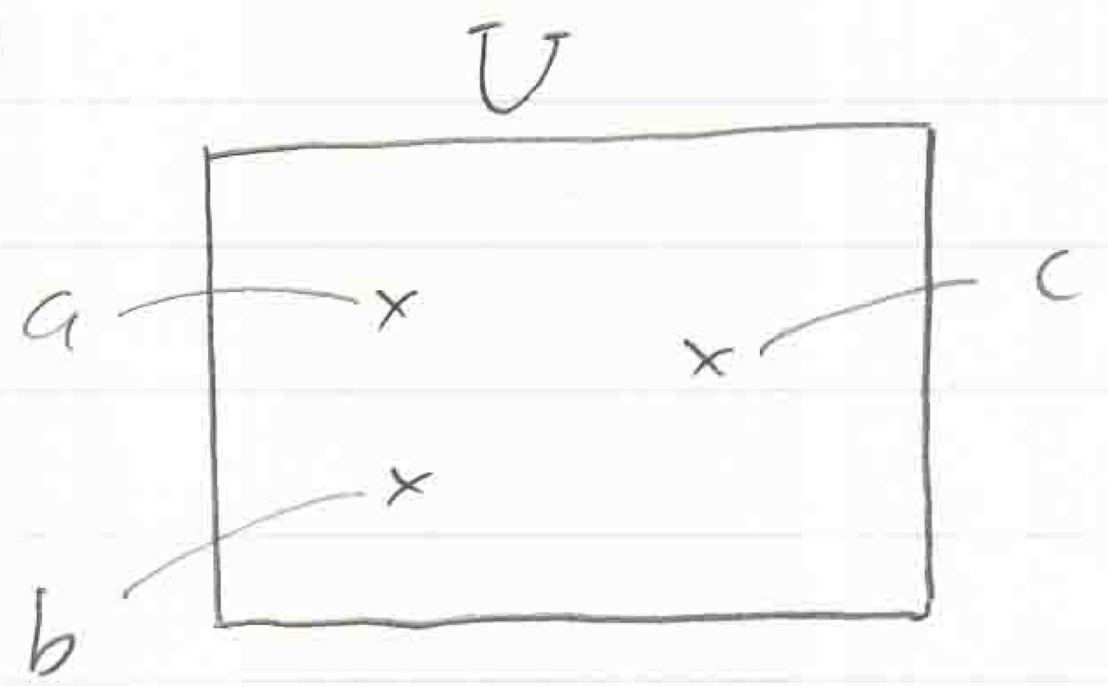
「論理学の方法」 W.V.O. クワイン (論理学の基本・精神)

(5) $Pt_1t_2\cdots t_n$ という形の閉鎖文の真理条件

$Pt_1t_2\cdots t_n$ が解釈 I で真である

$$\equiv \langle I(t_1), I(t_2), \cdots, I(t_n) \rangle \in \underbrace{I(P)}_{\text{順序}n\text{組の集合}}$$

例)



$F : \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$
$G : \{\langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle\}$

(具体的には、
Fxy : xはyが好きである
Gxy : xはyが嫌いである
というようなこと (bの感情は複雑…))

このような状況のとき…

Fab : 真
Fac : 偽
Fba : 偽 (順序注意!)
Gab : 偽
Gbc : 真
Gca : 偽 (〃)

(6) $\sim\alpha$, $\alpha \& \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \to \beta$, $\alpha \equiv \beta$ の真理条件

(i) $\sim\alpha$が解釈Iで真である ≡ αがIで偽である

(ii) $\alpha \& \beta$ 〃 ≡ αとβがIで真である

(iii) $\alpha \vee \beta$ 〃 ≡ αとβの少なくとも一方がIで真である

(iv) $\alpha \to \beta$ 〃 ≡ Iで、αが偽か、またはβが真である

$\sim\alpha \vee \beta$ と同じ

(v) $\alpha \equiv \beta$ 〃 ≡ Iで、αとβが同じ真理値をもつ

(7) 存在量化文の真理条件

任意の個体変項tを唯一の自由変項として含む文をA(t)とする。

例) Fx, $\sim Fx$, $Fx \to Gx$ など

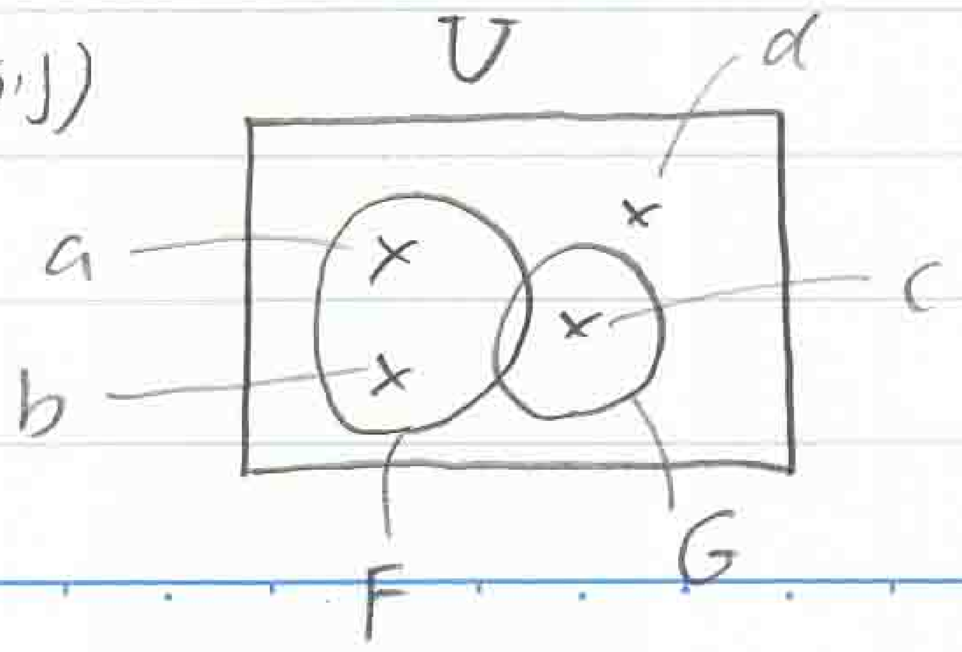
× $Fx \to Gy$

自由変項を2つ含むのはダメ

$\exists t A(t)$ が解釈Iで真である

≡ Iの議論領域の中のある個体について、A(t)がIで真である

例)



$\exists x Fx$: 真（∵ Fa や Fb が真だから）

$\exists x \sim Fx$: 真（∵ Fc や Fd が偽だから）

$\exists x (Fx \& Gx)$: 偽（∵ FかつGであるものがない）

$\exists x (Fx \to Gx)$: 真（∵ xがcやdのとき Fx が偽）

記論

NO. 62

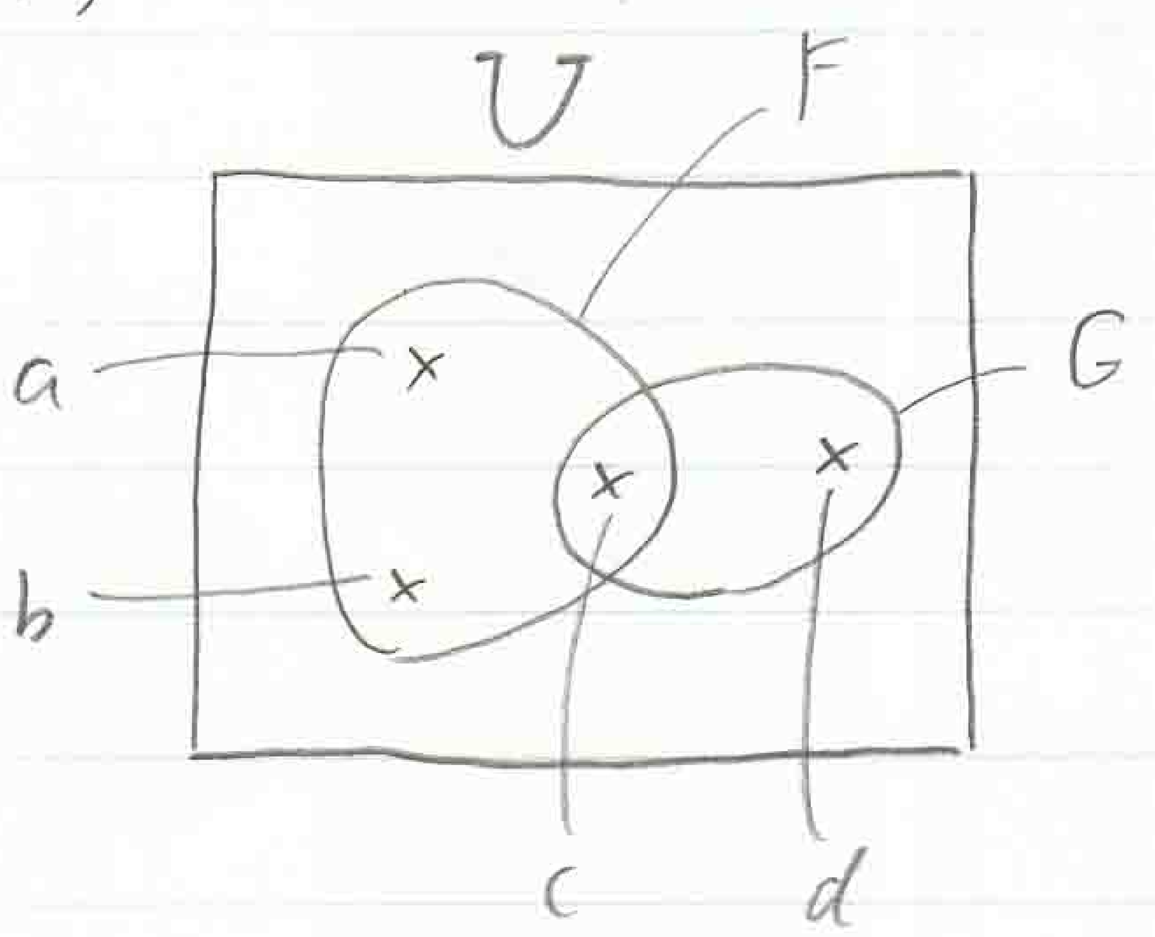
DATE 1/16

(8) 全称量化文の真理条件

$\forall t\, A(t)$ が解釈 I で真である

$\equiv$ I の論議領域の中のすべての個体について $A(t)$ が真である

例)



$\forall x\, Fx$: 偽 (d)

$\forall x\, Gx$: 偽 (a, b)

$\forall x\, (Fx \lor Gx)$: 真

$\forall x\, (Fx \to Gx)$: 偽 (a, b)

$\forall x \exists y\, (Fx \to Gy)$: 真

すべての x について、$Fx \to Gy$ をみたすような y が少なくても1つ存在するか、ということ

$\Downarrow$

Gy が真ならば $Fx \to Gy$ も真なので、

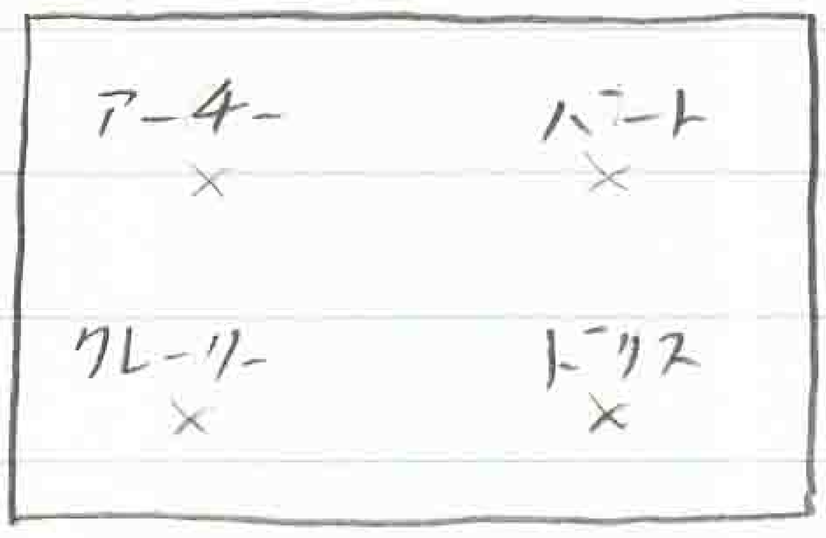
Gy が真となるような y が少なくても1つ存在すればよい

$\Downarrow$

Gc, Gd が真なので、$\forall x \exists y\, (Fx \to Gy)$ は真

練習

U



a : アーチー

b : バート

c : クレーリー

d : ドリス

B : {アーチー, バート}

G : {クレーリー, ドリス}

L : {⟨アーチー, アーチー⟩, ⟨バート, バート⟩, ⟨クレーリー, クレーリー⟩, ⟨アーチー, クレーリー⟩,
⟨アーチー, ドリス⟩, ⟨バート, クレーリー⟩, ⟨クレーリー, アーチー⟩, ⟨ドリス, アーチー⟩}

(B : 男である　G : 女である　Lxy : xはyを好きである)

以下の文の真理値を求めよ。

(a) Ga

(b) $\forall x\, Lax$

(c) $\sim Lad \vee \sim Bd$

(d) $\sim \exists x\, Gx$

(e) $\forall x\, Lxx$

(f) $\exists x\, (Bx \,\&\, \forall y\, (Gy \to Lxy))$

(g) $\forall x\, \forall y\, (Bx \,\&\, Gy \to Lyx)$

(h) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (Lxy \,\&\, Lyz \to Lxz)$

NO. 64

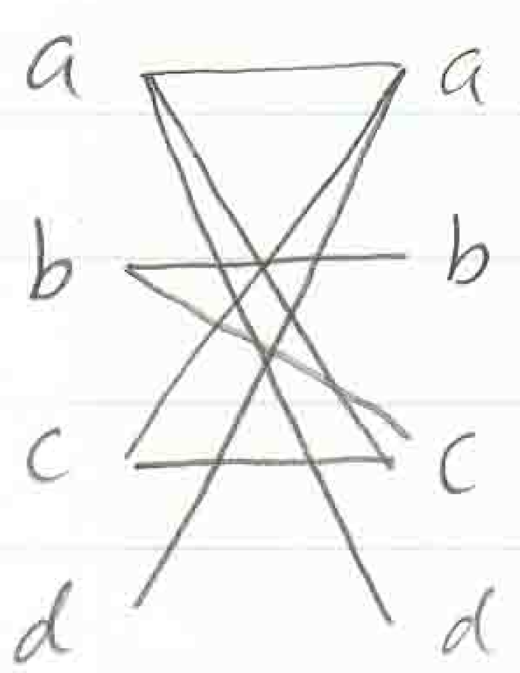
DATE 1/16

☆ まず条件を分かりやすく整理する!

B : {a, b}

G : {c, d}

L :



(a) Ga : 偽

(b) $\forall x Lax$: 偽 (a, b)

(c) $\sim Lad \vee \sim Bd$: 真

(d) $\sim \exists x Gx$: 偽 ($\exists x Gx$ が真)

(e) $\forall x Lxx$: 偽 (d)

(f) $\exists x (\underset{a,b}{Bx} \,\&\, \forall y (\underset{c,d}{Gy} \rightarrow \underset{a,b}{Lxy}))$: 真 (a)

(aは男で、かつ全ての女(=c,d)が好き)

(g) $\forall x \forall y (\underset{a,b}{Bx} \,\&\, \underset{c,d}{Gy} \rightarrow Lyx)$: 偽 (b, d)

記論

NO. 65

DATE 1/16

(h) $\forall x \forall y \forall z\,(Lxy \,\&\, Lyz \to Lxz)$

場合分け

$x=y$ のとき　$Lxx \,\&\, Lxz \to Lxz$
どんなx, zについても成り立つ

$y=z$ のとき　$Lxz \,\&\, Lzz \to Lxz$
どんなx, zについても成り立つ

} この2つは調べる必要なし

$x=z$ のとき　$Lxy \,\&\, Lyx \to Lxx$

x, y, z が異なるとき　— 偽　(例えば、$\langle x, y, z\rangle = \langle b, c, a\rangle$)

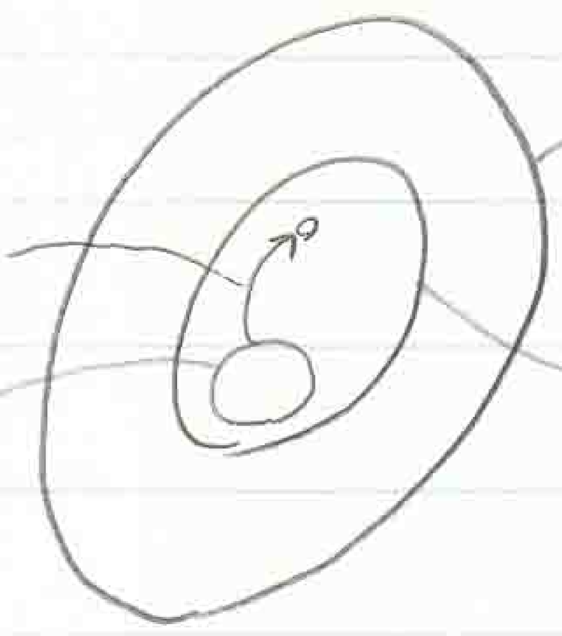
よって、文の真理値は偽

NO. 66

DATE 1/23

述語論理の自然演繹体系

・形式化



命題論理：恒真文（トートロジー）

述語論理：すべての解釈において真である文（恒真文）

（述語論理のすべての解釈を確かめるのは不可能なので、うまく公理を作って恒真文の集合＝定理の集合とすることができれば、定理をみたすかどうかで恒真文か否かを判断できる）

すべての恒真文を、そしてそれらだけを定理として導き出せる公理系を、完全な公理系という　この公理系では完全性が成り立つ

述語論理においても、完全な公理系は存在する
―― 述語論理の完全性 とよぶ

・形式化の２つの方法

①公理化
一組の公理と一組の推論規則によって、恒真文を定理として導き出す

②自然演繹体系を作る
公理を立てずに、一組の推論規則だけで恒真文を定理として導き出す

記論

NO. 67

DATE 1/23

・述語論理の自然演繹体系

(1) 連言導入

$$\frac{p \quad q}{p \,\&\, q}$$

(p, q が存在するとき, p & q を導き出してよい)

(2) 連言除去

$$\frac{p \,\&\, q}{p}\ ,\quad \frac{p \,\&\, q}{q}$$

(p & q が成り立つとき, p や q を導き出してよい)

(3) 選言導入

$$\frac{p}{p \vee q}\ ,\quad \frac{q}{p \vee q}$$

(p, q の前や後ろに選言をつなげてもよい)

(4) 選言除去

$$\frac{p \vee q \quad p \to r \quad q \to r}{r}$$

(この3つが成り立つなら, r を導き出してよい)

例

(1) $p \,\&\, q$ 　仮定

$\Downarrow$

(2) p 　(1), 連言除去

$\Downarrow$

(3) $p \vee q$ 　(2), 選言導入

NO. 68

DATE 1/23

(5) 二重否定導入

$$\frac{p}{\sim\sim p}$$

(6) 二重否定除去

$$\frac{\sim\sim p}{p}$$

(7) 同値導入

$$\frac{p \to q \qquad q \to p}{p \equiv q}$$

(8) 同値除去

$$\frac{p \equiv q}{(p \to q)\ \&\ (q \to p)}$$

(9) 含意除去

$$\frac{p \to q \qquad p}{q}$$

(modus ponens
前件肯定式)

(10) 含意導入

$$\frac{\left[\begin{array}{ll} p & \text{仮定} \\ \vdots & \\ q & \end{array}\right.}{p \to q}$$

pを仮定として導き出せるもの

例

(1) p 仮定

(2) $p \vee q$ (1), 選言導入

(3) $\sim\sim(p \vee q)$ (2), 二重否定

(4) $p \to \sim\sim(p \vee q)$ 含意導入

(11) 否定導入

$$\left[\begin{array}{l} p \quad \text{仮定} \\ \vdots \\ q \,\&\, \sim q \;\leftarrow \text{矛盾} \end{array}\right.$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$\sim p$$

(例) $\dfrac{p \to q \quad \sim q}{\sim p}$ を示したい

証明

(1) $p \to q$　前提
(2) $\sim q$　〃
(3) p　仮定
(4) q　(1), (3), 含意除去
(5) $q \,\&\, \sim q$　(4), (2), 連言導入
(6) $\sim p$　否定導入

$((p \to q) \,\&\, \sim q) \to \sim p$ を示したい

証明

(1) $(p \to q) \,\&\, \sim q$　仮定
(2) $p \to q$　(1), 連言除去
(3) $\sim q$　(1), 〃
(4) p　仮定
(5) q　(2), (4), 含意除去
(6) $q \,\&\, \sim q$　(5), (3), 連言導入
(7) $\sim p$　否定導入
(8) $((p \to q) \,\&\, \sim q) \to \sim p$　含意導入

命題論理学

○文結合子

・単文と複文

例）太郎は歩くか、または走る

⇓

太郎は歩く ＋ または ＋太郎は走る

単文

それ以上、単純な文には分析できないような文

SV, SVO, SVOO

複文

単文に文結合子を適用して構成した文
（接続詞, 否定詞）

文結合子

かつ, または, …だから, …けれども, ～の前に, …ならば, …ない など

※異なる文結合子は文を

論理的に異なる仕方で結合する

＝

構成された複文の論理的性格が異なる

＝

帰結関係が異なる

記論

NO. 70

DATE 1/23

(12) 全称例化

$$\frac{\forall x_i\ A(x_i)}{A(t)}$$

注 $A(t)$ は A に現れるすべての x_i を任意の個体名辞でおき換えたもの

例) $A(x)$: $Fx \to Gx$

$A(t)$: $Ft \to Gt$

例 $\forall x\,(Fx \to Gx)$

Fa

Ga

∵) (1) $\forall x\,(Fx \to Gx)$ 前提

(2) Fa 〃

(3) $Fa \to Ga$ (1), 全称例化

(4) Ga (2), (3), 含意除去

(13) 全称普偏化

$$\frac{A(x_i)}{\forall x_i\ A(x_i)}$$

※ この規則には一定の条件が必要

(ややこしいのでここでは扱わない)

(14) 存在例化

$$\frac{\exists x_i\ A(x_i)}{A(dx)}$$

※ (上と同様)

紀論

NO. 71

DATE 1/23

(15) 存在普遍化

$$\frac{A(t)}{\exists x_i A(x_i)}$$

注) $A(x_i)$ は、$A(t)$ のすべての t を x_i におき換えたものでなくてもよい

$$\frac{Fa \rightarrow Ga}{\exists x(Fx \rightarrow Ga)}, \quad \frac{Fa \rightarrow Ga}{\exists x(Fx \rightarrow Gx)}$$ でちらもOK

NO. 72
DATE 1/30

自然演繹法の練習問題（プリント）　推論が正しいことを証明する

1.1
ジャック	a
フランス人	F
金持ち	G

$$\frac{\begin{array}{l} Fa \\ \forall x(Fx \rightarrow Gx) \end{array}}{Ga}$$

〈証明〉　　　　何をしたのか書く

(1) Fa　　前提

(2) $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$　　〃

(3) $Fa \rightarrow Ga$　　(2) 全称例化

(4) Ga　　(1)、(3) 含意除去

1.2
トム	a
けち	F
アメリカ人	G

$$\frac{\begin{array}{l} Fa \\ \forall x(Gx \rightarrow \sim Fx) \end{array}}{\sim Ga}$$

∵) (1) Fa　　前提

仮定の範囲を示す

(2) $\forall x(Gx \rightarrow \sim Fx)$　　〃

(3) $Ga \rightarrow \sim Fa$　　(2) 全称例化

(4) Ga　　仮定

(5) $\sim Fa$　　(3)、(4) 含意除去

(6) $Fa \,\&\, \sim Fa$　　(1)、(5) 連言導入

(7) $\sim Ga$　　否定導入

1.3

メアリー	a
フランス人	F
貧乏	G

$$\frac{\sim Fa \qquad \forall x(Gx \to Fx)}{\sim Ga}$$

∵)

(1)	$\sim Fa$	前提
(2)	$\forall x(Gx \to Fx)$	〃
(3)	$Ga \to Fa$	(2) 全称例化
(4)	Ga	仮定
(5)	Fa	(3), (4) 含意除去
(6)	$Fa \,\&\, \sim Fa$	(5), (1) 連言導入
(7)	$\sim Ga$	否定導入

(1.4, 1.5) は後述)

2.1

受験生	F
遊ぶ	G
太郎	a
不良	H

$$\frac{\forall x(Fx \to \sim Gx) \qquad Ha \,\&\, Fa}{\exists x(\sim Gx \,\&\, Hx)}$$

∵)

(1)	$\forall x(Fx \to \sim Gx)$	前提
(2)	$Ha \,\&\, Fa$	〃
(3)	$Fa \to \sim Ga$	(1) 全称例化
(4)	Ha	(2) 連言除去
(5)	Fa	(2) 連言除去
(6)	$\sim Ga$	(3), (5) 含意除去
(7)	$\sim Ga \,\&\, Ha$	(6), (4) 連言導入
(8)	$\exists x(\sim Gx \,\&\, Hx)$	(7) 存在普遍化

2.2

受験生	F
遊ぶ	G
花子	a
高校3年生	H

$\forall x(Fx \to \sim Gx)$
$Ha \,\&\, Ga$
―――――――――
$\exists x(Hx \,\&\, \sim Fx)$

∵) (1) $\forall x(Fx \to \sim Gx)$ 前提
(2) $Ha \,\&\, Ga$ 〃
(3) $Fa \to \sim Ga$ (1) 全称例化
(4) Ha (2) 連言除去
(5) Ga (2) 連言除去
(6) Fa 仮定
(7) $\sim Ga$ (3), (6) 含意除去
(8) $Ga \,\&\, \sim Ga$ (5), (7) 連言導入
(9) $\sim Fa$ 否定導入
(10) $Ha \,\&\, \sim Fa$ (4), (9) 連言導入
(11) $\exists x(Hx \,\&\, \sim Fx)$ (10) 存在普遍化

(2.3, 2.4 は後述)

3.1 すべてのラクダはやさしい御者が好きだ
= すべての $\underbrace{\text{ラクダ}}_{F}$ は すべての $\underbrace{\text{やさしい}}_{G}$ $\underbrace{\text{御者}}_{H}$ が $\underbrace{\text{好きだ}}_{L}$

ターダン	a
モハメッド	b

$\forall x \forall y(Fx \,\&\, Gy \,\&\, Hy \to Lxy)$
$Fa \,\&\, Hb \,\&\, \sim Lab$
―――――――――
Fa

∵) (1) $\forall x \forall y (Fx \& Gy \& Hy \rightarrow Lxy)$ 前提
(2) $Fa \& Hb \& \sim Lab$ 〃
(3) $\forall y (Fa \& Gy \& Hy \rightarrow Lay)$ (1) 全称例化
☆ 全称例化は 1つずつしかできない
(4) $Fa \& Gb \& Hb \rightarrow Lab$ (3) 全称例化
(5) Fa (2) 連言除去
(6) Hb 〃 〃
(7) $\sim Lab$ 〃 〃
(8) Gb 仮定
(9) $Fa \& Gb \& Hb$ (5), (8), (6) 連言導入
☆ 正式には、連言導入も1つずつしかできない
(10) Lab (4), (9) 含意除去
(11) $Lab \& \sim Lab$ (10), (7) 連言導入
(12) $\sim Gb$ 否定導入

(3.2, 3.3 は後述)

☆ ポイント
全称量化子 は 全称例化、連言は 連言除去 を使うと うまくいきやすい!

No. Date

練習問題残り

※ 授業では解説しなかったので、正しいかどうか少し自信ありません。
間違いを見つけたら連絡お願いします。

1.4

男	F
看護人	G
思いやりがある	H
ウィリアム	a

$$\forall x(Fx \& Gx \to Hx)$$
$$\sim Ha \& Fa$$
$$\overline{}$$
$$\sim Ga$$

∵)

(1)	$\forall x(Fx \& Gx \to Hx)$	前提
(2)	$\sim Ha \& Fa$	〃
(3)	$Fa \& Ga \to Ha$	(1) 全称例化
(4)	$\sim Ha$	(2) 連言除去
(5)	Fa	(2) 連言除去
(6)	Ga	仮定
(7)	$Fa \& Ga$	(5), (6) 連言導入
(8)	Ha	(3), (7) 含意除去
(9)	$\sim Ha \& Ha$	(4), (8) 連言導入
(10)	$\sim Ga$	否定導入

Date . . No.

1.5

江戸っ子	F
日本人	G
気前がよい	H
太郎	a

$\forall x(\sim Fx \,\&\, Gx \to \sim Hx)$

$Ga \,\&\, Ha$

Fa

∵)

(1)	$\forall x(\sim Fx \,\&\, Gx \to \sim Hx)$	前提
(2)	$Ga \,\&\, Ha$	〃
(3)	$\sim Fa \,\&\, Ga \to \sim Ha$	(1)全称例化
(4)	Ga	(2)連言除去
(5)	Ha	(2)連言除去
(6)	$\sim Fa$	仮定
(7)	$\sim Fa \,\&\, Ga$	(6), (4)連言導入
(8)	$\sim Ha$	(3), (7)含意除去
(9)	$Ha \,\&\, \sim Ha$	(5), (8)連言導入
(10)	$\sim\sim Fa$	否定導入
(11)	Fa	二重否定除去

2.3

学生	F
勉強する	G
花子	a
女子	H

$\forall x(Fx \to Gx)$

$Fa \,\&\, Ha$

$\exists x(Hx \,\&\, Gx)$

∵)

(1)	$\forall x(Fx \to Gx)$	前提
(2)	$Fa \,\&\, Ha$	〃
(3)	$Fa \to Ga$	(1)全称例化
(4)	Fa	(2)連言除去
(5)	Ha	(2)連言除去
(6)	Ga	(3), (4)含意除去
(7)	$Ha \,\&\, Ga$	(5), (6)連言導入
(8)	$\exists x(Hx \,\&\, Gx)$	(7)存在普遍化

No. Date . .

2.4

$$\begin{pmatrix} \text{被造物} & F \\ \text{滅びる} & G \\ \text{キリスト} & a \\ \text{存在者} & H \end{pmatrix}$$

$\forall x (Fx \to Gx)$

$\sim Ga \ \& \ Ha$

$\exists x (Hx \ \& \sim Fx)$

∵) (1)	$\forall x (Fx \to Gx)$	前提
(2)	$\sim Ga \ \& \ Ha$	〃
(3)	$Fa \to Ga$	(1) 全称例化
(4)	$\sim Ga$	(2) 連言除去
(5)	Ha	(2) 連言除去
(6)	Fa	仮定
(7)	Ga	(3), (6) 含意除去
(8)	$\sim Ga \ \& \ Ga$	(4), (8) 連言導入
(9)	$\sim Fa$	否定導入
(10)	$Ha \ \& \sim Fa$	(5), (10) 連言導入
(11)	$\exists x (Hx \ \& \sim Fx)$	(10) 存在普遍化

3.2

$$\begin{pmatrix} \text{少女} & F \\ \text{花子} & a \\ \text{少年} & G \\ \text{太郎} & b \\ \text{愛する} & L \end{pmatrix}$$

$Fa \ \& \ Gb \ \& \ Lab$

$\forall x \forall y (Gx \ \& \ Fy \to Lxy)$

$\exists x (Lbx \ \& \ Lxb)$

∵) (1)	$Fa \ \& \ Gb \ \& \ Lab$	前提
(2)	$\forall x \forall y (Gx \ \& \ Fy \to Lxy)$	〃
(3)	$Fa \ \& \ Gb$	(1) 連言除去
(4)	Lab	(1) 連言除去
(5)	$\forall y (Gb \ \& \ Fy \to Lby)$	(2) 全称例化
(6)	$Gb \ \& \ Fa \to Lba$	(2) 全称例化

Date . . No.

(7) Lba (3), (6) 含意除去

(8) $Lab \& Lba$ (4), (7) 連言導入

(9) $\exists x(Lbx \& Lxb)$ (8) 存在普遍化

3.3

雨が降る	p
鳥	F
幸福である	G
風が吹く	q
メアリー	a

$$\frac{\begin{array}{l} p \to \forall x(Fx \to \sim Gx) \\ \sim q \to Fa \& Ga \end{array}}{p \to q}$$

∵) (1) $p \to \forall x(Fx \to \sim Gx)$ 前提

(2) $\sim q \to Fa \& Ga$ 〃

(3) p 仮定

(4) $\forall x(Fx \to \sim Gx)$ (1), (3) 含意除去

(5) $Fa \to \sim Ga$ (4) 全称例化

(6) $p \to (Fa \to \sim Ga)$ 含意導入

(7) $\sim q$ 仮定

(8) $Fa \& Ga$ (2), (7) 含意除去

(9) Fa (8) 連言除去

(10) Ga (8) 連言除去

(11) p 仮定

(12) $Fa \to \sim Ga$ (6), (11) 含意除去

(13) $\sim Ga$ (9), (12) 含意除去

(14) $Ga \& \sim Ga$ (10), (13) 連言導入

(15) $\sim p$ 否定導入

(16) $\sim q \to \sim p$ 含意導入

(17) p 仮定

(18) $\sim q$ 仮定

(19) $\sim p$ (16), (18) 含意除去

記論

NO. 8

DATE 10/17

例)

(1) $\underbrace{\text{ビルは聖書を読む}}_{B}$けれども、$\underbrace{\text{仏教徒である}}_{A}$ ⇒ BけれどもA

(2) ビルは仏教徒で、かつ聖書を読む ⇒ AかつB

(3) ビルは仏教徒であるか、または聖書を読む ⇒ AまたはB

帰結関係のちがい

(1) ⇒ A, B, 仏教徒は聖書を読まないものだ

(2) ⇒ A, B

(3) ⇏ A, B (どちらとも言えない)

逆に…

A, B ⇏ (1)

A, B ⇒ (2)

A ⇒ (3), B ⇒ (3)

No. Date

(20) $p \& \sim p$ (17), (19) 連言導入

(21) $\sim\sim q$ 否定導入

(22) q (21) 二重否定除去

(23) $p \rightarrow q$ 含意導入

注意 (1)からいきなり全称例化で $p \rightarrow (Fa \rightarrow \sim Ga)$ を導くのは ×

(3)〜(6)のような手順でやる

証明が長すぎて分かりにくいが… 全体としてはこんな流れ ↓

① (3)〜(6) : $p \rightarrow (Fa \rightarrow \sim Ga)$ を導く。

② (7)〜(16) : $\sim q \rightarrow \sim p$ を導く。

$\sim q$ のとき、p ではなり得ないことを背理法で示した((11)〜(15))

③ (17)〜(23) : $p \rightarrow q$ (結論) を導く。

$(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (p \rightarrow q)$ という対偶の証明。

・文記号

命題論理学では単文の内部構造に立ち入らない

$\underbrace{\text{太郎}}_{a}\text{は}\underbrace{\text{走る}}_{F}$ $\Downarrow$ p

$\underbrace{\text{太郎}}_{a}\text{は}\underbrace{\text{歩く}}_{G}$ $\Downarrow$ q

文がどう違うかは問題にしない

(述語論理学ではそれらも扱う Fa, Ga)

「pかつq」と表すことで、

文の論理構造が明確になる

・命題論理学で扱われる文結合子

次の5つのみ

・でない ― 否定

・かつ ― 連言

・または ― 選言

・ならば ― 含意

・ならば、かつそのときにかぎり ― 同値
if and only if
(iff)

自然演繹法の練習問題

１・１　ジャックはフランス人である。すべてのフランス人は金持ちである。故に、ジャックは金持ちである。

１・２　トムはけちである。いかなるアメリカ人もけちでない。故に、トムはアメリカ人でない。

１・３　メアリーはフランス人でない。貧乏な人はすべてフランス人である。故に、メアリームは貧乏でない。

１・４　男の看護人は皆、思いやりがある。ウィリアムは思いやりがない男だ。故に、ウィリアムは看護人でない。

１・５　江戸っ子を除けば、日本人はすべて気前がよくない。太郎は日本人だが、気前がいい。故に、太郎は江戸っ子だ。

２・１　受験生は誰も遊ばない。太郎は不良だが、受験生である。故に、遊ばない不良がいる。

２・２　いかなる受験生も遊ばない。花子は高校３年生だが、遊ぶ。故に、ある高校３年生は受験生ではない。

２・３　学生は誰でも勉強する。花子は女子学生である。故に、ある女子は勉強する。

２・４　すべての被造物は滅びる。キリストは不滅の存在者だ。故に、ある存在者は被造物でない。

３・１　すべてのラクダはやさしい御者が好きだ。ラクダのタータンは御者のモ

ハメッドが好きでない。故に、モハメッドはやさしくない。

３・２　少女の花子は少年の太郎を愛する。すべての少年はどんな少女でも愛する。故に、太郎と相思相愛のものがいる。

３・３　雨が降れば、いかなる鳥も幸福でない。風が吹かなければ、鳥のメアリーは幸福である。故に、雨が降れば、風も吹く。