線 形 代 数 学

2019 年度版

目　次

第 1 章　3 次元 Euclid 空間における幾何学 **1**
1.1　3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{E}$ 1
1.2　$\mathbb{E}$ の vectors の外積 2

第 2 章　行列 **4**
2.1　基本的な記法 4
2.2　行列に関する演算 9
2.3　行列の分割 15

第 3 章　連立 1 次方程式 **19**
3.1　連立 1 次方程式の解法 19
3.2　連立 1 次方程式を解く 23
3.3　(補足) 行基本変形を行列の積で表す方法 32
3.4　正則行列 35

第 4 章　行列式 **39**
4.1　置換と対称群 39
4.2　行列式の定義と性質 (1) 45
4.3　行列式の定義と性質 (2) 52
4.4　行列式の積保存性 58
4.5　余因子展開余因子行列と逆行列の公式 60
4.6　特別な形の行列式 64

第 5 章　Vector 空間 **67**
5.1　体 67
5.2　Vector 空間と部分空間 68
5.3　1 次独立と 1 次従属 71
5.4　最大 1 次独立数 72
5.5　基と次元 77
5.6　反転置簡約行列 80

第 6 章　線形写像と線形変換 **81**
6.1　線形写像 81
6.2　Vector 空間の同型 84
6.3　線形写像の表現行列 85
6.4　線形変換とその表現行列 87
6.5　固有値, 固有 vectors, 固有空間, 固有多項式 87
6.6　一般の場合の固有値, 固有 vector, 固有空間, 固有方程式 91
6.7　行列の対角化 92

第 7 章　内積空間 **97**
7.1　内積 97
7.2　正規直交基と直交行列 100
7.3　対称行列の対角化 103

第 8 章　2 次曲線と 2 次曲面 **107**
8.1　Euclid 空間と代数的曲面 107
8.2　2 次曲線の分類 109
8.3　2 次曲面の分類 111

第 9 章　Vector 空間の直和と最小多項式 **113**
9.1　Vector 空間の部分空間による直和分解 113

9.2 最小多項式 ... 115
9.3 可換な線形変換, 可換な行列 ... 117
9.4 線形変換の直和と行列の直和 ... 119
9.5 冪等行列 (射影行列), 射影子, 冪零行列 ... 120

第 10 章 Jordan 標準形 **122**
10.1 準固有空間 ... 122
10.2 Jordan 標準形 ... 126
10.3 例 ... 130
10.4 Jordan 標準形についての留意点 ... 132
10.5 微分方程式の解法への Jordan 標準形の応用 ... 134

第 11 章 Hermite 空間 **135**
11.1 Hermite 内積 ... 135
11.2 直交補空間 ... 138
11.3 随伴変換, 随伴行列 ... 139
11.4 Hermite 変換, Unitary 変換, 正規変換 ... 140
11.5 正規変換 ... 143
11.6 正定値 Hermite 行列 ... 146

第1章　3 次元 Euclid 空間における幾何学

この章で学ぶことは, 厳密には, 第 7 章の内積空間を理解した上で説明されるべきものなのであるが, 高校までに, 直観的な空間を学んできたので, その流れを汲んだ説明を試る.

1.1　3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{E}$

この節では, 高校で学んだ " 空間 ", およびそこにおける vectors についての復習と, さらに踏み込んだ内容を学ぶ. 以下, 高校で学んだ " 空間 " を

$$\mathbb{E} = \mathbb{E}^3$$

で表す. これは正式には 3 次元 Euclid 空間 と呼ばれる空間である. $\mathbb{E}$ の各点 P には x 座標, y 座標, z 座標 が定まり, P の座標はそれらの 3 つの座標を用いて (a, b, c) の形に表され, これを P の 座標 と呼ぶのであつた. ここに a, b, c は実数である. 従つて $\mathbb{E}$ の点は 3 つの実数の組と 1 対 1 に対応するから, 集合としては $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ と表してもよい.

定義 1.1.1 (2 点間の距離)

しかし, 高校では, 以下に述べる様に, $\mathbb{E}$ における vectors といふものも学んだ.

定義 1.1.2 $\mathbb{E}$ 内の 2 点 A, B に対し, A を 始点 とし, B を 終点 とする 有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が定まる. 現代数学の立場では, $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ の元 (A, B) のことを $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と書く, と理解すべきである.

定義 1.1.3 2 つの有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ について, 4 つの点がある 1 つの平面上にあつて, 四辺形 ABDC (四辺形 ABCD ではない) が平行四辺形であるとき, 即ち, 線分 AB と CD (延長した直線ではなく) が交叉し, しかも, $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}}$ および $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BD}}$ が成り立つとき, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ は 平行 であるといひ, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と記す.

定義 1.1.4 $\mathbb{E}$ 内の有向線分を平行といふ 同値関係 で分類し, 2 本の有向線分は平行な有向線分は等しいものと考へる [1]:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{CD}} \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}.$$

有向線分の演算（和, 差, scalar 倍）を復習する. 2 つの有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ について, これらの和を

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と定める. 差を. . . と定める. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

[1] 高校の教科書には, 任意の vector は平行移動しても変らない, と記されてゐる. このことは, 現代数学の立場では, 剰余類 $(\mathbb{E} \times \mathbb{E})/$“平行” が有向線分の集合である, と解するのである.

補題 1.1.5 任意の有向線分は, 原点 O を始点とする任意の有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と平行である.

定義 1.1.6 (vectors) 原点 O を始点とする任意の有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を単に $\mathbb{E}$ の vector と称し, 通常, 小太文字で $\boldsymbol{a}$ などと記す :

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}.$$

この状況を点 A の位置 vector は $\boldsymbol{a}$ であるといふ. さらに, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と平行な有向線分である場合も

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

と書く. これらの記法は高校で学んだものであり, 混乱の心配はない.

Vectors の大きさ

定義 1.1.7 (内積) $\mathbb{E}$ 内の 2 つの vectors $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のとき, $\angle\mathrm{AOB}$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角といふ. このとき

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos \angle\mathrm{AOB}$$

なる量を考へて, これを $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積といふ.

ここで, 内積の性質をまとめておく. これらは, すべて高校で学んだことなので, 証明は付けないが, 演習問題としておく.

1.2 $\mathbb{E}$ の vectors の外積

以下の章での基本的な記号

この note では, 通常の記法を使ふ :
$\mathbb{N}$ は自然数 1, 2, 3, $\cdots$ の全体,
$\mathbb{Z}$ は整数の全体,
$\mathbb{Q}$ は有理数の全体,
$\mathbb{R}$ は実数の全体,
$\mathbb{C}$ は複素数の全体を表す.

しばらく (第 5.1 節まで) は, 行列 や 数 vector の成分は実数（または複素数）であるものとする.

第2章　行列

2.1　基本的な記法

行列の記法　m と n を自然数とする. $m \times n$ 個の数 a_{ij} $(i = 1, \cdots, m\ ;\ j = 1, \cdots, n)$ を次の様に長方形に並べて [ ] または ( ) で囲つたものを m 行 n 列の行列 $m \times n$ 型の行列, $m \times n$ 行列, (m, n) 行列などといふ.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ここに並んだ a_{ij} を (i, j) <u>成分</u> といふ. 行列 A の横の並び

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \quad (i = 1, \cdots, m)$$

を A の行といひ, 上から第 1 行, 第 2 行, $\cdots$, 第 m 行と呼ぶ. また A の成分の縦の並び

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} \quad (j = 1, \cdots, n)$$

を A の <u>列</u> といひ, 左から第 1 列, 第 2 列, $\cdots$, 第 n 列と呼ぶ.

上の行列 A を簡潔に記号で

$$A = [\, a_{ij} \,],\ A = [\, a_{ij} \,]_{m \times n},\ A = \underset{m \times n}{[\, a_{ij} \,]},\ A = \underset{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n}}{[\, a_{ij} \,]}$$

などと記す.

行列の相等　2 つの行列 A と B について, 型が一致してゐて, 各成分がどれも一致するとき, そのときに限り A と B は <u>等しい</u> といひ, $A = B$ と記す.

行列の集合　成分がすべて $\mathbb{R}$ に含まれる $m \times n$ 型行列の全体を $\mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{R})$ と記す. もちろん, 成分が $\mathbb{C}$ に含まれる $m \times n$ 型行列の全体は $\mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{C})$ と記される. また, 正方行列の全体は $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) = \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{R})$ などと表すこととする.

零行列 全ての成分が 0 である行列を <u>零行列</u> といひ, O で表す. 零行列は, 一般には文中や式の中でその型が明かなことが多いが, 特にその型を明示したいとき, $m \times n$ 型の零行列を $O_{m,n}$ などと書く. 特に $n \times n$ 型の零行列を O_n と書くことにする.

例 2.1.1 2×3 型の零行列と 3×3 型の零行列を書けば

$$O = O_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad O = O_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

正方行列 行の数と列の数が等しい行列を <u>正方行列</u> といふ. 特に $n \times n$ 行列を <u>n 次 (正方) 行列</u> といふ. n 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

の成分のうち, 左上から右下への対角線上に並ぶ成分 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ を, A の <u>対角成分</u> と呼ぶ. 正方行列であつて対角成分以外の成分が全て 0 である行列を <u>対角行列</u> といふ.

例 2.1.2 次の行列はどれも 3 次の対角行列である.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad O_{3,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

単位行列 対角成分が全て 1 で, それ以外の成分が全て 0 である様な正方行列を <u>単位行列</u> といひ, (E ではなく) I で表す. 特に次数を明示したいとき, n 次単位行列を I_n と書く.

例 2.1.3 3 次の単位行列を具体的に書くと次の様になる.

$$I = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Scalar 行列 対角成分が全て等しい対角行列を, <u>scalar（スカラー） 行列</u> といふ. 特に単位行列は scalar 行列であるし, 零行列も, それが正方行列であれば, やはり scalar 行列である.

例 2.1.4 次の行列は 3 次の scalar 行列である.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

転置行列 行列 A の行と列を入れ替へた行列を, 行列 A の転置行列といひ, ${}^tA$ と書く. A が $m \times n$ 行列でならば, ${}^tA$ は $m \times n$ 行列である. 成分で書くと

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{ならば} \quad {}^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

である. $A = [\,a_{ij}\,]_{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n}}$, ${}^tA = [\,b_{ij}\,]$ と書くと $b_{ij} = a_{ji}$ であり, ${}^tA = [\,a_{ij}\,]_{\substack{1 \leqq j \leqq n \\ 1 \leqq i \leqq m}}$ となる. また ${}^t({}^tA) = A$ である.

例 2.1.5 転置行列の例.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ならば} \quad {}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

行 vectors, 列 vectors $1 \times n$ 行列を<u>n 次 行 vector</u>, $m \times 1$ 行列を<u>m 次 列 vector</u>といふ. 行 vectors と列 vectors を総して<u>数 vectors</u>といふ. 成分が全て 0 である数 vector を<u>零 vector</u>といひ,

$$\mathbf{0}$$

で表す. また 1×1 行列は, 数と同一視することが多い.

例 2.1.6 $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ は 3 次の列 vector, $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ は 4 次の行 vector である.

例題 2.1.7 行列

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & 12 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

に対して次の問に答へよ.

(1) 行列 A の型を記せ.

(2) 行列 A の $(2,1)$ 成分, $(3,4)$ 成分を記せ.

(3) 行列 A の第 2 行, 第 3 列を記せ.

(4) 行列 A の転置行列 ${}^tA$ を記せ.

解答 (1) 3×5 型. (2) $(2,1)$ 成分は 3 で $(3,4)$ 成分は 7.

(3) 第 2 行は $[3 \ \ 0 \ \ 12 \ \ 0 \ \ 4]$. (4) 第 3 列は $\begin{bmatrix} 6 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(5) 転置行列は

$${}^tA = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 6 & 12 & 0 \\ -4 & 0 & 7 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kronecker の δ つぎで定義される記号 δ_{ij} を Kronecker（クロネッカー）の δ（デルタ）と呼ぶ.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

例 2.1.8 Kronecker の δ を使ふと単位行列 $I = I_n$ を

$$I = I_n = \left[\,\delta_{ij}\,\right]_{\substack{1 \leqq i \leqq n \\ 1 \leqq j \leqq n}}$$

と表せる.

例 2.1.9 次の様な使ひ方もある：

$$\left[\,\delta_{i+1,\,j}\,\right]_{\substack{1 \leqq i \leqq 3 \\ 1 \leqq j \leqq 3}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

演 習 問 題

2.1.10 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & -5 \\ 9 & -8 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答へよ.

(1) A の型を記せ.

(2) A の $(2,4)$ 成分は何か.

(3) A の第 2 行を記せ.

(4) A の第 3 列を記せ.

(5) 転置行列 ${}^tA$ を記せ.

2.1.11 (i,j) 成分が次で与へられる 3 次行列 $A = [a_{ij}]$ を書き下せ.

(1) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ (2) $a_{ij} = (-1)^i\delta_{ij}$

(3) $a_{ij} = \delta_{i,\,j+1}$ (4) $a_{ij} = \delta_{i\,4-j}$

2.1.12 次の行列の (i,j) 成分 a_{ij} を Kronecker の δ を用いて表せ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2.1.13 次の等式を満たす様に a, b, c, d を定めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 2a+1 & c+2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2c \\ 1-b & 7-d \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} d & a-1 \\ b+1 & 1 \end{bmatrix} = {}^t\begin{bmatrix} 2 & a \\ 2b & c \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} a & 2 & -2 \\ 0 & b-2 & 3 \\ c+2 & 2d & 1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -6 & -18 & 0 \\ 15 & 33 & -6 \\ 15 & -6 & 15 \end{bmatrix}$

2.1.14 正方行列 A は ${}^tA = A$ を満たすとき, <u>対称行列</u> と呼ばれる. 次の行列が対称行列になる様に a, b, c を定めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2c+1 & 3 \\ a & -2 & c \\ b & a-2 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & b-2 & 1 \\ a & 3 & c \\ b-2 & a+1 & 5 \end{bmatrix}$

2.1.15 正方行列 A は ${}^tA = -A$ を満たすとき, <u>交代行列</u> と呼ばれる. 但し $A = [a_{ij}]$ に対して, $-A = [-a_{ij}]$ と定める. 交代行列の対角成分は全て 0 であることを示せ.

2.1.16 次の行列が交代行列になる様に a, b, c, d を定めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 2c+1 & 3 \\ a & b-2 & c \\ c & d-2 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & a+1 & -1 \\ b & 3-b & d \\ 1 & c-1 & c \end{bmatrix}$

2.1.17 対称行列であり, かつ交代行列である様な行列は零行列に限ることを示せ.

2.2 行列に関する演算

行列の和と差 2 つの行列の型が一致するときのみ, それらの間の演算 和 および 差 が以下の様に定義される.

$$A = [\,a_{ij}\,]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}},\quad B = [\,b_{ij}\,]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} \quad \text{について} \quad A+B = [\,a_{ij}+b_{ij}\,]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}},\quad A-B = [\,a_{ij}-b_{ij}\,]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$$

例 2.2.1

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 7 \\ -1 & 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

行列の saclar 倍 行列や後で述べる vectors に対比して, 数のことを scalars と言ふ. A が行列で c が数 (scalar) のとき, A の c 倍 cA を A の全ての成分を c 倍することで定義する. $(-1)A$ は $A+(-1)A=O$ を満たす. $(-1)A$ は $-A$ とも書かれる. A と B が同じ型ならば $A-B=A+(-B)=O$ である.

例 2.2.2 以下に scalar 倍の例を示す :

$$3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 24 \\ 6 & 15 & -3 \end{bmatrix}, \qquad a\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & a \\ 4a & 3a \end{bmatrix}.$$

行列の積 上の記法を使つて行列の積について述べる. 2 つの行列 A と B について, A の列の数と B の行の個数が等しいとき, またそのときに限り, それらの積と呼ばれる演算が以下の式で定義される. いま

$$A = [\,a_{ij}\,]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}},\quad B = [\,b_{jk}\,]_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le k\le r}}$$

の積は次の様になる :

$$[\,a_{ij}\,]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}\,[\,b_{jk}\,]_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le k\le r}} = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le k\le r}}. \tag{2.2.3}$$

とくに, $m\times n$ 型の行列 A と $n\times r$ 型の行列 B との積 AB は $m\times r$ 型になる. 正方行列 A については $AA=A^2$, $AAA=A^3$ 等と記す.

以下に, 行列の積の計算例をいくつか示す.

例 2.2.4

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -10 & -4 \\ -9 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

例 2.2.5

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2$$

例 2.2.6 行列の積は 2 つの表の積だと考へても自然なものであることを例で示す. 2 家族 (佐藤, 田中) が遠足に行く. その 2 家族の構成と, ひとりの費用は次の表の通りであるとする.

表 1

	大人	学生	子供
佐藤	2	1	1
田中	1	1	2

(単位 人)

表 2

	交通費	昼食代
大人	1000	600
学生	700	500
子供	500	400

(単位 円)

この 2 つの表から各家族の費用を計算してみたものが次の表である.

表 3

	交通費	昼食代
佐藤	3200	2100
田中	2700	1900

(単位 円)

いま, 表 1, 表 2 表 3 を行列にしたものを A, B, C とする. 即ち

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1000 & 600 \\ 700 & 500 \\ 500 & 400 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3200 & 2100 \\ 2700 & 1900 \end{bmatrix}$$

とする.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1000 & 600 \\ 700 & 500 \\ 500 & 400 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3200 & 2100 \\ 2700 & 1900 \end{bmatrix} = C$$

となつてゐる.

行列の演算に関する性質　行列の演算も数の演算と同じ様な性質を持つが, 次の 2 つの違ひがある.

(1) 2 つの行列 (A, B とする) の和, 差, 積の演算はいつでもできるわけではなく, これらの演算ができるためには A と B の型に条件がある.

(2) 2 つの行列 (A, B とする) の積 AB と BA は, もしこれらの双方の演算ができたとしても, 一致するとは限らない.

同じ型の正方行列 A, B が $AB = BA$ を満たすとき, A と B は <u>可換</u> であるといはれる.

これ以外の結合律, 分配律などの "数" の演算に成り立つ性質は, 次の様に行列演算についても成り立つ. これは定義によりすぐに確かめられる.

和の性質　$A + B = B + A$, $A + O = O + A$,

$(A + B) + C = A + (B + C)$ (<u>和の結合律</u>).

積の性質　$AE = EA = A$, $AO = O$, $OA = O$,

$(AB)C = A(BC)$ (<u>積の結合律</u>). (2.2.17 参照)

スカラー倍　$0A = O$, $1A = A$,

$(ab)A = a(bA)$, $aA)B = a(AB)$.

<u>分配律</u>　$a(A + B) = aA + aB$, $(a + b)A = aA + bA$,

$A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$. (2.2.15 参照)

ここで A, B, C は行列であり, a, b はスカラーである. 各等式は両辺の演算が意味を持つときに限つて成り立つ.

和および積の結合律を用ゐると, n 個の行列 A_1, A_2, $\cdots$, A_n に対して, 次のが成り立つ.

(3) $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ はすべての A_i の型が等しければ定まり, 和はその順序にも和を取る順序にも依らない.

(4) $A_1 A_2 \cdots A_n$ は隣り合ふ行列の積がどれも可能ならば定まり, どこから計算しても結果は同じである. 特に A が正方行列ならば A の <u>冪乗</u> (n 乗) $A^n = \underbrace{AA \cdots A}_{n}$ が定まる.

演 習 問 題

2.2.7 次の行列の計算を実行せよ.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3$

(5) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 3 & -2 & 8 \\ -1 & 8 & 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right\}$

2.2.8 次の行列の中で積が定義される全ての組合せを求め, それぞれの積を計算せよ. 同じものを掛けることも含めるものとする.

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

2.2.9 次の各問の行列 A に対して A^n (n は自然数) を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.2.10 次の行列の組は可換か否か, 調べよ.

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.2.11 次の等式が成り立つ様に a, b, c, d を定めよ.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -2 \\ c & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ -1 & d \end{bmatrix}$$

2.2.12 $A^m = O$ のとき, $(I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{m-1})$ を求めよ.

2.2.13 $A^m = O$ となる自然数 m が存在するとき, A は 冪零(べきれい)行列 と呼ばれる. A と B が共に冪零行列で可換であるならば AB も冪零行列であることを示せ.

2.2.14 n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ の成分が $i > j$ ならば $a_{ij} = 0$ を満たすとき, A は 上(うえ)三角行列 と呼ばれる. 上三角行列の和, 差, 積は上三角行列であることを示せ.

2.2.15 行列 A は $m \times n$ 型, B と C は $n \times r$ 型のとき,

$$A(B + C) = AB + AC$$

が成り立つことを証明する以下の文章を完成させよ.

証明. まづ

$$A = \underset{\substack{1 \leqq i \leqq m \\ 1 \leqq j \leqq n}}{[a_{\Box j}]}, \quad B = \underset{\substack{1 \leqq \Box \leqq \Box \\ 1 \leqq \Box \leqq r}}{[b_{\Box k}]}, \quad C = \underset{\substack{1 \leqq \Box \leqq \Box \\ 1 \leqq \Box \leqq \Box}}{[c_{\Box\Box}]}$$

とおく. これらについて,

$$\begin{aligned}
A(B+C) &= A \underset{\substack{1 \leqq \Box \leqq \Box \\ 1 \leqq \Box \leqq \Box}}{[b_{\Box\Box} + c_{\Box\Box}]} \\
&= \underset{\substack{1 \leqq \Box \leqq \Box \\ 1 \leqq \Box \leqq \Box}}{\left[\sum_{j=1}^{\Box} a_{\Box j}(b_{\Box\Box} + c_{\Box\Box}) \right]} \\
&= \underset{\substack{1 \leqq \Box \leqq \Box \\ 1 \leqq \Box \leqq \Box}}{\left[\sum_{j=1}^{\Box} \Big(a_{\Box j} b_{\Box\Box} + a_{\Box j} c_{\Box\Box} \Big) \right]} \\
&= \underset{\substack{1 \leqq \Box \leqq \Box \\ 1 \leqq \Box \leqq \Box}}{\left[\sum_{j=1}^{\Box} a_{\Box j} b_{\Box\Box} + \sum_{j=1}^{\Box} a_{\Box j} c_{\Box\Box} \right]} \\
&= \underset{\substack{1 \leqq \Box \leqq \Box \\ 1 \leqq \Box \leqq \Box}}{\left[\sum_{j=1}^{\Box} a_{\Box j} b_{\Box\Box} \right]} + \underset{\substack{1 \leqq \Box \leqq \Box \\ 1 \leqq \Box \leqq \Box}}{\left[\sum_{j=1}^{\Box} a_{\Box j} c_{\Box\Box} \right]} \\
&= AB + AC.
\end{aligned}$$

2.2.16 等式

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{\ell} x_{jk} = \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{n} x_{jk}$$

が成り立つことを示せ.

2.2.17 行列 A, B, C はそれぞれ $m \times n$ 型, $n \times r$ 型, $r \times \ell$ 型とする. このとき

$$A(BC) = (AB)C$$

が成り立つことを証明する以下の文章を完成させよ.

証明. まづ,

$$A = \underset{\substack{1\leqq i\leqq m\\ 1\leqq j\leqq n}}{[a_{ij}]}\,, \quad B = \underset{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq k\leqq r}}{[b_{\square k}]}\,, \quad C = \underset{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq t\leqq \ell}}{[c_{\square t}]}$$

とおく. このとき

$$(AB)C = \left(\underset{\substack{1\leqq i\leqq m\\ 1\leqq j\leqq n}}{[a_{ij}]}\ \underset{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq r}}{[b_{\square k}]} \right) \underset{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq \ell}}{[c_{\square t}]} = \underset{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq \square}}{\left[\sum_{\square=1}^{\square} a_{ij} b_{\square\square} \right]} \underset{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq \ell}}{[c_{\square t}]}$$

$$= \underset{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq \square}}{\left[\sum_{\square=1}^{\square} \left(\sum_{\square=1}^{\square} a_{ij} b_{\square\square} \right) c_{\square\square} \right]} = \underset{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq \square}}{\left[\sum_{\square=1}^{\square} \left(\sum_{\square=1}^{\square} a_{ij} b_{\square\square} c_{\square\square} \right) \right]}$$

同様に

$$A(BC) = \underset{1\leqq i\leqq m 1\leqq j\leqq n}{[a_{ij}]} \left(\underset{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq r}}{[b_{\square k}]}\ \underset{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq \ell}}{[c_{\square t}]} \right) = \underset{\substack{1\leqq i\leqq m\\ 1\leqq j\leqq n}}{[a_{ij}]} \underset{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq \square}}{\left[\sum_{\square=1}^{\square} b_{\square\square} c_{\square\square} \right]}$$

$$= \underset{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq \square}}{\left[\sum_{\square=1}^{\square} a_{ij} \left(\sum_{\square=1}^{\square} b_{\square\square} c_{\square\square} \right) \right]} = \underset{\substack{1\leqq \square\leqq \square\\ 1\leqq \square\leqq \square}}{\left[\sum_{\square=1}^{\square} \left(\sum_{\square=1}^{\square} a_{ij} b_{\square\square} c_{\square\square} \right) \right]}$$

ここで $x_{\square\square} = a_{ij} b_{\square\square} c_{\square\square}$ とおけば 2.2.16 の等式から

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{r} x_{\square\square} \right) = \sum_{k=1}^{\square} \left(\sum_{j=1}^{\square} x_{\square\square} \right)$$

が成り立つことがわかり,

$$(AB)C = A(BC)$$

が証明された.

2.3 行列の分割

行列の行と列を以下に述べる様な仕方で分割することで, 行列の計算やしやすくなつたり, 種々の性質の証明が述べ易くなる. 行列 A が与へられたとき, それを

$$\left[\begin{array}{c:c:c:c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \hdashline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hdashline A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{array}\right]$$

の様に分割することを A の <u>(長方形) 分割</u> と呼ぶ. ここで, 分割された行列 A_{ij} の 1 つ 1 つを <u>細胞</u> と呼ぶ.

例 2.3.1 以下は 3×3 型行列 A の分割の例である.

$$\left[\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \hdashline 5 & 3 & -9 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = [-9].$$

行列を分割して表示する利点の 1 つは, 行列の形によつては, 積がわかりやすくなることにある. A が $m \times n$ 行列, B が $n \times r$ 行列で, A の列の分け方と B の行の分け方が次に示す様に一致してゐるとする.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \overbrace{\quad}^{n_1} & \overbrace{\quad}^{n_2} & \cdots & \overbrace{\quad}^{n_t} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c:c:c:c} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \hdashline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hdashline A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{array}\right] \end{array}, \qquad B = \begin{array}{r} n_1\{ \\ n_2\{ \\ \vdots \\ n_t\{ \end{array} \left[\begin{array}{c:c:c:c} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1u} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2u} \\ \hdashline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hdashline B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tu} \end{array}\right].$$

このとき A と B の各細胞を数であるかの様に考へて形式的に行列の積を取ることで, 行列の積が正しく計算できる. つまり

$$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1u} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2u} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{su} \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{l} C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{it}B_{tj} \\ \qquad (i = 1, \cdots, s \ ; \ j = 1, \cdots, u) \end{array}$$

例題 2.3.2 次の行列 A, B の積 AB を, 与へられた長方形分割を用いて求めよ.

$$A = \left[\begin{array}{cc|c|cc} 1 & 2 & 4 & 5 & 1 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{cc} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ \hline 1 & -2 \\ \hline -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{array}\right]$$

解答

$$AB = \begin{bmatrix} [1\ \ 2]\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + [4][1\ \ -2] + [5\ \ 1]\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}[1\ \ -2] + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} [-1\ \ 8] + [4\ \ -8] + [-3\ \ 2] \\ \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ \hline 6 & -4 \\ 1 & -1 \end{array}\right].$$

かうして求めた積 AB と長方形分割しないで求めたものとは等しくなる. その理由をこの計算から理解されたい.

例題 2.3.3 A_1, B_1 が m 次正方行列, A_2, B_2 が n 次正方行列ならば

$$\begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1B_1 & O \\ O & A_2B_2 \end{bmatrix}.$$

解 所与の分割のままに計算すれば

$$(\text{左辺}) = \begin{bmatrix} A_1B_1 + OO & A_1O + OB_2 \\ OB_2 + A_2O & OO + A_2B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1B_1 & O \\ O & A_2B_2 \end{bmatrix} = (\text{右辺}).$$

行列の分割は, 例へば次の 3 つの場合には非常に有効である.

(1) 多くの細胞に零行列が存在する場合の積の計算.

(2) 多くの細胞に零行列が存在する場合の行列式 (後述) の計算.

(3) 行列を行 vector または列 vector に分割して見易く表示する場合.

このうち (1) の有効さは 2.3.3 で見た通りである. 2.3.3 と同様なことが 3 以上の自然数 t についての行と列を t 個に分けたものについて, 対角の t 個の細胞以外が全て零行列の場合にも成立する. (2) は後の 4.3.8 で述べる. (3) は, 後に述べる連立 1 次方程式や, 1 次変換の行列表現を考へるときに役立つ.

数 vectors (行 vectors, 列 vectors) は, 共に行列の特別なものであるが, 特に数 vector であることを強調するために

$$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \cdots,\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$$

などのbold(ボールド) 体の斜体を用いることが多い.

例 2.3.4 列 vectors への分解

$$A = \left[\begin{array}{c:c:c:r} 1 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right] = [\,\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2\ \ \boldsymbol{a}_3\ \ \boldsymbol{a}_4\,],$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

例 2.3.5 行 vectors への分解. 例 2.3.4 の行列 A を行 vectors に分解すると

$$A = \left[\begin{array}{cccr} 1 & 3 & 4 & 4 \\ \hdashline 2 & 1 & 0 & -1 \\ \hdashline 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{b}_1 &= [1\ \ 3\ \ 4\ \ \ 4], \\ \boldsymbol{b}_2 &= [2\ \ 1\ \ 0\ -1], \\ \boldsymbol{b}_3 &= [1\ \ 0\ \ 5\ \ \ 0]. \end{aligned}$$

.

行列の積の数 vectors を用いた表現 A が $m \times n$ 行列, B が $n \times r$ 行列で, A を行 vectors に分解し, B を列 vectors に分解する.

$$A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix}, \quad B = [\,\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_n\,].$$

このとき, 積 AB は

$$AB = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_m\boldsymbol{b}_n \end{bmatrix}$$

と書ける.

演 習 問 題

2.3.6 次の行列の積を与へられた長方形分割を用いて求めよ.

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

2.3.7 $[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]$ を行列の列 vectors への分解とするとき, $[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3]\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ を計算せよ.

2.3.8 $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2]$ (列 vector 分解), $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ のとき, 積 AB の列 vectors への分解を求めよ.

2.3.9 A_1, B_1 は m 次正方行列, A_2, B_2 は n 次正方行列とする. A_1 と B_1, A_2 と B_2 が可換であるならば $A = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}$ と $B = \begin{bmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{bmatrix}$ も可換であることを示せ.

2.3.10 A が $m \times n$ 行列で k が自然数のとき $\begin{bmatrix} I_m & A \\ O & I_n \end{bmatrix}^k$ を求めよ.

第3章　連立 1 次方程式

3.1　連立 1 次方程式の解法

連立 1 次方程式の基本変形　連立 1 次方程式を解く際に行ふ変形は次の 3 つである．これを連立方程式の 行基本変形 といふ．
(1) 1 つの方程式を何倍か ($\neq 0$ 倍) する．
(2) 2 つの式を入れ替へる．
(3) 1 つの式に他の式の何倍かを加へる．

この方法に沿つて連立 1 次方程式を筆算で計算するとき, 各変形をするごとに, 同じ方程式を何度も書かなければならず, 面倒に感じるかも知れない．また, 途中で未知数の 1 つが求まれば, それを適当に代入して計算を進めた方が早いと思はれるかも知れない．簡単な方程式の場合であれば, その様にして求まつた値が解の全体であるか否かを確かめることは容易かも知れないが, 方程式の数や変数が多いときは, 求まつた値が全ての方程式を満たすことを確かめるのはかなり厄介である．ところが, 上の方法ならば最後の解を与へてゐる形の式の組から始めて, 最初の方程式の組に, 基本変形だけを用ゐて戻れるのだから（可逆的 といふ）, 途中に現れるすべての連立 1 次方程式は互ひに同等である．よつて, 最後に得られた解が元の丁度与へられた方程式の解の全体であり, それ以外に解がないことは元の方程式に代入するまでもなく明らかである．

掃き出し法　上の様に, 基本変形を行つて連立 1 次方程式を解く方法を 掃き出し法 といふ．上にも述べた様に, 基本変形は可逆的であるから, 基本変形を行つて得られる連立 1 次方程式は全て同等で, それらの解の集合は全て等しい．

以下では, 行列の各の最初（最も左寄り）の 0 でない成分を 主成分 と呼ぶ．行の成分がすべて零の場合は, その行には主成分は存在しない．

簡約行列　次の性質 **R1** 〜 **R4** を満たす様な行列を, 簡約行列 と呼ぶ．
R1　行のうちに零 vector(s) があれば, それは零 vector でないどんな行よりも下にある．
R2　零 vector でない行の主成分は 1 である．
R3　第 i 行の主成分を a_{ij_i} とすると, $j_1 < j_2 < j_3 < \cdots$ となる．即ち各行の主成分は下の方ほど右にある．
R4　各行の主成分を含む列においては, 他の成分は全て 0 である．即ち, 第 i 行の主成分が a_{ij_i} のとき, 第 j_i 列で (i, j_i) 成分以外は全て 0 である．

条件 **R3** は主成分がなだらかな階段状に並んでゐることを意味する．零行列, 単位行列は簡約行列である．

例 3.1.1 簡約行列の例.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

主成分の位置を灰色にした.

どんな行列も（行）基本変形を繰り返し施して簡約行列に変形できる. 以下で, 行列

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

を簡約行列に変形してみる. まづ, 行の入れ替へによつて, 零 vector があればそれを最下行へ移動させる. 更に行 vectors のうちで主成分が最も左になるものの 1 つ（いまの場合は第 2 行か第 3 行）を第 1 行に移動させる.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & -6 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} ③ \\ \\ ① \end{array}$$

第 1 行を何倍かして（いまの場合は $\frac{1}{2}$ 倍）第 1 行の主成分を 1 にする.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} ① \times \frac{1}{2} \\ \\ \\ \end{array}$$

第 1 行の何倍かを他の行に加へて, 第 1 行の主成分を含む列（ここでは第 2 列）の他の成分を全て 0 にする.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ ② + ① \times (-3) \\ \\ \end{array}$$

第 2 行以下の vectors のうち主成分が最も左にあるもの（ここでは第 3 行）を第 2 行に移動し, 何倍かして主成分を 1 にする.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ ③ \\ ② \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ ② \times \frac{1}{2} \\ \\ \end{array}$$

第 2 行の主成分を含む列（ここでは第 4 列）の他の成分を全て 0 にする.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} ①+②\times 3 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

第 3 行以下の vectors のうち主成分が最も左にあるもの（ここでは第 3 行）を第 3 行に移動して, 何倍かして主成分を 1 にする.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & \frac{5}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} ①+②\times 3 \\ \\ ③\times\frac{1}{2} \end{matrix}$$

第 3 行の何倍かを他の行に加へることで, 第 3 行の主成分を含む列（ここでは第 5 列）の他の成分を全て 0 にする.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} ①+③\times(-\frac{5}{2}) \\ ②+③\times(-\frac{3}{2}) \\ \\ \end{matrix}$$

これは簡約行列である. 一般には, この段階で簡約行列になつてゐなければ, 以上と同様の操作を行ふ. 結局, 有限回の操作で簡約行列に到達する.

行列の簡約化 この様に, 与へられた行列 A に基本変形を繰り返すことにより, それをひとつの簡約行列 B を得ることを行列 A の 簡約化 と呼び, 簡約行列 B を A の 簡約化 ともいふ. 上の変形を一般化して次の定理の前半を得る

定理 3.1.2 任意の行列は, 基本変形を繰り返すことにより簡約化できる. また, 与へられた行列の簡約化は唯一通りに定まる.

この 3.1.2 の後半は, 5.4.8 で示される.

行列の階数 行列 A の簡約化を B とする. このとき,

$$\mathrm{rank}(A) = \text{“}B \text{ の零 vector でない行の個数”}$$

と定め, これを A の 階数 といふ. 簡約な行列の零 vector でない各行の主成分は異なる列に属するから,

$$\mathrm{rank}(A) = \text{“}B \text{ の零 vector でない列の個数”}$$

でもある. さらにそれは主成分の個数に他ならないから

$$\mathrm{rank}(A) = \text{“}B \text{ の主成分の個数”}$$

となる. 従つて

定理 3.1.3 A が $m \times n$ 行列ならば

$$\mathrm{rank}(A) \leqq m, \quad \mathrm{rank}(A) \leqq n.$$

演 習 問 題

3.1.4 次の各行列が簡約か否か判定せよ．また, 簡約でないものは簡約化せよ．

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (7) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3.1.5 2 次正方行列のうち, 簡約なものは次のもので尽きることを示せ．但し $*$ は任意の数を表す．(Hint : 階数で分類せよ．)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.1.6 3 次の正方行列のうち, 簡約なものを全て求めよ．但し, 3.1.5 の様に, 任意の数でかまはない成分には $*$ を用いよ．

3.1.7 次の行列を簡約化せよ．また, 各々の行列の階数を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ (7) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

3.2 連立 1 次方程式を解く

行列の簡約化を用いて連立 1 次方程式を解かう．未知数が n 個の連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad (A \text{ は } m \times n \text{ 行列})$$

を考へる．この係数行列を拡大係数行列は A, $[\,A \mid \boldsymbol{b}\,]$ である．$[\,A \mid \boldsymbol{b}\,]$ の列の個数は "A の列の個数" $+\,1$ である．A の簡約化を B と書けば $[\,A \mid \boldsymbol{b}\,]$ の簡約化は，その手順からして，$[\,B \mid \boldsymbol{b}'\,]$ の形になる．一方，行列の階数はその行列の簡約化の列の個数であるから，

$$\mathrm{rank}\big([\,A \mid \boldsymbol{b}\,]\big) = \mathrm{rank}(A) \quad \text{または} \quad \mathrm{rank}(A) + 1$$

である．最初に $\mathrm{rank}\big([\,A \mid \boldsymbol{b}\,]\big) = \mathrm{rank}(A) + 1$ となる場合を考へる．このとき，拡大係数行列の簡約化は下記の様になる．

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c}
1 & & & & & & & & \\
0 & 0 & 1 & & & * & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & & & \\
0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 & 0
\end{array}\right]$$

この行列の色づけされた行 $[\,0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; \cdots \;\; 0 \mid 1\,]$ に対応する方程式は

$$0\,x_1 + 0\,x_2 + \cdots + 0\,x_n = 1$$

である．この方程式の左辺は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ にどの様な値を代入しても 0 であるから，この方程式を満たす様な $x_1, x_2, \cdots, x_n$ は存在しない．よつて連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持たない．

次に $\mathrm{rank}\big([\,A \mid \boldsymbol{b}\,]\big) = \mathrm{rank}(A)$ であるとする．このときには，拡大係数行列の各行の主成分を含まない列に対応する変数の値を任意に定めると，主成分を含む列に対応する変数は，一意的に決まる (3.2.4 参照)．よつて次の定理を得る．

> **定理 3.2.1** 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つためには
>
> $$\mathrm{rank}\big([\,A \mid \boldsymbol{b}\,]\big) = \mathrm{rank}(A)$$
>
> であることが必要十分である．

例題 3.2.2 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

解答 拡大係数行列を簡約化する.

$$\begin{array}{rrrrr:r l}
\hline
1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 & \\
-1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & \\
2 & 1 & -1 & 0 & -3 & -3 & \\
\hline
1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & ③+① \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & ④+①\times(-2) \\
\hline
1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & ③+① \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ④+②\times(-1) \\
\hline
1 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & ①+④\times(-1) \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & ②+④\times 2 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & ③+④\times(-4) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
\end{array}$$

従つて, 係数行列の階数は 3, 拡大係数行列の階数 4 である. つまり, 与へられた連立 1 次方程式は解を持たない.

注意 3.2.3 最後まで簡約化しないで, その 1 つ上の行列まで変形すれば, その第 4 行を見ることにより連立 1 次方程式が解を持たないことはわかる.

例題 3.2.4 次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

解 拡大係数行列を簡約化する.

$$\begin{array}{rrrrr:r l}
\hline
1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 & \\
1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 & \\
2 & -4 & 1 & 5 & 2 & 5 & \\
\hline
1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 & \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & ② + ① \times (-1) \\
0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & ③ + ① \times (-2) \\
\hline
1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 & \\
0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & ③ + ② \times (-1) \\
\hline
1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 2 & \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & ② + ③ \times (-1) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 - 2x_2 \quad + \ 3x_4 = 2 \\ \qquad\qquad x_3 \ - x_4 = -1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_5 = 1 \end{cases}$$

ゆゑに

$$\begin{cases} x_1 = \ \ 2 + 2x_2 - 3x_4 \\ x_3 = -1 \qquad\quad + \ x_4 \\ x_5 = \ \ 1 \end{cases}$$

この式について次の 2 つの事はとても重要である :

(1) 右辺にある未知数は, 独立に任意の値を取ることができる.

(2) 左辺の未知数は, 右辺の未知数の値から上の式を通して完全に決まつてしまふ.

これは独立な x_2, x_4 は右辺のみに存在し, それらに従属する x_1, x_3, x_5 は左辺に一度しか登場しないからである. 以上のことは, 行列が簡約化されてゐるからこそ導かれる結果であることを十分理解して欲しい.

このことを踏まへると, この解は, $x_2 = c_1$, $x_4 = c_2$ とおいて,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 2c_1 - 3c_2 \\ c_1 \\ -1 \qquad\quad + c_2 \\ c_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c_1,\ c_2 \in \boldsymbol{R}) \quad \cdots\cdots \quad (\text{答})$$

と記すと見易い.

さて, 解が存在したとして解が唯一つしかないのは, 上の 3.2.4 からわかる様に, 任意定数が現れないとき, 即ち係数行列の簡約化の全ての列に主成分が存在するときであり, そのときに限る. 言ひ替へると係数行列の階数と未知数の個数が一致するときである. 3.2.1 と併せて次の定理を得る.

定理 3.2.5 n 個の未知数に対する連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

に解が唯一つ存在するためには

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\bigl([\, A \mid \boldsymbol{b} \,]\bigr) = n$$

であることが必要十分である.

同次形の連立 1 次方程式 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ において $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ である場合, 即ち

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

なる形の連立 1 次方程式を <u>同次形</u> の連立 1 次方程式といふ. 同次形の連立 1 次方程式はいつでも $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ といふ解を持つ. これを <u>自明な解</u> といふ.

定理 3.2.6　A は $m \times n$ 行列とする.
(1)　同次形の連立 1 次方程式　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$　の解が自明なものに限るためには

$$\mathrm{rank}(A) = n$$

であることが必要十分である.
(2)　$m < n$ ならば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は自明でない解を持つ.

証明　(1) は 3.2.5 の特別な場合である.
(2) 行列の階数は行の個数以下だから $m < n$ ならば

$$\mathrm{rank}(A) \leqq m < n$$

となる. よつて (1) より $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は自明でない解を持つ. □

同次形の連立 1 次方程式を解く　同次形の連立 1 次方程式を 1 つ解いておく. 同次形の方程式の場合には $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ であるから, 拡大係数行列を考へる必要はなく, 係数行列の簡約化を考へればよい.

例題 3.2.7　次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

解　係数行列を簡約化する.（右辺の vector $\boldsymbol{0}$ に相当する部分を省いて書く）

$$\begin{array}{rrrr|l}
\hline
1 & -2 & 0 & 3 & \\
1 & -1 & 1 & 2 & \\
\hline
1 & -2 & 0 & 3 & \\
0 & 1 & 1 & -1 & ② + ① \times (-1) \\
\hline
1 & 0 & 2 & 1 & ① + ② \times 2 \\
0 & 1 & 1 & -1 & \\
\hline
\end{array}$$

よつて 3.2.4 と同様にして

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2c_1 - c_2 \\ -c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1,\ c_2 \in \boldsymbol{R}) \quad \cdots\cdots \text{(答)}$$

演 習 問 題

3.2.8 次の連立 1 次方程式を解け.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}$

(6) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(7) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(8)
$\left.\begin{matrix} 0 & -8 \\ 0 & 9 \\ 1 & -5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -5 \\ 3 \\ -1 \end{matrix} \Bigg]$

(8) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 & 15 \\ -2 & -8 & -3 & 2 & -21 \\ 3 & 12 & 4 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix}$

(9) Ans.
$\left.\begin{matrix} 0 & -4 \\ 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 7 \\ 1 \\ -3 \end{matrix} \Bigg]$

(9) $\begin{bmatrix} -3 & -2 & -11 & 8 & -2 \\ 2 & 1 & 8 & -2 & -3 \\ -6 & -3 & -24 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -47 \\ 21 \\ -66 \end{bmatrix}$

3.2.9 次の連立 1 次方程式が解を持つための a, b の条件を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$

(3) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ a & 2a+1 & -2a & -a-1 \\ a-1 & a+1 & a^2-4a+1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

3.2.10 連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \cdots\cdots (*)$ の 1 つの解を $\boldsymbol{x}_0$ とする. 同次形の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \cdots\cdots (**)$ の任意の解 $\boldsymbol{x}_1$ に対し, $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1$ は $(*)$ の解であることを示せ. また $(*)$ の解は全て $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1$ の形に書けることを示せ.

連立 1 次方程式は拡大係数行列を, 行に関する基本変形を繰り返して簡約行列に変形 (簡約化) することにより, 機械的に解くことができる.

例題 3.2.11 行列 A と vector $\boldsymbol{b}$ が次で与へられてゐる :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を, 拡大係数行列 $[\,A\,|\,\boldsymbol{b}\,]$ を簡約化し, 解を求めよ.

解 拡大係数行列を簡約化する.

1	1	1	−2	−1	2	
1	2	3	−4	−4	1	
3	0	−3	1	7	5	
0	−1	−2	−1	0	4	
1	1	1	−2	−1	2	
0	1	2	−2	−3	−1	② − ①
0	−3	−6	7	10	−1	③ − ① × 3
0	−1	−2	−1	0	4	
1	1	1	−2	−1	2	
0	1	2	−2	−3	−1	
0	0	0	1	1	−4	③ + ② × 3
0	0	0	−3	−3	3	④ + ②
1	0	−1	0	2	3	① − ②
0	1	2	−2	−3	−1	
0	0	0	1	1	−4	
0	0	0	0	0	0	④ + ③ × 3
1	0	−1	0	2	3	
0	1	2	0	−1	−3	② + ③ × 2
0	0	0	1	1	−4	
0	0	0	0	0	0	

これで簡約化が完了した. これを方程式に書き直すと

$$\begin{cases} x_1 \qquad - x_3 \qquad + 2\,x_5 = 3 \\ \qquad x_2 + 2\,x_3 \qquad - x_5 = -3 \\ \qquad\qquad + x_4 + x_5 = -4 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_5 + 3 \\ x_2 = -2x_3 + x_5 - 3 \\ x_4 = - x_5 - 4 \end{cases}$$

この様に, 独立な変数 x_3, x_5 と従属する変数 x_1, x_2, x_4 が右辺と左辺に完全に分離され, 左辺に現れる変数は, 唯一度だけ現れてゐることが簡約化の重要な点である.

独立な変数を, それらしく $x_3 = c_1$, $x_5 = c_5$ と書き直して, 解は結局

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(c_1,\ c_2 \in \mathbb{R})$$

と書ける. ここで, 基礎の体を $\mathbb{R}$ と解釈して解答を述べたが, 一般の体でも全く同じ結果となることに注意されたい.

3.2.12 次の連立 1 次方程式を 3.2.11 の方法に忠実に従つて解け.

(1)
$$\begin{bmatrix} -2 & -3 & 6 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 9 & -1 & -10 \\ 5 & 0 & 15 & 3 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(2) $$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -7 & 9 & 4 \\ -9 & 6 & 33 & -48 & -17 \\ -1 & 1 & 4 & -7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 67 \\ 8 \end{bmatrix}$$

【答】

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \quad (c_1,\ c_2 \in \mathbb{R})$$

······· Ans.

3.2.13 3.2.12 (1), (2) について基本変形を用いて解を表す式から元の連立方程式を復元できることを具体的に示せ.

3.3 (補足) 行基本変形を行列の積で表す方法

ある行を c 倍する 行列 A ($m \times n$ 型) の第 k 行を c 倍して得られる行列は, 単位行列 I_m の第 k 行を c 倍して得られる行列

$$P_k(c) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & c & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

を A の左から掛けたものに等しい. (読者はこれを実際に確かめよ.)

ある 2 つの行を入れ替へる 行列 A ($m \times n$ 型) の第 k 行と ℓ 行を入れ替へて得られる行列は, 単位行列 I_m の第 k 行と第 ℓ 行を 入れ替へて得られる行列

$$P_{k\ell} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & & 1 & 0 & & & \\ & & & 1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \leftarrow \ell \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

を A の左から掛けたものに等しい. (読者はこれを実際に確かめよ.)

ある行に別の行の定数倍を加へる 行列 A ($m \times n$ 型) の第 k 行の c 倍を ℓ 行に加へて得られる行列は, 単位行列 I_m の第 k 行の c 倍を第 ℓ 行に加へて得られる行列

$$P_{k\ell}(c) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & \\ & & \vdots & & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & 1 & & & \\ & & c & 0 & \cdots & 0 & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \leftarrow \ell \\ \\ \\ \end{matrix}$$

を A の左から掛けたものに等しい. (読者はこれを実際に確かめよ.) ただし, 上記は $k < \ell$ の場

合を例示したものである.

上記の $P_k(c)$, $P_{k\ell}$, $P_{k\ell}(c)$ を 基本行列 と称する.

A として $[\,A \,\vdots\, I\,]$ を考へれば, これに 基本変形 (1), (2), (3) のいづれかを施した結果は, 対応する $P_k(c)$, $P_{k\ell}$, $P_{k\ell}(c)$ を左から掛けたものになるから,

$$[\,Q_1A \,\vdots\, Q_1\,]$$

を得る. さらに Q_2 に対応する行基本変形をしたならば

$$[\,Q_2Q_1A \,\vdots\, Q_2Q_1\,]$$

が得られる.

同様に $Q_2, \cdots, Q_n$ に対応する行基本変形をこの順で施せば

$$[\,Q_n\cdots Q_1A \,\vdots\, Q_n\cdots Q_1\,]$$

が得られる.

例 3.3.1 3.4.5 について A^{-1} を基本行列の積で表せ.

解 3×6 行列 $[\,A \mid I\,]$ を簡約化する.

1	2	1	1	0	0	
2	3	1	0	1	0	
1	2	2	0	0	1	
1	2	1	1	0	0	
0	−1	−1	−2	1	0	②＋①×(−2)
0	0	1	−1	0	1	③＋①×(−1)
1	−2	0	2	0	−1	①＋③×(−1)
0	−1	0	−3	1	1	②＋③
0	0	0	−1	0	1	
1	2	0	2	0	−1	
0	1	0	3	−1	−1	②×(−1)
0	0	0	−1	0	1	
1	0	0	−4	2	1	①＋②×(−2)
0	1	0	3	−1	−1	
0	0	0	−1	0	1	

A	I
$P_{31}(-1)\,P_{21}(-2)\,A$	$P_{31}(-1)\,P_{21}(-2)$
$P_{23}(1)\,P_{13}(-1)\,P_{31}(-1)\,P_{21}(-2)\,A$	$P_{23}(1)\,P_{13}(-1)\,P_{31}(-1)\,P_{21}(-2)$
$P_2(-1)\,P_{23}(1)\,P_{13}(-1)\,P_{31}(-1)\,P_{21}(-2)\,A$	$P_2(-1)\,P_{23}(1)\,P_{13}(-1)\,P_{31}(-1)\,P_{21}(-2)$
$P_{12}(-2)\,P_2(-1)\,P_{23}(1)\,P_{13}(-1)\,P_{31}(-1)\,P_{21}(-2)\,A$	$P_{12}(-2)\,P_2(-1)\,P_{23}(1)\,P_{13}(-1)\,P_{31}(-1)\,P_{21}(-2)$

よって A は正則行列で, 逆行列は

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= P_{12}(-2)\,P_2(-1)\,P_{23}(1)\,P_{13}(-1)\,P_{31}(-1)\,P_{21}(-2) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

3.4 正則行列

この節では, 正方行列を扱ふ. まづ, 逆行列を定義する.

定義 3.4.1 (逆行列) A は n 次正方行列とする. n 次正方行列 B が

$$AB = BA = I_n$$

を満たすとき, B は A の 逆行列 であるといはれる.

各 A に対し, それの逆行列は高々 1 つしか存在しない. 実際 B と C が A の逆行列であれば

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

となり, B と C は一致する. 正方行列 A は逆行列を持つとき 正則 であるといはれる. A が正則行列のとき A の逆行列を

$$A^{-1}$$

と書く. 次の定理は簡単な事を述べてゐると思はれるかも知れないが, 証明はとても難しい. 証明は §4.5 で行ふ. それまでは, 3.4.4 の証明の中で 1 度だけ使用し, 他では使用しない.

定理 3.4.2 A, B は n 次正方行列で $AB = I$ ならば, B は A の逆行列である.

これは次の様にも述べられる.

定理 3.4.3 A, B は n 次正方行列のとき, $AB = I \iff BA = I$ である. (4.5.9 参照)

正方行列 A の逆行列を求めたいが, その前に正方行列が正則であるための必要十分条件を述べておく.

定理 3.4.4 A が n 次の正方行列のとき, 次の (1) 〜 (5) は同値である.
(1) $\mathrm{rank}(A) = n$.
(2) A の簡約化は I_n である.
(3) 任意の n 次の列 vector $\boldsymbol{b}$ に対し, 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ はただ 1 つの解を持つ.
(4) 方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は自明な解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に限る.
(5) A は正則行列である.

証明 (1) $\Longrightarrow$ (2). A が n 次正方行列で $\mathrm{rank}(A) = n$ であるから, A の簡約化の全ての行と列は零 vector ではない. よつて A の簡約化は I_n である. (2) $\Longrightarrow$ (3). $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の拡大係数行列 $[\,A \,\vdots\, \boldsymbol{b}\,]$ の簡約化は $[\,A \,\vdots\, \boldsymbol{b}\,] \to [\,I_n \,\vdots\, \boldsymbol{b}'\,]$ となるから $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持ち, また解はただ 1 つである. (3) $\Longrightarrow$ (4). (3) の特別な場合 ($\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ の場合) が (4) である. (4) $\Longrightarrow$ (1). 3.2.6 の主張に他ならない. 以上により (1) 〜 (4) が同値であることが示された.
(3) $\Longrightarrow$ (5) n 次の列 vectors $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n$ を

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とおくと, 課程により $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1$, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_2$, $\cdots$, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_n$ は解をもつ. その解を順に $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_n$ とし,

$$C = [\,\boldsymbol{c}_1 \;\; \boldsymbol{c}_2 \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{c}_n\,]$$

とおくと, C は n 次正方行列で

$$AC = A[\,\boldsymbol{c}_1 \;\; \boldsymbol{c}_2 \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{c}_n\,] = [\,A\boldsymbol{c}_1 \;\; A\boldsymbol{c}_2 \;\; \cdots \;\; A\boldsymbol{c}_n\,] = [\,\boldsymbol{e}_1 \;\; \boldsymbol{e}_2 \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{e}_n\,] = I_n$$

となる. 定理 3.4.2 により, C は A の逆行列であり, A は正則行列である.

(5) $\Longrightarrow$ (4) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば, この両辺に左から A^{-1} を掛けると

$$A^{-1}A\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{0}$$

となり, $A^{-1}A\boldsymbol{x} = I\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, $A^{-1}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ であるから $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. よつて (4) が成り立つ. (3) と (4) は同値であるから, 以上より (5) と (1) ～ (4) の同値性も示された. $\square$

逆行列の計算　逆行列を計算するには 3.4.4 の (3) $\Longrightarrow$ (5) の証明で示した様に, n 個の連立 1 次方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1,\; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_2,\; \cdots,\; A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_n$$

の解を順に $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_2$, $\cdots$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}_n$ とすると

$$A^{-1} = [\,\boldsymbol{c}_1 \;\; \boldsymbol{c}_2 \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{c}_n\,]$$

である. このとき

$$[\,A \mid \boldsymbol{e}_i\,] \quad (1 \leqq i \leqq n)$$

の簡約化をまとめて行へばよい. 即ち $[\,A \mid \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \cdots\ \boldsymbol{e}_n\,]$ の簡約化をすれば $[\,I_n \mid \boldsymbol{c}_1\ \boldsymbol{c}_2\ \cdots\ \boldsymbol{c}_n\,]$ をなるのである. つまり $n \times 2n$ 行列 $[\,A \mid I\,]$ を簡約化すると

$$[\,A \mid I\,] \to [\,I \mid A^{-1}\,]$$

となつて, 簡約化の右半分に A の逆行列 A^{-1} が現れるのである.

例題 3.4.5 次の行列の逆行列を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

解答 3×6 行列 $[\, A \,\vdots\, I \,]$ を簡約化する.

$$\begin{array}{rrr:rrrl}
\hline
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & \quad ② + ① \times (-2) \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & \quad ③ + ① \times (-1) \\
\hline
1 & -2 & 0 & 2 & 0 & -1 & \quad ① + ③ \times (-1) \\
0 & -1 & 0 & -3 & 1 & 1 & \quad ② + ③ \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 & \\
0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 & \quad ② \times (-1) \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & \\
\hline
1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 & \quad ① + ② \times (-2) \\
0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 & \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & \\
\hline
\end{array}$$

よつて A は正則行列で, 逆行列は $A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

注意 3.4.6 正方行列 A に対して $[\, A \,\vdots\, I \,]$ を簡約化したとき, 簡約化が $[\, I \,\vdots\, * \,]$ の形にならなければ A は正則行列ではないので, 逆行列は存在しない.

演 習 問 題

3.4.7 次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

3.4.8 逆行列を用いて次の連立 1 次方程式を解け.

(1) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

3.4.9 $a \neq 0$ のとき, 次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -a+1 \\ 2 & 3 & 2a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3.4.10 次を示せ. 但し, 全て <u>定義に従つて確かめよ</u>. 3.4.2 や 3.4.3 を使つてはいけない.

(1) A が正則ならば, A^{-1} も正則で $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) A が正則ならば, ${}^tA$ も正則で $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

(よつて, この行列を ${}^tA^{-1}$ と書いてよい)

(3) A, B が正則ならば AB も正則で $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3.4.11 A, B が可換ならば, 次の行列の組も可換であることを示せ.

(1) A^{-1}, B (2) A^{-1}, B^{-1} (3) ${}^tA$, ${}^tB$

3.4.12 $AB = O$ となる B $(\neq O)$ が存在するならば, A は正則でないことを示せ.

3.4.13 A が冪零行列ならば $I + A$, $I - A$ は共に正則行列であることを示せ. また, その逆行列を求めよ. 但し, 得られた逆行列が正しいものであることは <u>定義に従つて確かめよ</u>. 3.4.2 や 3.4.3 を使つてはいけない. (Hint : 2.2.12)

3.4.14 $A^5 = O$ のとき, $I - 2A$ の逆行列を A を使つて書け.

3.4.15 A が m 次正則行列, D が n 次正則行列ならば, 任意の $m \times n$ 行列 B, $n \times m$ 行列 C に対し, 次の行列 X, Y, Z は正則であることを示せ. また X^{-1}, Y^{-1}, Z^{-1} を求めよ.

$$X = \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} B & A \\ D & O \end{bmatrix}.$$

第4章　行列式

4.1　置換と対称群

ここでは, 次節以降で行列式と呼ばれるものを説明するにあたり, 対称群と呼ばれるものを学ぶ.

自然数 n を固定する. n 個の要素からなる集合をひとつ用意する. わかり易くするため $\{1,2,\cdots,n\}$ とする. このとき $\{1,2,\cdots,n\}$ から $\{1,2,\cdots,n\}$ への 1 対 1 対応の全体を考へて, それを

$$S_n$$

と記す. いま $\sigma \in S_n$ が $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ を, それぞれ $k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n$ に対応させるとき,

$$\sigma(1)=k_1,\quad \sigma(2)=k_2,\quad \cdots,\quad \sigma(n)=k_n$$

と記す. これをまとめて

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix} \tag{4.1.1}$$

と表す. この表記の仕方で, 上の要素に対応する要素がその下に書かれてゐれば, 左右の位置は入れ替へても良いものとする. また, 上下が同じ要素の箇所は省略して良いものとする. つまり, 書かれてゐない要素はそれ自身に写るものと理解する.

例 4.1.2　上記のことを例示する：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

さらに S_n の要素の間に, 次の様に写像の合成による演算がある. $\sigma, \tau \in S_n$ のときこれらの写像の合成 $\sigma\circ\tau$ を普通は $\sigma\tau$ と書いて σ と τ のと呼ぶ.

例 4.1.3　$\sigma \in S_5$ として, $\sigma(1)=4,\ \sigma(2)=2,\ \sigma(3)=5,\ \sigma(4)=3,\ \sigma(5)=1$ のとき

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

と書かれる. また $\tau(1)=5,\ \tau(2)=1,\ \tau(3)=3,\ \tau(4)=2,\ \tau(5)=4$ のとき

$$\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

である. このとき $\sigma\tau(1)=\sigma\big(\tau(1)\big)=\sigma(5)=1$ である.
同様に $\sigma\tau(2)=4,\ \sigma\tau(3)=5,\ \sigma\tau(4)=2,\ \sigma\tau(5)=3$ であるから,

$$\sigma\tau=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

注意 4.1.4　この積といふ演算については <u>交換法則が成り立たない</u> (確認せよ).

定義 4.1.5 上の集合 S_n を演算も考慮に入れた上で n 次 対称群 と呼ぶ. また, その要素を n 次のと呼ぶ.

S_n の要素のうち, 1, 2, $\cdots$, n の全てをそれ自身に写す置換は, 恒等置換 と呼ばれ, 通常 ε と表示される：

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

任意の $\sigma \in S_n$ に対し, $\sigma\varepsilon = \varepsilon\sigma = \sigma$ が成り立つ. また

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

に対して,

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

とおき, これを σ の 逆置換 と呼ぶ. ここで, 等式

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = \varepsilon$$

が成り立つことに注意せよ.

例 4.1.6 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ならば,

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

要素の個数 S_n の要素の個数は $n!$ である. なぜなら (4.1.1) の記法で, 下の行に $\{1, 2, \cdots, n\}$ を並べる並べ方を数えればよいからである.

巡回置換 ここで, さらに使ひ易ひ記号を導入する. 次に定義域 $\{1, 2, \cdots, n\}$ の m 個の要素からなる部分集合 $\{k_1, \cdots, k_m\}$ について, $\rho(k_1) = k_2$, $\rho(k_2) = k_3$, $\cdots$, $\rho(k_{m-1}) = k_m$, $\rho(k_m) = k_1$ の様に隣に順繰りに写す写像 ρ は m 次の 巡回置換 であると言はれて, 略記号で

$$\rho = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_m \\ k_2 & k_3 & k_4 & \cdots & k_1 \end{pmatrix} = (k_1\ k_2\ k_3\ \cdots\ k_m) \tag{4.1.7}$$

と書かれる.

例 4.1.8 巡回置換の例を挙げる：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix} = (4\ \ 3\ \ 5\ \ 7).$$

互換 2 次の巡回置換は 互換 と呼ばれる.

例 4.1.9 互換の例を挙げる：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = (2\ \ 4).$$

いくつかの n 次の置換 σ_1 σ_2, $\cdots$, σ_ℓ について, 真(しん)に動く数字 (自身に写る数字以外の数字) に

共通なものがないとき, これらは 互ひに素 な置換であるといふ.

補題 4.1.10 どんな置換も, 互ひに素な巡回置換の積で表せる.

これは例で説明した方がわかり易い.

例 4.1.11 置換
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
で写る数字を順次観察すると $1 \mapsto 3 \mapsto 5 \mapsto 7 \mapsto 1, \quad 2 \mapsto 4 \mapsto 6 \mapsto 2$ と写つてゐて, これで全ての数字を尽してゐるから
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 5\ \ 7)(2\ \ 4\ \ 6) = (2\ \ 4\ \ 6)(1\ \ 3\ \ 5\ \ 7).$$
かう見てみると (4.1.7) の記法は返つて元の記号よりわかり易くなつたことに気付くであらう.

補題 4.1.12 いかなる巡回置換も互換のみの積で表せる.

例へば $(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6) = (1\ \ 6)(1\ \ 5)(1\ \ 4)(1\ \ 3)(1\ \ 2)$. 一般に, 次の式が成り立つ :
$$(k_1\ \ k_2\ \ k_3\ \ \cdots\ \ k_m) = (k_1\ \ k_m)(k_1\ \ k_{m-1})\cdots(k_1\ \ k_3)(k_1\ \ k_2).$$

4.1.10 と 4.1.12 より次がわかる.

命題 4.1.13 いかなる置換も互換のみの積として表せる.

置換の符号 置換 σ が m 個の互換の積として表されるとき,
$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^m$$
と定め, これを σ のと呼ぶ. ひとつの置換を互換の積で表す方法は何通りもある. 実際
$$\begin{aligned}(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4) &= (1\ \ 4)(1\ \ 3)(1\ \ 2) \\ &= (1\ \ 3)(1\ \ 4)(3\ \ 4)(2\ \ 3)(1\ \ 3)\end{aligned}$$
などと幾通りにも表される. しかし, 置換の符号は互換の積による表示方法に依らずに決まる (4.1.24 参照). 単位置換 ε については
$$\operatorname{sgn}(\varepsilon) = 1$$
とする. これは互換 0 個 (偶数個) の積で表されるからでもあるし, $\varepsilon = (1\ \ 2)(1\ \ 2)$ と 2 個の積で表されるから思つてもよい.

偶置換, 奇置換 $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$ である置換 σ を 偶置換, $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ である置換 σ を 奇置換 と呼ぶ.

例題 4.1.14 次の置換 σ を互換のみの積で表示し, 符号を求めよ.
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 6 & 8 & 2 & 1 & 4 & 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

解答 最初に巡回置換の積に分解する.

$$1 \to 7 \to 9 \to 5 \to 1, \quad 2 \to 6 \to 4 \to 2, \quad 3 \to 8 \to 3$$

であるから $\quad \sigma = (3\ \ 8)(2\ \ 6\ \ 4)(1\ \ 7\ \ 9\ \ 5).$ 次に各巡回置換を互換で書けば

$$\sigma = (3\ \ 8)(2\ \ 4)(2\ \ 6)(1\ \ 5)(1\ \ 9)(1\ \ 7)$$

となる. よつて

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^6 = 1.$$

例 4.1.15 $S_3 = \{\ \varepsilon,\ (1\ \ 2),\ (1\ \ 3),\ (2\ \ 3),\ (1\ \ 2\ \ 3),\ (1\ \ 3\ \ 2)\ \}$ である.

偶置換は $\{\ \varepsilon,\ (1\ \ 2\ \ 3),\ (1\ \ 3\ \ 2)\ \}$, 奇置換は $\{\ (1\ \ 2),\ (1\ \ 3),\ (2\ \ 3)\ \}$

である.

演 習 問 題

4.1.16 次の置換の積を計算せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $(1\ \ 3)(2\ \ 3)(2\ \ 4)$ (4) $(1\ \ 4)(3\ \ 2)(1\ \ 2\ \ 4\ \ 3)(2\ \ 3)$

4.1.17 次の置換を 互ひに素な 巡回置換の積に分解せよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 2 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

4.1.18 次の置換を互換の積で表せ. また各々の置換の符号を求めよ.

(1) $(1\ \ 3\ \ 6\ \ 4)$ (2) $(1\ \ 2\ \ 5\ \ 3\ \ 4)$ (3) $(2\ \ 4\ \ 6)$

(4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 9 & 8 & 6 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

4.1.19 4 次の対称群 S_4 の元のすべてを互ひに素な巡回置換の積の形で書き下せ. また, 各元を 互ひに素な巡回置換の積で表し, 偶置換と奇置換に分けよ.

4.1.20 $\sigma, \tau \in S_n$ のとき $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$ が成り立つことを示せ.

以下の 4.1.21 から 4.1.25 は一続きの問題である.

4.1.21 n 個の文字 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を用意する. これらの文字からなる (係数がすべて実数である様な) 多項式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と $\sigma \in S_n$ について, 新たな多項式 σf を

$$(\sigma f)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(n)})$$

で定める. このとき, 以下の f と σ のそれぞれについて σf を求めよ.

(1) $f = x_1x_2 + 2x_2 + 3x_3,\ \ \sigma = (1\ \ 2)$.

(2) $f = x_1x_2 + 2x_2 + 3x_3,\ \ \sigma = (1\ \ 2\ \ 3)$.

(3) $f = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3),\ \ \sigma = (2\ \ 3)$.

(4) $f = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3),\ \ \sigma = (1\ \ 2\ \ 3)$.

4.1.22 いま,

$$\Delta = \Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i<j} (x_i - x_j)$$

とおく [1]. このとき, 任意の互換 σ について $\sigma\Delta = -\Delta$ となることを証明せよ.

4.1.23 任意の $\tau, \sigma \in S_n$ と任意の多項式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ について $(\tau\sigma)f = \tau(\sigma f)$ が成り立つことを示せ.

4.1.24 任意の置換 σ について,

$$\sigma\Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (-1)^m \Delta(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

[1] 例へば $n = 4$ なら $\begin{aligned}\Delta(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2)&(x_1 - x_3)(x_1 - x_4) \\ &\cdot(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \\ &\cdot(x_3 - x_4).\end{aligned}$

が成り立つことを示せ. ここで m は σ を互換のみの積で表したときの互換の個数である.

4.1.25 どんな置換 σ についても, それを互換のみの積として, どの様に表しても使用する互換の個数の偶奇は σ のみで定まり, 表し方に依らないことを証明せよ.

(ここでの方法以外にも非常に多くの証明が知られてゐるので, 調べてみると良い.)

4.1.26 S_n の偶置換の個数と奇置換の個数はどちらも $n!/2$ となることを証明せよ.

4.1.27 置換 σ について

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{m-1}\sigma_m$$

が互換への分解（つまり σ_j はすべて互換）のとき

$$\sigma^{-1} = \sigma_m\sigma_{m-1}\cdots\sigma_2\,\sigma_1$$

であることを示せ.

4.1.28 置換 σ について, $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$ を次の 2 通りの方法で示せ.

(1) 4.1.27 を使つて.

(2) $\sigma^{-1}\sigma = \varepsilon$ と 4.1.20 を使つて.

4.2　行列式の定義と性質 (1)

線形代数の理論の中でも行列式は特別な存在感がある．ここでは行列式の定義と基本的な性質を学ぶ．

> **定義 4.2.1**　n 次正方行列 $A = [\,a_{ij}\,]_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ について，
> $$|A| = \det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots\ a_{n\sigma(n)}$$
> と定め，これを A の<u>行列式</u>と呼ぶ．

問 4.2.2　2 次, 3 次, 4 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ について，行列式を成分の多項式として書き下せ．

A の行列式は以下の様な記号で表される：

$$|A|,\ \det(A),\quad |a_{ij}|,\ \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix},\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{vmatrix}.$$

例 4.2.3　$S_2 = \{\,\varepsilon,\ (1\ \ 2)\,\}$ であり，$\mathrm{sgn}(\varepsilon) = 1$, $\mathrm{sgn}((1\ \ 2)) = -1$ であるから

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(\varepsilon)\, a_{11}a_{22} + \mathrm{sgn}((1\ \ 2))\, a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

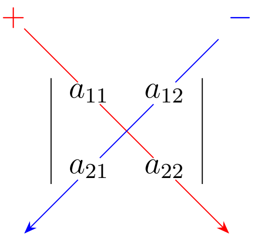
例 4.2.4　$S_3 = \{\,\varepsilon,\ (1\ 2),\ (1\ 3),\ (2\ 3),\ (1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2)\,\}$ で $(1\ 2\ 3) = (3\ 1)(2\ 1)$, $(1\ 3\ 2) = (2\ 1)(3\ 1)$ だから，

$$\mathrm{sgn}(\varepsilon) = \mathrm{sgn}((1\ 2\ 3)) = \mathrm{sgn}((1\ 3\ 2)) = 1,\quad \mathrm{sgn}((1\ 2)) = \mathrm{sgn}((1\ 3)) = \mathrm{sgn}((2\ 3)) = -1,$$

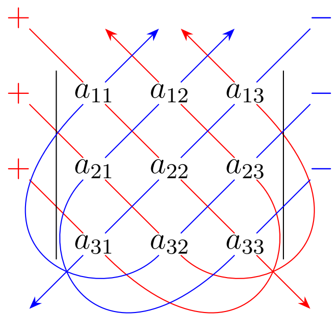
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Sarrus の規則　2 次および 3 次の正方行列の行列式は，4.2.3 や 4.2.4 の様に，左上から右下への成分の積には符号 $+$ を付け，右上から左下への成分の積には符号 $-$ を付けて和を取つたものである．この記憶の仕方を Sarrus（サラス）の規則といふ．

2 次



3 次



4 次以上

その様な規則は存在しない！

これらの式を模式的に表せば以下の様になる．ただし, それぞれの模様は元の行列を意味してゐて, ◯ のついた箇所に対応する成分を掛け合わせたものを意味する．

$$
\begin{aligned}
&2\text{ 次正方行列}\ \cdots\cdots\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline \bigcirc & \\\hline & \bigcirc \\\hline\end{array}
-
\begin{array}{|c|c|}\hline & \bigcirc \\\hline \bigcirc & \\\hline\end{array}
\\
&3\text{ 次正方行列}\ \cdots\cdots\quad
\begin{cases}
\begin{array}{|c|c|c|}\hline \bigcirc & & \\\hline & \bigcirc & \\\hline & & \bigcirc \\\hline\end{array}
+
\begin{array}{|c|c|c|}\hline & \bigcirc & \\\hline & & \bigcirc \\\hline \bigcirc & & \\\hline\end{array}
+
\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \bigcirc \\\hline \bigcirc & & \\\hline & \bigcirc & \\\hline\end{array}
\\
-
\begin{array}{|c|c|c|}\hline & \bigcirc & \\\hline \bigcirc & & \\\hline & & \bigcirc \\\hline\end{array}
-
\begin{array}{|c|c|c|}\hline \bigcirc & & \\\hline & & \bigcirc \\\hline & \bigcirc & \\\hline\end{array}
-
\begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \bigcirc \\\hline & \bigcirc & \\\hline \bigcirc & & \\\hline\end{array}
\end{cases}
\\
&4\text{ 次正方行列}\ \cdots\cdots\quad
\begin{cases}
\underset{\varepsilon}{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \bigcirc & & & \\\hline & \bigcirc & & \\\hline & & \bigcirc & \\\hline & & & \bigcirc \\\hline\end{array}}
-
\underset{(12)}{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & \bigcirc & & \\\hline \bigcirc & & & \\\hline & & \bigcirc & \\\hline & & & \bigcirc \\\hline\end{array}}
- \cdots
\\
+
\underset{(123)}{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & \bigcirc & & \\\hline & & \bigcirc & \\\hline \bigcirc & & & \\\hline & & & \bigcirc \\\hline\end{array}}
+
\underset{(132)}{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & \bigcirc & \\\hline \bigcirc & & & \\\hline & \bigcirc & & \\\hline & & & \bigcirc \\\hline\end{array}}
\\
+ \cdots
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.2.5}
$$

4 次以上の行列にも通用する計算方法を以下に説明する.

定理 4.2.6

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \boxed{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

証明 $A = [a_{ij}]$, $a_{21} = a_{31} = \cdots = a_{n1} = 0$ とおく. $\sigma \in S_n$ に対し, $\sigma(1) \neq 1$ ならば $\sigma(k) = 1$ となる $k \neq 1$ が存在する. このとき, 仮定から $a_{k\sigma(k)} = a_{k1} = 0$ で

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \cdots a_{k\sigma(k)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0$$

である. つまり $\sigma(1) \neq 1$ なる σ に対応する項はすべて 0 である. ゆゑに

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \,\cdots\, a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma(1)=1} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \,\cdots\, a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma(1)=1} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{11}\, a_{2\sigma(2)} \,\cdots\, a_{n\sigma(n)} \\ &= a_{11} \sum_{\sigma(1)=1} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{2\sigma(2)} \,\cdots\, a_{n\sigma(n)}. \end{aligned}$$

ここで, 最後の和は $\sigma(1) = 1$ なるすべての置換, つまり $\{2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$ のすべての置換を走る. その和は定義から, 所望の等式の右辺に他ならない. □

例 4.2.7 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3(2 \cdot 4 - 1 \cdot 3) = 15$

例 4.2.8 上三角行列の行列式を計算してみる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{12} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11}\, a_{12} \,\cdots\, a_{nn}$$

例 4.2.9 4.2.8 より, 特に $|I| = 1$.

定理 4.2.10 (1) 1 つの行を c 倍すると行列式は c 倍になる :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c\,a_{i1} & \cdots & c\,a_{i1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(2) 第 i 行が 2 つの行 vectors の和である行列の行列式は, 他の行は同一で第 i 行が各々の vectors である様な 2 つの行列のそれぞれの行列式の和に等しい :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & \cdots & b_{i1}+c_{i1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & c_{i1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{i1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

証明 (1) 定義により

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots (c\,a_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= c \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = (\text{右辺})\end{aligned}$$

となる.

(2) 定義により

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots (b_{i\sigma(i)} + c_{i\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots b_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots c_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = (\text{右辺})\end{aligned}$$

となる. □

例 4.2.11

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a+3 & b+6 & c+9 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & b & c \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 9 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad (\because 4.2.10(2)\ ) \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & b & c \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{vmatrix} \quad (\because 4.2.10(1)\ ).\end{aligned}$$

定理 4.2.12 (1) 2 つの行を入れ替へると行列式は -1 倍になる.

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ i \to \\ \\ j \to \\ \\ \\
\end{array}
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
= -
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\
\end{array}
$$

(2) ある 2 つの行が等しい行列の行列式は 0 である.

証明 (1) n 次の置換 σ に対し $\tau = \sigma\,(i\ j)$ とおくと,

$$\tau(j) = \sigma(i),\ \tau(j) = \sigma(i),\ \tau(k) = \sigma(k) \quad (k \neq i,\, j\ \text{のとき})$$

となる. また σ が S_n 全体を動くと, τ も S_n 全体を動く. さらに

$$\mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma\,(i\ j)) = -\mathrm{sgn}(\sigma)$$

である. よつて

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{j\sigma(i)} \cdots a_{i\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma} (-\mathrm{sgn}(\tau))\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{j\tau(j)} \cdots a_{i\tau(i)} \cdots a_{n\tau(n)} \\
&= -\sum_{\tau} \mathrm{sgn}(\tau)\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{i\tau(i)} \cdots a_{j\tau(j)} \cdots a_{n\tau(n)} = (\text{右辺}).
\end{aligned}
$$

(2) 正方行列 A の第 i 行と第 j が等しいとする. A の第 i 行と第 j 行を入れ替へたものは再び A であるから,

$$\det(A) = -\det(A).$$

よつて $2\det(A) = 0$. 即ち $\det(A) = 0$. □

例 4.2.13 $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ ② $\times \frac{1}{2}$ $= 0 \quad (\because$ 4.2.12 (2))

例 4.2.14 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} ③ \\ \\ ① \end{array}$ $= -6 \quad (\because$ 4.2.8 (2))

定理 4.2.15 行列の 1 つの行に他の行の何倍かを加へても, 行列式の値は変はらない.

$$\begin{array}{r}\\ \\ i \rightarrow \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+c\,a_{j1} & a_{i2}+c\,a_{j2} & \cdots & a_{in}+c\,a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

証明 4.2.10 より

$$\begin{array}{r}\\ \\ i \rightarrow \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \\ \end{array}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+c\,a_{j1} & \cdots & a_{in}+c\,a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow i \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array}$$

となるが, この最後の行列式では, 第 i 行と第 j 行が等しいので, 4.2.12(2) により, その値は 0 である. よつて

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

となり, 主張が示された. □

例 4.2.16

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & -5 & 7 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ ② + ① \times 2 \\ ③ + ① \times 3 \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 15 \\ 0 & 11 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 11 & 11 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 11 \begin{vmatrix} 1 & 15 \\ 0 & -14 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ ② + ① \times (-1) \end{array} = 11 \cdot (-14) = -154.$$

演 習 問 題

4.2.17 次の行列式を Sarrus の規則で計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & 6 \end{vmatrix}$

4.2.18 次の行列式を計算せよ.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 13 & -1 \\ 6 & -9 & 6 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 12 & 16 & 32 \\ -6 & 13 & 4 \\ 15 & 10 & -20 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} 2 & -4 & -5 & 3 \\ -6 & 13 & 14 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -8 \\ 2 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} 0 & -3 & -6 & 15 \\ -2 & 5 & 14 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \\ 15 & 10 & 10 & -5 \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{6} \end{vmatrix}$ (7) $\begin{vmatrix} 99 & 100 & 101 \\ 100 & 99 & 100 \\ 101 & 101 & 99 \end{vmatrix}$

(8) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 13 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ (9) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

(10) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (n 次) (11) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

4.3 行列式の定義と性質 (2)

転置行列の行列式 前節とは行に関する変形で行列式がどう変はるかを調べた．次の 4.3.1 を用いると，全く同じ性質が列に関する変形に対しても成り立つことがわかる．これにより行列式の計算はさらに容易になる．

> **定理 4.3.1** n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ について
> $$|A| = |{}^tA|.$$

証明 $A = [a_{ij}]$, ${}^tA = [b_{ij}]$ とおく．$b_{ij} = a_{ji}$ であるから，

$$\begin{aligned}|{}^tA| &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}.\end{aligned}$$

ここで $\sigma(j) = k$ のとき $j = \sigma^{-1}(k)$ であるから

$$a_{\sigma(j)j} = a_{k\,\sigma^{-1}(k)}.$$

よつて，上の式の各項の積を a_{ij} の i の小さい順に並べ替へると

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma^{-1}(1)}\, a_{2\,\sigma^{-1}(2)} \cdots\, a_{n\,\sigma^{-1}(n)}.$$

ここで $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$ であり (問 4.1.27)，また，$\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ は S_n から S_n への全単射 (1 対 1 対応) であるから，σ が S_n の要素の全てを走るとき，σ^{-1} も丁度 S_n の元を全て走る．従つて $\sigma^{-1} = \tau$ の式に書き直すことができて

$$= \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sgn}(\tau)\, a_{1\,\tau(1)}\, a_{2\,\tau(2)} \cdots\, a_{n\,\tau(n)}.$$

これは $|A|$ の定義式に他ならない． □

定理 4.3.2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

証明 行列を転置して, 列に関する性質を行の性質に移せばよい：

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & (\because\ 4.3.1\ ) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & (\because\ 4.2.6\ ) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & (\because\ 4.3.1\ ) \\ &= (\text{右辺}) \end{aligned}$$

となり, 証明できた. □

以下に述べる 3 つの定理も, 4.3.2 の証明と同様に転置行列をとり, 行に関する性質に帰着させることにより証明される. (各自確かめよ → 4.3.16)

定理 4.3.3 (1) 1 つの列を c 倍すると行列式は c 倍になる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c\,a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c\,a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(2) 第 j 行が 2 つの列 vectors の和である行列の行列式は, 他の列が同一かつ第 j 列が各々の vector である様な 2 つの行列のそれぞれの行列式の和に等しい.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j}+c_{ij} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj}+c_{1j} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & c_{ij} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 4.3.4 (1) 2 つの列を入れ替へると行列式は -1 倍になる.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(2) ある 2 つの列が等しい行列の行列式は 0 である.

定理 4.3.5 行列のある行に他の行の何倍かを加へても, その行列式の値は変はらない.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + c\,a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + c\,a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例 4.3.6 以下で $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ 等は, 直前の段階の第 1 列, 第 2 列, 第 3 列等を表す.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -7 \\ 2 & 3 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -5 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} ①+④\times(-3) \\ ②+④\times(-2) \\ ③+④\times(-1) \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} ④ \\ \\ \\ ① \end{matrix}$$

$$= - \underset{(\because 4.2.6)}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 8 \\ -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}} = \underset{\boxed{2}\times(-1)}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 8 \\ -3 & 5 & 8 \end{vmatrix}} = 2 \underset{\boxed{3}\times\frac{1}{2}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & 4 \end{vmatrix}} = 2 \underset{\boxed{3}+\boxed{1}\times(-3)}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 13 \end{vmatrix}}$$

$$= 2 \times 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} \quad (\because \text{定理 } 4.3.2) \quad = 2 \underset{\boxed{2}+\boxed{1}\times(-3)}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}} = 2 \times 1 \times 8 = \underline{16}.$$

例 4.3.7

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \underset{\boxed{3}+\boxed{1}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 2 \times 4 \times \underset{\boxed{1}\times\frac{1}{3}\ \ \boxed{2}\times\frac{1}{2}\ \ \boxed{3}\times\frac{1}{4}}{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = -24 \underset{\boxed{2}\ \boxed{1}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= -24 \times 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -48 \times (-1) = \underline{48}.$$

定理 4.3.8 A が r 次正方行列, D が s 次正方行列ならば,

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A)\det(D)$$

が成り立つ.

証明 4.3.1 により, いずれか一方のみを示せばよい. $n = r + s$ として行列を

$$X = \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix} = [\,a_{ij}\,]$$

とおく. 定義より

$$\det(X) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{r\sigma(r)}\, a_{r+1,\sigma(r+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \tag{4.3.9}$$

である. 仮定から $a_{ij} = 0$ $(1 \leqq i \leqq r,\ r+1 \leqq j \leqq n)$ であるので, $\{\sigma(1),\ \sigma(2),\ \cdots,\ \sigma(r)\}$ の中に r より大きな数があれば $a_{1\sigma(1)}, a_{2\sigma(2)}, \cdots, a_{r\sigma(r)}$ の内に 0 が含まれるから

$$a_{1\sigma(1)}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{r\sigma(r)}\, a_{r+1,\sigma(r+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0$$

となる. よつて上の (4.3.9) の σ に関する和については, $\{\sigma(1)\ \cdots,\ \sigma(r)\} = \{1,\ \cdots,\ r\}$ となつてゐるものだけを考へれば良い. このとき

$$\{\sigma(r+1)\ \cdots,\ \sigma(n)\} = \{r+1,\ \cdots,\ n\}$$

でもあるから, $\{1,\ \cdots,\ r\}$ と $\{r+1,\ \cdots,\ n\}$ のそれぞれの置換

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & r \\ \sigma(1) & \cdots & \sigma(r) \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} r+1 & \cdots & n \\ \sigma(r+1) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

について $\sigma = \tau\rho = \rho\tau$ であり, 上で狭めた範囲を σ が動くとき, τ と ρ は丁度, $\{1,\ \cdots,\ r\}$ の置換全体と $\{r+1,\ \cdots,\ n\}$ の置換全体を動く. しかも $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\rho)$ であるので,

$$\begin{aligned} |\,X\,| &= \sum_{\tau,\rho} \operatorname{sgn}(\tau\rho)\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{r\tau(r)}\, a_{r+1,\rho(r+1)} \cdots a_{n\rho(n)} \\ &= \Bigl(\sum_{\tau} \operatorname{sgn}(\tau)\, a_{1\tau(1)} \cdots a_{r\tau(r)}\Bigr)\Bigl(\sum_{\rho} \operatorname{sgn}(\rho)\, a_{r+1,\rho(r+1)} \cdots a_{n\rho(n)}\Bigr) = \det(A)\ \det(D) \end{aligned}$$

となり, 証明された. □

例 4.3.10

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 13 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -29 \cdot 17 = \underline{-493}\,.$$

定理 4.3.11 n 次正方行列 A, B に対して

$$\det(AB) = \det(A)\ \det(B).$$

証明 $2n$ 次正方行列の行列式 $\det\begin{bmatrix} A & O \\ -E & B \end{bmatrix}$ を 2 通りに計算する. まず 4.3.8 により

$$\det\begin{bmatrix} A & O \\ -E & B \end{bmatrix} = \det(A)\ \det(B).$$

次に $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ とおく. $\det\begin{bmatrix} A & O \\ -E & B \end{bmatrix}$ において, 第 1 列に b_{1k}, 第 2 列に b_{2k}, $\cdots$, 第 n 列に b_{nk} を掛けて第 $n+k$ 列に加へる操作を $k = 1, 2, \cdots, n$ に対して行ふと ($n = 2$ のときは 4.3.13)

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix} A & O \\ -E & B \end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix} A & AB \\ -E & O \end{bmatrix} = (-1)^n \det\begin{bmatrix} -E & O \\ A & AB \end{bmatrix} \\ &= (-1)^n \det(-E)\ \det(AB) = (-1)^n(-1)^n\ \det(AB) = \det(AB)\end{aligned}$$

となり, 成り立つ. □

例 4.3.12 $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{bmatrix}$ の両辺の行列式を取ると

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad-bc)^2$$

を得る.

例 4.3.13 4.3.11 の証明中の操作を $n = 2$ の場合に具体的に書いてみると

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & -1 & b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & -1 & 0 & b_{22} \end{vmatrix} \\ &\qquad \boxed{3} + \boxed{1} \times b_{11}, \quad \boxed{3} + \boxed{2} \times b_{21} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \\ &\qquad \boxed{4} + \boxed{1} \times b_{12}, \quad \boxed{4} + \boxed{2} \times b_{22}\end{aligned}$$

演 習 問 題

4.3.14 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 14 \\ -5 & 6 & 7 \\ 10 & 3 & -7 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 2 & 16 & 3 \\ 4 & 8 & -6 \\ 8 & 8 & 12 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 7 & 9 \\ -1 & 3 & 9 & -2 \\ 1 & -3 & -8 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 11 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 2 & 2 & 6 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} -1 & -4 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ 7 & 9 & 4 & 2 \\ -9 & 7 & -3 & 6 \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$ (8) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 9 & 3 \\ 3 & 6 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

4.3.15 A が正則行列ならば, $\det(A) \neq 0$ であり, $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ であることを示せ.

4.3.16 4.3.3, 4.3.4, 4.3.5 を証明せよ.

4.3.17 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & d \\ d & c \end{vmatrix}$ を 2 通り計算することにより, 次を示せ.

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = (ac + bd)^2 - (ad + bc)^2.$$

4.3.18 A, B, C が n 次正方行列のとき, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & O \end{vmatrix}$ を求めよ.

4.3.19 A, B が n 次正方行列のとき $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B||A - B|$ を示せ.

4.3.20 m が奇数のとき $A^m = E$ ならば $|A| = 1$ であることを示せ.

4.3.21 行列式は写像

$$|\ \ | : \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$$

として, 各行と各列に関しての <u>交代的</u> 線形性 (<u>多重線形性</u>) を持ち, かつ <u>正規化</u> ($|I| = 1$) されたものとして一意的に定まる. このことを証明せよ.

4.4 行列式の積保存性

4.3.11 を一般化した公式を証明しておく.

定理 4.4.1 $A=[a_{ij}]$, $B=[b_{jk}]$ をそれぞれ (m,n) 型, (n,m) 型の行列とし, $C=[c_{ik}]=AB$ とおく. このとき

(1) $m=n$ ならば $|C|=|A||B|$.

(2) $m<n$ ならば

$$|C|=\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_m\le m}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{2j_1} & \cdots & a_{mj_1}\\ a_{1j_2} & a_{2j_2} & \cdots & a_{mj_2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1j_m} & a_{2j_m} & \cdots & a_{mj_m}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{j_11} & b_{j_12} & \cdots & b_{j_1m}\\ b_{j_21} & b_{j_22} & \cdots & b_{j_2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{j_m1} & b_{j_m2} & \cdots & b_{j_mm}\end{vmatrix}. \tag{4.4.2}$$

(3) $m>n$ ならば $|C|=0$.

解 (2) から (1) と (3) が従ふから, (2) を証明する. 見易くするために $A=[\,\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n\,]$ と書くことにすると,

$$\begin{aligned}
|C| &= \left|\ \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}\ \right|_{m\times m} = \left|\ \sum_{j=1}^n \boldsymbol{a}_j b_{j1}\ \ \sum_{j=1}^n \boldsymbol{a}_j b_{j2}\ \ \cdots\ \ \sum_{j=1}^n \boldsymbol{a}_j b_{jm}\ \right|\\
&= \left|\ \sum_{j_1=1}^n \boldsymbol{a}_{j_1} b_{j_11}\ \sum_{j_2=1}^n \boldsymbol{a}_{j_2} b_{j_22}\ \ \cdots\ \ \sum_{j_m=1}^n \boldsymbol{a}_{j_m} b_{j_mm}\right|\\
&= \sum_{j_1=1}^n\left|\ \boldsymbol{a}_{j_1}\ \ \sum_{j_2=1}^n \boldsymbol{a}_{j_2} b_{j_22}\ \ \cdots\ \ \sum_{j_m=1}^n \boldsymbol{a}_{j_m} b_{j_mm}\right| b_{j_11} \quad (\because \text{第 1 列の線形性})\\
&= \sum_{j_1=1}^n\sum_{j_2=1}^n\left|\ \boldsymbol{a}_{j_1}\ \ \boldsymbol{a}_{j_2}\ \ \sum_{j_3=1}^n \boldsymbol{a}_{j_3} b_{j_33}\ \ \cdots\ \ \sum_{j_m=1}^n \boldsymbol{a}_{j_m} b_{j_mm}\right| b_{j_11}\,b_{j_22} \quad (\because \text{第 2 列の線形性})\\
&= \sum_{j_1,j_2,\cdots,j_m=1}^n \left|\ \boldsymbol{a}_{j_1}\ \ \boldsymbol{a}_{j_2}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{j_m}\right| b_{j_11}\,b_{j_22}\cdots b_{j_mm} \quad (\because \text{同様の事の繰り返し}).
\end{aligned}$$

ここで, 各項において $j_1,\cdots,j_m$ の中に重複があれば, その項は 0 になるから, 重複がない項のみの和が得られる. いま, それらの和の項を集合 $\{\,j_1,\cdots,j_m\}$ (従つて要素の順序は無視) ごとに分別すれば

$$= \sum_{\{\,j_1,\cdots,j_m\}\subset\{1,\cdots,n\}}\left|\ \boldsymbol{a}_{j_1}\ \ \boldsymbol{a}_{j_2}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{j_m}\right| b_{j_11}\,b_{j_22}\cdots b_{j_mm}.$$

これを $j_1<j_2<\cdots<j_m$ なる順序に整理すれば

$$= \sum_{j_1<j_2<\cdots<j_m}\left|\ \boldsymbol{a}_{j_1}\ \ \boldsymbol{a}_{j_2}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{j_m}\right| \sum_{\binom{j_1\ j_2\ \cdots\ j_m}{k_1\ k_2\ \cdots\ k_m}} \operatorname{sgn}\!\left(\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_m\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_m\end{pmatrix}\right) b_{k_11}\,b_{k_22}\cdots b_{k_mm}.$$

これは与式の右辺に他ならない.

(2) は, Schur 多項式の展開, さらに τ 函数の無限級数展開など, 様々な場面での応用がある.

演 習 問 題

4.4.3

4.4.4

4.5 余因子展開余因子行列と逆行列の公式

ここでは, 逆行列の公式に関して述べる.

定義 4.5.1 n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ と各 (i, j) について, 第 i 行の成分すべてと, 第 j 行のすべてを取り除いて, 隙間を詰めてできる $(n-1)$ 次正方行列を A_{ij} で表し, A の (i, j) 余因子 と呼ぶ. また, その行列式を $|A_{ij}|$ と書き, さらに

$$a^*{}_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ji}| \quad \text{(左辺と右辺で, 添字 } i \text{ と } j \text{ の順序が逆転してゐることに注意せよ.)}$$

と書いて, n 次正方行列

$$\tilde{A} = [\, a^*{}_{ij} \,]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

を A の 余因子行列 と呼ぶ.

n 次正方行列 $A = [a_{ij}]$ の第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $n-1$ 次正方行列を A_{ij} と書く. 即ち,

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (\qquad \text{の部分を除いて詰める}).$$

例 4.5.2 $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ とすると $B_{13} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, $B_{22} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

余因子展開 行列 $A = [a_{ij}]$ の第 j 列は

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_{2j} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

と n 個の vectors の和で書けるから, 定理 4.3.3(2) を繰り返へし使つて, A の行列式は

$$(*) \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

と書ける. この右辺の i 番目の行列式を計算しやう. まづ, 第 i 行を順に 1 つ上の行と入れ替へる操作を繰り返へして 1 番上に移動させる. 次に第 j 列を順に 1 つ左の列と入れ替へる操

作を繰り返へして 1 番左の列に移動させる操作を行ふ. つまり

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (\text{第 } i \text{ 行を上に移動})$$

$$= (-1)^{i+j-2} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \cdots & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} a_{ij}|A_{ij}|$$

これを $(\ast)$ の右辺の n 個の行列式に行へば,

$$\boxed{|A| = (-1)^{1+j}a_{1j}|A_{1j}| + (-1)^{2+j}a_{2j}|A_{2j}| + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}|A_{nj}|}$$

となる. これを行列式 $|A|$ の第 j 列に関する余因子（よいんし）展開といふ. また, 第 j 列に代りに第 i 行で同様な操作を行へば

$$\boxed{|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}| + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}|}$$

を得る. これを行列式 $|A|$ の第 i 行に関する余因子展開といふ.

例 4.5.3 (第 2 列に関する余因子展開)

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

行列の成分に 0 が多い列や行があれば, その列や行に関する余因子展開が有効である.

例 4.5.4 (第 2 行に関する余因子展開)

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6.$$

例 4.5.5 (n 次正方行列の行列式の第 1 行に関する余因子展開)

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & b \\ b & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & a & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & b & a & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b & a \end{vmatrix} + (-1)^{n-1}b\begin{vmatrix} b & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b & a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b \end{vmatrix}$$

$$= a^n + (-1)^{n-1}b^n.$$

定理 4.5.6 正方行列 A とその余因子行列 $\tilde{A}$ の間に次の関係がある：

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|I.$$

問 4.5.7 4.5.6 を証明せよ.
(Hint : $A\tilde{A} = I$ は A の 列に関する余因子展開 (それは, 行列式の列に関する多重線形性から導かれる) を用ゐて示される. $\tilde{A}A = I$ は A の 行に関する余因子展開 (それは, 行列式の行に関する多重線形性から導かれる) を用ゐて示される.)

定理 4.5.8 A が正則行列であるためには, $|A| \neq 0$ であることが必要十分である. また, このとき $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$ である.

4.5.9 正方行列 A, B について $AB = I$ とする. このとき $BA = I$ であることを次の問に従つて示せ.
(1) $|A| \neq 0$ を示せ. (Hint : 4.4.1(1) を利用する.)
(2) $B = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$ であることを示せ. (Hint : 4.5.6 を利用する.)
(3) $BA = I$ を示せ.

演 習 問 題

4.5.10 次の行列の行列式を与へられた行または列に関して余因子展開した式を書け. 但し, 計算に入る前の展開式のみ記せ.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ (第 3 行)　　(2) $\begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 3 & y & 2 \\ 2 & z & 1 \end{bmatrix}$ (第 2 列)

4.5.11 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & 0 \\ 0 & 0 & h & i \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ a & 4 & 0 & 1 & d \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & c & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4.5.12 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 7 \\ 6 & 10 & 15 & 8 & 9 & 8 \\ 4 & 10 & 20 & 9 & 10 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 10 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$ ans

4.5.13 (Vandermonde(ファンデルモンド) の行列式) 次の等式が成り立つことを示せ :

$$|\,{x_j}^{i-1}\,| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

4.6 特別な形の行列式

いくつかの特別な形の行列式の値の求め方を知つてゐると便利である.

例題 4.6.1 次の等式 (Vandermonde の行列式) を証明せよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i).$$

解答 n に関する帰納法で示す. $n = 2$ のときは正しい. $n-1$ 次行列のときに正しいと仮定する. このとき, 左辺の行列式に ⓝ $-$ ($n-1$)$\times x_1$, ($n-1$) $-$ ($n-2$)$\times x_1$, $\cdots$, ② $-$ ①$\times x_1$ といふ行の基本変形を行ふと

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & {x_2}^{n-2}(x_2 - x_1) & \cdots & {x_n}^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ {x_2}^{n-2} & \cdots & {x_n}^{n-2} \end{vmatrix} \\
&= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \prod_{2 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i) \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\
&= \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (x_j - x_i)
\end{aligned}$$

後半の等式は因子の個数が ${}_n\mathrm{C}_2 = n(n-1)/2$ 個であるから正しい.

例題 4.6.2 下記の $n+1$ 次の正方行列の行列式についての等式が成り立つことを示せ.

$$F = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ a_2 & 0 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

解答 n に関する帰納法で示す. $n=0$ のときは正しい. $n-1$ まで成り立つとして, n のときに成り立つことを示す. F に関する余因子展開を行ふと

$$\begin{aligned} F &= a_0 \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \ddots & 0 \\ a_2 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ a_3 & 0 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} \\ &= a_0 x^n + (a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n) \qquad (\because \text{帰納法の仮定}) \\ &= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n. \end{aligned}$$

例題 4.6.3 次の等式が成り立つことを示せ.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix} = 0.$$

解答 列の基本変形を行つて

$$(\text{左辺}) = \begin{vmatrix} 1 & a & b & a+b+c+d \\ 1 & b & c & b+c+d+a \\ 1 & c & d & c+d+a+b \\ 1 & d & a & d+a+b+c \end{vmatrix}$$

$$\boxed{4} + \boxed{2}, \quad \boxed{4} + \boxed{3}$$

$$= (a+b+c+d) \begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ 1 & b & c & 1 \\ 1 & c & d & 1 \\ 1 & d & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (\because \ \boxed{1} = \boxed{4}\ ).$$

演 習 問 題

4.6.4 次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 7 \\ 3^2 & 2^2 & 5^2 & 7^2 \\ 3^3 & 2^3 & 5^3 & 7^3 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 3 & 2^2 & 1 & 1 \\ 3^2 & 2^3 & 1 & 7 \\ 3^3 & 2^4 & 1 & 7^2 \\ 3^4 & 2^5 & 1 & 7^3 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} 2^3 & 1 & 2^2 & 2 \\ (-3)^3 & 1 & 3^2 & -3 \\ 7^3 & 1 & 7^2 & 7 \\ 5^3 & 1 & 5^2 & 5 \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4^3 & 4^2 \\ 2^2 & 2^3 & 2^5 & 2^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2^2 & -2^4 & 2^3 \end{vmatrix}$

4.6.5 次の式が成り立つことを示せ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & a & a \\ x & y & b & b \\ x & y & z & c \end{vmatrix} = -(x-a)(y-b)(z-c)$

(2) $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = -(a-b)^4$

(3) $\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & & \vdots \\ 0 & x & 1+x^2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$

(n 次)

(4) $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix} = (af - be + cd)^2$

第5章　Vector 空間

5.1　体

これまで学んだ線形代数学では, vector や行列の成分はすべて実数, または複素数である場合に限定してきた. しかし, 本来の線形代数学はもつと広い守備範囲を持つてゐて, 成分が, 一般に体と呼ばれるものとして, ほぼ同様な理論が展開できる. ここでは, 体について学ぶ.

定義 5.1.1　集合 $\mathbf{K}$ において

F0　加法と呼ばれる演算 $\mathbf{K}\times\mathbf{K}\longrightarrow\mathbf{K}$, $(a,b)\mapsto a+b$,

　　および乗法と呼ばれる演算演算 $\mathbf{K}\times\mathbf{K}\longrightarrow\mathbf{K}$, $(a,b)\mapsto ab$ が定められてゐて,

次の性質 **F1**〜**F9** が全て満たされるとき, 集合 $\mathbf{K}$ は <u>体</u> であるいはれる :

(下記において a, b, $c\in\mathbf{K}$ は任意の元を表す)

F1　(加法に関する結合律)　$(a+b)+c=a+(b+c)$.

F2　(加法に関する交換律)　$a+b=b+a$.

F3　<u>加法に関する単位元</u> と呼ばれる $0\in\mathbf{K}$ が存在して, $a+0=0+a=a$.

F4　各 a に対して <u>加法に関する逆元</u> と呼ばれる $-a$ が存在して, $a+(-a)=0$.

F5　(乗法に関する結合律)　$(ab)c=a(bc)$.

F6　(乗法に関する交換律)　$ab=ba$.

F7　<u>乗法に関する単位元</u> と呼ばれる (0 と異なる[1]) 元 $1\in\mathbf{K}$ が存在して, $a1=1a=a$.

F8　各 $a\neq 0$ に対して <u>乗法に関する逆元</u> と呼ばれる a^{-1} が存在して, $a\,a^{-1}=a^{-1}\,a=1$.

F9　(分配律)　$(a+b)c=ac+bc$.

例 5.1.2　体の例を挙げる.

(1)　有理数体 $\mathbb{Q}$.　実数体 $\mathbb{R}$.　複素数体 $\mathbb{C}$.

(2)　Gauss 数体 $\mathbb{Q}(i)=\{\,x+yi\,|\,x,\,y\in\mathbb{Q}\,\}$.

(3)　$\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{\,x+y\sqrt{2}\,|\,x,\,y\in\mathbb{Q}\,\}$.

(4)　p を素数とするとき p 元体 $\mathbb{F}_p=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$　(「代数学 1」で学ぶ).

(5)　p を素数, n を自然数とするとき p^n 元体　$\mathbb{F}_{p^n}$　(「代数学 5」で学ぶ).

(6)　不定元 x の $\mathbb{Q}$ 係数の有理式の全体　$\mathbb{Q}(x)$　($\mathbb{Q}$ 上の 1 変数有理函数体と呼ばれる).

一般の体を成分に持つ行列

一般に体 $\mathbf{K}$ を成分に持つ行列は $\mathbf{K}$ が $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ の場合と同様に定義できる. 成分がすべて $\mathbf{K}$ に含まれる $m\times n$ 型行列の全体を $\mathrm{Mat}(m,n,\mathbf{K})$ と記す. $\mathrm{Mat}(n,\mathbf{K})=\mathrm{Mat}(n,n,\mathbf{K})$ などと表すこととする.

---

[1] $0=1$ を許す流儀もあり, その様な体 $\{0\}$ ($1=0$) を <u>1 元体</u> と称する.

5.2 Vector 空間と部分空間

まづ vector 空間の定義から始める.

定義 5.2.1 体 $\mathbf{K}$ と集合 V に対し,
V0 和 と呼ばれる写像 $V \times V \to V,\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mapsto \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ および
scalar 倍 と呼ばれる写像 $\mathbf{K} \times V \to V,\ (a, \boldsymbol{y}) \mapsto a\boldsymbol{x}$ が与へられて,
これらの演算について以下の **V1**〜**V7** のすべてが成り立つとき V を $\mathbf{K}$ 上の vector 空間
(あるいは $\mathbf{K}$ 上の線形空間, $\mathbf{K}$ 線形空間, $\mathbf{K}$ vector 空間 など) といふ.
以下 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ は任意の元を表す.
V1 (結合律) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$.
V2 (交換律) $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$.
V3 零 vector と呼ばれる元 $\mathbf{0}$ が存在して $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}$.
V4 各 $\boldsymbol{x}$ に対して, 逆 vector と呼ばれる $-\boldsymbol{x}$ が存在して, $\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$.
V5 $a(b\boldsymbol{x}) = (ab)\boldsymbol{x}$.
V6 $a(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x} + a\boldsymbol{y}$.
V7 $(a + b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{x}$.

問 5.2.2 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 V において $0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が成り立つことを示せ.

注意 5.2.3 V を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とせよ.
(1) 零 vector $\mathbf{0}$ は唯 1 つだけ存在する. なぜなら, 別に $\mathbf{0}'$ が存在すれば, **V3** により $\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}'$, $\mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$ がともに成り立つ. これと **V2** により $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$ である.
(2) $\boldsymbol{x}$ に対し, **V4** にいふ $-\boldsymbol{x}$ は唯 1 つだけ存在する. 実際, もう 1 つあつたとして, $\boldsymbol{x}'$ とすると $-\boldsymbol{x} = \mathbf{0} - \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}) + (-\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}' + (\boldsymbol{x}) + (-\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}' + \mathbf{0} = \boldsymbol{x}'$ となるからである.

Vector 空間の例

ここでは, vector 空間や部分空間の例を挙げる. $\mathbb{R}$ 上の 数 vector 空間 $\mathbb{R}^n$ だけが vector 空間ではなく, vector 空間は至るところに現れる. 読者にはこれらを確かめて欲しい.

例 5.2.4 $\mathrm{Mat}(n, 1, \mathbf{K}) = \mathbf{K}^n$ は $\mathbf{K}$ 上の 数 vector 空間 と呼ばれる $\mathbf{K}$ 上の vector 空間.

例 5.2.5 $V = \mathbb{R}\cos x + \mathbb{R}\sin x$. は $\mathbb{R}$ 上 vector 空間である.

例 5.2.6 体 $\mathbf{K}$ 上の n 次以下の x の多項式全体を $\mathbf{K}[x]_n$ と記す. これは普通の和と scalar 倍に関して $\mathbf{K}$ 上の vector 空間である.

例 5.2.7 体 $\mathbb{Q}(i) = \{\, a + bi \,|\, a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q} \,\}$ は $\mathbb{Q}$ 上の vector 空間である.

例 5.2.8 体 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{\, a + b\sqrt{2} \,|\, a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q} \,\}$ は $\mathbb{Q}$ 上 2 次元の vector 空間である. $\{\, 1,\ \sqrt{2} \,\}$ は 1 つの基である.

例 5.2.9 5 元体 $\mathbb{F}_5$ 上の多項式 $x^3 + 2x + 1$ は既約である. これの根 α の $\mathbb{F}_5$ 上の有理式の全体 $\mathbb{F}_5(\alpha)$ は $\mathbb{F}_5$ 上の vector 空間である.

定義 5.2.10 Vector 空間 V の部分集合 W は
S1 $\mathbf{0} \in W$,
S2 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ ならば $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$,
S3 $c \in \mathbf{K}$, $\boldsymbol{u} \in W$ ならば $c\boldsymbol{u} \in W$
の 3 つを満たすとき, V の部分空間であるといはれる.

問 5.2.11 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 V の部分空間 W は, $\mathbf{K}$ 上の vector 空間であることを示せ.
このことから, V の部分集合 W が V における和と scalar 倍に関して, vector 空間をなすこととが W が V の部分空間であることに他ならないことがわかる.

例題 5.2.12 $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ のとき, 次の W は $\mathbf{K}^n$ の部分空間であることを示せ :

$$W = \{\, \boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \,\}.$$

解 5.2.10 の 3 つの条件を確認すればよい. **S1** について. $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$ であるから $\mathbf{0} \in W$ である.
S2 について. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ とすると $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, $A\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$. よつて

$$A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

となり, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$ である.
S3 $\boldsymbol{x} \in W$, $c \in \mathbf{K}$ とすると $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ であるから

$$A(c\boldsymbol{x}) = c(A\boldsymbol{x}) = c\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

となり, $c\boldsymbol{x} \in W$ である.

例題 5.2.13 次の W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間であるか否か調べよ.

(1) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - \ x_3 &= 0 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}.$

(2) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - \ x_3 &= 2 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned} \right\}.$

解 (1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ とおけば $W = \{\, \boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \,\}$ と書けるから, 5.2.12 により, 部分空間である. あるいは, 直接に 5.2.10 の 3 条件を確認してもよい.
(2) $A\mathbf{0} = \mathbf{0} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ であるから, 部分空間ではない. ちなみに, 他の 2 条件も成立しないから, それを示してもよい.

例題 5.2.14 次の W は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間になるか否かを調べよ.
(1) $W = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) = 0,\ f(2) = 0 \,\}$.
(2) $W = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) = 2 \,\}$.
(3) $W = \{\, f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid xf'(1) + 3f(x) = 0 \,\}$.

解 (1) W は部分空間である.
(2) W は部分空間でない.
(3) W は部分空間である.

定義 5.2.15 V が体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間で, W_i $(1 \leq i \leq r)$ が V の部分空間のとき, 集合 $\left\{ \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_r \,\middle|\, \boldsymbol{w}_i \in W_i \ (1 \leq i \leq r) \right\}_r$ は部分空間である (確認せよ). これを $W_1, \cdots, W_r$ の 和 と呼び $W_1 + \cdots + W_r$ または $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} W_i$ で表す.

問 5.2.16 上の 5.2.15 で述べた $W_1 + \cdots + W_r$ が V の部分空間であることを示せ.

演 習 問 題

5.2.17 次の W は $\mathbb{R}^3$ の部分空間になるか否かを調べよ.

(1) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \end{array} \right\}$.

(2) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} 4x_1 - x_2 - 3x_3 \leq 0 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 \leq 1 \end{array} \right\}$.

(3) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 = 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 = 5x_3 \end{array} \right\}$.

(4) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{l} {x_1}^2 - {x_2}^2 + {x_3}^2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{array} \right\}$.

(5) $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \right\}$.

5.2.18 次の W は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間になるか否かを調べよ.

(1) $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(0) = 0,\ f(2) = 0 \}$.

(2) $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid f(1) \leq 2 \}$.

(3) $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid (x-1)f'(x) + f(x) = 0 \}$.

(4) $W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid (x-1)^2 f''(x) - x f'(1) + f(x) = 0 \}$.

5.2.19 5.2.10 の条件 **S1** を次の条件で置き換へてもよいことを示せ :

S1' W は空集合ではない.

5.2.20 V を $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とせよ. W_1 と W_2 が V の部分空間であるとき, $W_1 \cap W_2$ も V の部分空間であることを示せ.

5.2.21 $\mathbb{R}^3$ の部分空間 W_1, W_2 で, $W_1 \cup W_2$ が $\mathbb{R}^3$ の部分空間でない例を挙げよ.

5.2.22 V を $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とせよ. W_1 と W_2 が V の部分空間であるとき, $W_1 \cup W_2$ が V の部分空間であるならば, $W_1 \supset W_2$ または $W_1 \supset W_2$ であることを示せ.

5.3　1 次独立と 1 次従属

ここでは 1 次独立と 1 次従属について学ぶ.

定義 5.3.1 V を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とする. $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$ について

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n \quad (c_1,\ \cdots,\ c_n \in \mathbf{K})$$

なる式を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ の 1 次結合 と呼ぶ.

問 5.3.2 5.3.1 の式が V の vector を表すことを (5.2.1 を使つて) 確認せよ.

問 5.3.3 W_i $(1 \leq i \leq r)$ が vector 空間 V の部分空間のとき, 集合 $W_1 + \cdots + W_r$ は集合 $W_1 \cup \cdots \cup W_r$ に属する vectors の 1 次結合の全体に他ならないことを示せ.

定義 5.3.4 体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 V において, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$ を考へる.
(1) これらの vectors に関する

$$c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0} \quad (c_,\ \cdots,\ c_n \in \mathbf{K})$$

なる形の関係式を $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ の 1 次関係 と呼ぶ. とくに, 1 次関係

$$0\boldsymbol{u}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{u}_n = \mathbf{0}$$

を 自明な 1 次関係といふ.
(2) vectors $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$ が自明な 1 次関係しか持たないとき, これらの vectors は 1 次独立 であるといはれる.
(3) 1 次独立でない vectors は 1 次従属 であるといはれる.

問 5.3.5 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次従属であるためには, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ のうち少くとも 1 つの vector が他の $n-1$ 個の vectors の 1 次結合で書けることが必要十分である.

問 5.3.6 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次独立で, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次従属ならば $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ の 1 次結合で書ける.

補題 5.3.7 V の vectors の 2 つの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ について,
(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ のどれもが $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で書けて,
(2) $n > m$ である
ならば $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次従属である.

証明 ある自明でない $c_1, c_2, \cdots, c_n$ が等式

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

を満たすことを示す. 条件 (1) により $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ が存在して,

$$(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_m) = (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m)A$$

となる. このとき条件 (2) から

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

は非自明な解を持つ. その 1 つを

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

とおけば, これが求めるものである. □

問 5.3.8 Vectors $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ が 1 次独立で, $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ のとき,

$$(\,\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2,\, \cdots,\, \boldsymbol{u}_m\,)A = (\mathbf{0},\, \mathbf{0},\, \cdots,\, \mathbf{0}\,)$$

ならば $A = O$ である. これを示せ.

問 5.3.9 Vectors $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ が 1 次独立で, $A, B \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ のとき,

$$(\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2,\, \cdots,\, \boldsymbol{u}_m)A = (\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2,\, \cdots,\, \boldsymbol{u}_m)B$$

ならば $A = B$ である. これを示せ.

5.4 最大 1 次独立数

定義 5.4.1 Vector 空間 V と部分集合 $X \subset V$ が与へられたとせよ. もし, X に属する r 個の vectors があり, それらは 1 次独立で, かつ, X のどんな $r+1$ 個の vectors も 1 次従属であるならば, r を, 集合 X の 最大 1 次独立数 と呼ぶことにする.

問 5.4.2 Vector 空間 V に属する 2 つの組 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$, $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ に対し, 各 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で書けるならば

$$\text{集合 } \{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\} \text{ の最大 1 次独立数} \leq \text{集合 } \{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\} \text{ の最大 1 次独立数}$$

である. これを示せ. (Hint : 右辺の値を r とし, それを与へる組を採り, 5.3.6 と 5.3.7 を使へ.)

問 5.4.3 集合 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ の最大 1 次独立数が r であるためには, $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ の中に r 個の 1 次独立な vectors があり, 他の $m-r$ 個の vectors はこの r 個の vectors の 1 次結合で書けることが必要十分である. これを示せ.
(Hint : 必要性の証明には 5.3.6 を使ふ. 十分性の証明 : まづ 集合 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ の最大 1 次独立数が r 以上であることはすぐわかる. r 以下であることを示すのに 5.4.2 を使へ.)

与へられたいくつかの vectors の間の 1 次関係 を全て求めるのにも, 簡約化が用ゐられる. これにより基を見つけることができる.

例題 5.4.4 $\mathbb{R}^4$ 内の 5 つの vectors

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}-2\\3\\-1\\5\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}-3\\2\\-3\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}6\\1\\9\\15\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}-5\\1\\-1\\3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_5=\begin{bmatrix}4\\1\\-10\\-19\end{bmatrix}$$

の組の最大 1 次独立数 r と r 本の 1 次独立な vectors を求め. また, その組に属さないものについては, その組に属する vectors の 1 次結合で表せ.

解. $\{\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5\}$ の間の 1 次関係と $\{\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3,\ \boldsymbol{b}_4,\ \boldsymbol{b}_5\}$ の間の 1 次関係は全く同じである. しかるに, 成分を眺めれば, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_4$ は 1 次独立で,

$$\boldsymbol{b}_3=3\boldsymbol{b}_1-4\boldsymbol{b}_2,\quad \boldsymbol{b}_5=-2\boldsymbol{b}_1+5\boldsymbol{b}_2-3\boldsymbol{b}_4$$

なので, 1 次独立な最大の組として $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4$ が取れて, $r=3$ である. また

$$\boldsymbol{a}_3=3\boldsymbol{a}_1-4\boldsymbol{a}_2,\quad \boldsymbol{a}_5=-2\boldsymbol{a}_1+5\boldsymbol{a}_2-3\boldsymbol{a}_4.$$

$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	
−2	−3	6	−5	4	
3	2	1	1	1	
−1	−3	9	−1	−10	
5	0	15	3	−19	
−1	−3	9	−1	−10	③
3	2	1	1	1	
−2	−3	6	−5	4	①
5	0	15	3	−19	
1	3	−9	1	10	① × (−1)
3	2	1	1	1	
−2	−3	6	−5	4	
5	0	15	3	−19	
1	3	−9	1	10	
0	−7	28	−2	−29	② + ① × (−3)
0	3	−12	−3	24	③ + ① × 2
0	−15	60	−2	−69	④ + ① × (−5)
1	3	−9	1	10	
0	−7	28	−2	−29	
0	1	−4	−1	8	③ × $\frac{1}{3}$
0	−15	60	−2	−69	
1	3	−9	1	10	
0	1	−4	−1	8	③
0	−7	28	−2	−29	②
0	−15	60	−2	−69	
1	0	3	4	−14	① + ② × (−3)
0	1	−4	−1	8	
0	0	0	−9	−27	③ + ② × 7
0	0	0	−17	−51	④ + ② × 15
1	0	3	4	−6	
0	1	−4	−1	6	
0	0	0	1	−3	④ × $(-\frac{1}{9})$
0	0	0	−17	51	
1	0	3	4	−6	
0	1	−4	−1	6	
0	0	0	1	−3	
0	0	0	0	0	④ + ③ × 17
1	0	3	0	−2	① + ③ × (−4)
0	1	−4	0	5	② + ③
0	0	0	1	−3	
0	0	0	0	0	
$\boldsymbol{b}_1$	$\boldsymbol{b}_2$	$\boldsymbol{b}_3$	$\boldsymbol{b}_4$	$\boldsymbol{b}_5$	

行列の 階数 (rank) の定義 rank(A) = “ A の簡約化の主成分の個数” を思ひ出さう. これについて, 次が成り立つのであつた.

命題 5.4.5 次の関係が成り立つ:

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(A) &= A \text{ の列 vectors の最大 1 次独立数}\\ &= A \text{ の行 vectors の最大 1 次独立数.}\end{aligned}$$

証明 最初の等号は 5.4.4 の考へ方を使へばわかる. 第 2 の等号を示さう. A の簡約化を B とし, A の行 vectors の最大 1 次独立数を r, B の行 vectors の最大 1 次独立数を s とせよ. A から B への行の基本変形を辿れば B の各行 vectors は A の行 vectors の 1 次結合で書けるから, 5.4.2 により $r \geq s$ である. 一方 B から A へも行の基本変形で戻れるのであるから $r \leq s$ であり, 結局 $r = s$ でなくてはならない. s は B の主成分の個数に等しく, それは rank(A) に他ならない. □

命題 5.4.6 A を n 次正方行列とする. 次は同値

(1) A は正則行列.

(2) A の n 個の列 vectors は 1 次独立.

(3) A の n 個の行 vectors は 1 次独立.

証明 3.4.4 より A が正則であるためには rank$(A) = n$ であることが必要十分である. これは 5.4.5 により, A の列 vectors について, その最大 1 次独立数が n, 即ち, A の列 vectors が 1 次独立であることと同値であるから (1) $\Leftrightarrow$ (2) が示された. 行 vectors についても全く同様に示され (1) $\Leftrightarrow$ (3) もいへる (下記の 5.4.7). □

問 5.4.7 5.4.6 の (1) $\Leftrightarrow$ (3) を証明せよ.

命題 5.4.8 (簡約化の一意性) 与へられた行列の簡約化は一意的に存在する.

証明 与へられた行列 A に対し, 5.4.4 で行つた様に, A の列からなる vectors について, 左から順に考察する列を 1 本づつ増やしながら, その都度 1 次関係を見てゆけば, 得られた 1 次関係は次の段階に影響を与へないから, 最終的に A の列からなる vectors についてのこの方法での 1 次関係が一意的に得られる. その 1 次関係の係数が A の簡約化 B の成分を定める. 一方, A の簡約化 B が与へられたとき, その列からなる vectors の 1 次関係は A の vectors の上記の様手順で得られる 1 次関係を与へる. 従つて, A の簡約化は一意的でなくてはならない. □

命題 5.4.9 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ を 1 次独立な vectors とし,

$$(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m)A$$

と書けてゐるとする. A の列 vectors を $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ とする. このとき次が成り立つ:

(1) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ と $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ には同じ 1 次関係が成り立つ.

(2) $m = n$ のとき $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立であるためには, A が正則行列であることが必要十分である.

証明 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次関係

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

を満たすとせよ. $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ とおくと

$$\boldsymbol{0} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = (\boldsymbol{v}_1,\, \boldsymbol{v}_2,\, \cdots,\, \boldsymbol{v}_n)\,\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{u}_1,\, \boldsymbol{u}_2,\, \cdots,\, \boldsymbol{u}_m)\,A\boldsymbol{c}$$

であるが, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ は 1 次独立だから 5.3.8 により $A\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$. よつて

$$c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}.$$

逆は明らかである. (2) は (1) と 5.4.6 からわかる. □

例題 5.4.10 次の $\mathbb{R}[x]_3$ の vectors の組について, その最大 1 次独立数 r と r 本の 1 次独立な vectors を 1 組求め, さらに, 他の vectors をそれらの 1 次結合で表せ.

$$f_1(x) = -2 + 3x - x^2 + 5x^3, \quad f_2(x) = -3 + 2x - 3x^2, \quad f_3(x) = 6 + x + 9x^2 + 15x^3,$$
$$f_4(x) = -5 + x - x^2 + 3x^3, \quad f_5(x) = 4 + x - 10x^2 - 19x^3.$$

解 $f_1, \cdots, f_5$ を $\mathbb{R}[x]_3$ の 1 次独立な vectors の組 $\{1, x, x^2, x^3\}$ の 1 次結合で表はせば,

$$(f_1,\, f_2,\, f_3,\, f_4,\, f_5) = (1,\, x,\, x^2,\, x^3)\begin{bmatrix} -2 & -3 & 6 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 9 & -1 & -10 \\ 5 & 0 & 15 & 3 & -19 \end{bmatrix}.$$

この右辺に掛かつてゐる行列を $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5]$ とする. $\{1, x, x^2, x^3\}$ は 1 次独立であるから, 5.4.9 により $f_1, \cdots, f_5$ の 1 次関係は $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_5$ の 1 次関係と一致する. 従つて $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_5$ の 1 次関係を調べればよいが, これらは 5.4.4 の vectors を順に並べたものと同じである. よつて

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4 \text{ が 1 次独立な最大の組の 1 つで}, \\ &\boldsymbol{a}_3 = 3\boldsymbol{a}_1 - 4\boldsymbol{a}_2, \\ &\boldsymbol{a}_5 = -2\boldsymbol{a}_1 + 5\boldsymbol{a}_2 - 3\boldsymbol{a}_4 \end{aligned}$$

である. それゆゑ $r = 3$ で

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} f_1, f_2, f_4 \text{ が 1 次独立な最大の組の 1 つで}, \\ f_3 = 3f_1 - 4f_2, \\ f_5 = -2f_1 + 5f_2 - 3f_4. \end{cases}$$

演 習 問 題

5.4.11 次の vectors の組について, 1 次独立な最大の組を求めよ.

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{bmatrix}-1\\4\\2\\-3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{bmatrix}3\\0\\-5\\2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_3=\begin{bmatrix}11\\-8\\-19\\12\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_4=\begin{bmatrix}2\\-3\\1\\6\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_5=\begin{bmatrix}-12\\-2\\29\\-1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{a}_6=\begin{bmatrix}-9\\10\\25\\-6\end{bmatrix}.$$

解. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4$ が 1 次独立で, $\boldsymbol{a}_3=-2\boldsymbol{a}_1+3\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_5=\boldsymbol{a}_1-5\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_6=4\boldsymbol{a}_1-3\boldsymbol{a}_2+2\boldsymbol{a}_4$.

5.4.12 $\mathbb{R}[x]_3$ の元

$$f_1(x)=-2+3x-x^2+5x^3,\quad f_2(x)=-3+2x-3x^2,\quad f_3(x)=6+x+9x^2+15x^3,$$
$$f_4(x)=-5+x-x^2+3x^3,\quad f_5(x)=-4+x-10x^2-19x^3$$

を考へる. これらの vectors の組の中で 1 次独立な最大個数 r を求めよ. 同時に r 個の 1 次独立な vectors を選び出し, 他の vectors をそれらの 1 次結合で表せ. (Hint : 5.4.9).

5.5 基と次元

V を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とせよ. $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r \in V$ の $\mathbf{K}$ 上の 1 次結合の全体 W は vector 空間になる. W を, これらの vectors で ($\mathbf{K}$ 上) 生成される vector 空間と呼び,

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r \rangle_{\mathbf{K}} \quad \text{または, 簡単に} \quad \langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r \rangle \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{K}\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \mathbf{K}\boldsymbol{u}_r$$

で表す.

問 5.5.1 上記の W が実際に $\mathbf{K}$ 上の vector 空間になることを示せ.

V を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とする. $B \subset V$ を次の様な性質を持つ有限部分集合とする :
B1. B に属する vectors は 1 次独立,
B2. V は B に属する vector(s) で生成される.
この様な B が存在するとき, V は 有限次元 であるといふ.

問 5.5.2 上の様な集合 B は一般には（存在すれば）いくつも存在するが, その要素の個数は相等しいことを示せ. (Hint : 5.3.7 を使ふ.)

定義 5.5.3 上の状況のとき, B を V の 基 (あるいは 基底) と呼ぶ. B の要素の個数が n のとき, V の 次元 は n であると称し,

$$\dim_{\mathbf{K}} V = n \quad \text{（または, 混乱が生じない限り } \mathbf{K} \text{ を省いて } \dim V = n \text{）}$$

と記す. 零 vector のみからなる vector 空間は 0 次元であり, それを 零空間 と称する.

定義 5.5.4 各 j について, 第 j 成分が 1 でその他の成分が 0 である $\mathbf{K}^n = \mathrm{Mat}(n, 1, \mathbf{K})$ (5.2.4 参照) の元を $\boldsymbol{e}_j$ と記す :

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \cdots, \ \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

これらを 基本 vectors と呼ぶ. また $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ は $\mathbf{K}^n$ の基をなすが, これを $\mathbf{K}^n$ の 標準基 と呼ぶ.

一般には vector 空間の基の選び方はいくつもあるが, 次の定理は, 基を構成する vector(s) の個数は一意的に定まることを示す.

定理 5.5.5 V を vector 空間とする. V の基を構成する vector(s) の個数は基の選び方に依存しない.

証明 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ と $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が共に V の基であるとせよ. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合で書ける. $n > m$ であるとすると, 5.3.7 により $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次従属となり, 矛盾である. よつて $n \geq m$. ここで $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ と $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ の立場を入れ替へて, 同様の議論をすれば, $n \leqq m$ を得る. よつて $n = m$ でなくてはならない. 即ち, 基を構成する vector(s) の個数は, 基の選び方に依らない. □

定理 5.5.6 V を vector 空間とする. V が有限次元であるためには, V の 1 次独立最大数が有限であることが必要十分である. このとき, 次が成り立つ :

$$\dim(V) = \text{“}V \text{ の 1 次独立最大数”}.$$

証明 $\dim(V) = n$ とする. V には n 個の vectors からなる基が存在する. $n+1$ 個以上の vectors のどんな組も, この基に属する vectors の 1 次結合で書けるから, 5.3.7 により, その組は 1 次従属である. 従つて V の 1 次独立最大数は n である.
(別証) 右辺を n とし, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ を 1 次独立な vectors の組とせよ. 任意の $\boldsymbol{u} \in V$ について, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 次従属であるから, 5.3.6 により, $\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ の 1 次結合で表される. これは $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が基であることを意味し, $\dim(V) = n$ である. □

例題 5.5.7 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 6 & -5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 9 & -1 & -10 \\ 5 & 0 & 15 & 3 & -19 \end{bmatrix}$$

で定める. 解空間 $W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \,\middle|\, A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$ の次元と 1 組の基を求めよ.

解 A は 5.4.4 の行列であり, その簡約化

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

から,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -3c_1 + 2c_2 \\ 4c_1 - 5c_2 \\ c_1 \\ 3c_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1,\ c_2 \in \mathbb{R})$$

を得る. ここで

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とおくと, これらは 3 行目と 5 行目（A の簡約化で, 主成分を持たない列に対応する成分）を見ることで 1 次独立とわかる. $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ は W を生成するから, これらは W の基である. よって $\dim W = 2$.

解空間の次元

5.5.7 から次のことが容易にわかる.

定理 5.5.8 $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ とする. 同次形の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の <u>解空間</u>

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbf{K}^n \,\middle|\, A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \right\}$$

の次元は次式で与へられる :

$$\dim(W) = n - \mathrm{rank}(A).$$

問 5.5.9 5.5.8 を証明せよ.

問 5.5.10 $\dim \langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m \rangle$ は $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m\}$ の最大 1 次独立数に等しいことを示せ.

問 5.5.11 $\dim V = n$ とする. V の n 個の vectors $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ について, 次の 3 条件は同値であることを示せ.
(1) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基である.
(2) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立である.
(3) $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ は V を生成する.

例 5.5.12 $\mathrm{Mat}(n, 1, \mathbf{K}) = \mathbf{K}^n$ は $\mathbf{K}$ 上の n 次元 vector 空間.

例 5.5.13 $V = \mathbb{R}\cos x + \mathbb{R}\sin x$. は $\mathbb{R}$ 上の 2 次元 vector 空間である. $W = \mathbb{R}\cos x$ は V の 1 次元の部分空間である.

例 5.5.14 体 $\mathbf{K}$ 上の n 次以下の x の多項式全体を $\mathbf{K}[x]_n$ と記す. これは普通の和と scalar 倍に関して $\mathbf{K}$ 上の $n+1$ 次元の vector 空間である. 例へば $W = \{ f(x) \in \mathbf{K}[x]_n \,|\, f(1) = 0 \}$ は $\mathbf{K}[x]_n$ の n 次元の部分空間である. 基底は 5.4.10 の様にして求められる.

例 5.5.15 体 $\mathbb{Q}(i) = \{ a + bi \,|\, a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q} \}$ は $\mathbb{Q}$ 上の vector 空間である.

例 5.5.16 体 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{ a + b\sqrt{2} \,|\, a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q} \}$ は $\mathbb{Q}$ 上 2 次元の vector 空間である. $\{ 1,\ \sqrt{2} \}$ は 1 つの基である.

例 5.5.17 5 元体 $\mathbb{F}_5$ 上の多項式 $x^3 + 2x + 1$ は既約である. これの根 α の $\mathbb{F}_5$ 上の有理式の全体 $\mathbb{F}_5(\alpha)$ は $\mathbb{F}_5$ 上の vector 空間である.

演 習 問 題

5.5.18 行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 11 & 2 & -12 & -9 \\ 4 & 0 & -8 & -3 & -2 & 10 \\ 2 & -5 & -19 & 1 & 29 & 25 \\ -3 & 2 & 12 & 6 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

で定める. 解空間 $W = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \,\}$ の次元と 1 組の基を求めよ. さらに集合 $\{\, A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^6 \,\}$ が $\mathbb{R}^4$ の部分空間であることを示し, その次元と 1 組の基を求めよ.

5.5.19 （基の延長） W を有限次元 vector 空間 V の部分空間とし, W の基 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_m$ が与へられてゐるとせよ. このとき, 適当に V の vectors $\boldsymbol{u}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ を選んで $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ が V の基となる様にできることを示せ.

5.6 反転置簡約行列

この小節は, 理論的には不要である. しかし, 問や演習問題の解答を一意化して, この講義録の利用者が, 解答の確認を容易にするために設けた.

行列 M の転置行列 ${}^tM$ の列を逆の順番に並べ替へたものを <u>反転置行列</u> と呼ぶことにし, ${}^rM$ と記すことにする. 例へば

$${}^r\begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

また, ${}^rB$ が簡約行列である行列 B を <u>反転置簡約行列</u> と呼ぶことにする. いま, 体 $\mathbf{K}$ 上の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を 3.2.11 の解答に述べた方法に忠実に従つて解いたとすると, 解は

$$\left\{\, c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r + \boldsymbol{a} \,\middle|\, c_1, \cdots, c_r \in \mathbf{K} \,\right\}$$

の様な形で得られる. ここに $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{a}$ は成分を $\mathbf{K}$ に有するある定まつた数 vectors である. このとき, 行列 $[\, \boldsymbol{u}_1 \, \cdots \, \boldsymbol{u}_r \,]$ は反転置簡約行列である.

さて, この講義 note を使ふ際に次のことを約束したい. 即ち,

> **約束 5.6.1** 一般にある vector 空間の基や連立方程式の解などの様にいくつかの数 vectors の組について叙述する場合（問や演習問題の解答など）は, 原則として<u>それらの vectors を順に並べた行列が反転置簡約行列になるものを選ぶこと</u>としたい. ただし, 答の数 vector(s) が有理数である場合は, それの分母を払つた最簡な整数を成分とするものを提示する.

例 5.6.2 この約束に従へば, 例へば

$$\left\{\, a\begin{bmatrix} 18 \\ -31 \\ -15 \\ 5 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 10 \\ -13 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \,\middle|\, a,\ b \in \mathbb{R} \,\right\} \text{ は } \left\{\, a\begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, a,\ b \in \mathbb{R} \,\right\}$$

と記される.

第6章　線形写像と線形変換

6.1　線形写像

Vector 空間から vector 空間への写像で, それぞれの vector 空間としての演算を保つ写像について学ぶ.

定義 6.1.1 (1) U, V を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とする. 写像 $T: U \to V$ が, 次の条件 **L1** と **L2** を共に満たすとき, T は $\mathbf{K}$ 上の線形写像 であるといはれる.
L1　任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ に対して $T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$,
L2　任意の $\boldsymbol{u}, c \in \mathbf{K}$ に対して $T(c\boldsymbol{u}) = c\,T(\boldsymbol{u})$.
(2) U のすべての元を V の零 vector $\mathbf{0}_V$ に写す写像は 零写像 と呼ばれ, $\mathbf{K}$ 上の線形写像である. これは O と記される.

例題 6.1.2 線形写像は零 vector を零 vector に写すことを示せ.

証明 6.1.1 の記号で, $T(\mathbf{0}_U) = T(0\mathbf{0}_U) = 0T(\mathbf{0}_U) = \mathbf{0}_V$ となるから. □

問 6.1.3 $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{R})$ のとき, $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像 T_A を

$$T_A(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$$

により定義すれば, T_A は $\mathbb{R}$ 上の線型写像である [1]. これらを確かめよ.

例 6.1.4 線形写像の例を挙げる :

(1) Gauss 数体 $\mathbb{Q}(i)$ を $\mathbb{Q}$ 上の vector 空間とみて, i 倍写像 $\mathbb{Q}(i) \to \mathbb{Q}(i)$, $a + bi \mapsto -b + ai$ は $\mathbb{Q}$ 上の線形写像.

(2) 数体 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ を $\mathbb{Q}$ 上の vector 空間とみて, それからそれ自身への $1 + \sqrt{2}$ 倍は $\mathbb{Q}$ 上の線形写像である.

(3) 実数体 $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ 上の vector 空間とみたとき, それからそれ自身への $\pi = 3.141592\cdots$ 倍は $\mathbb{Q}$ 上の線形写像である.

(4) 複素数体 $\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}$ 上の vector 空間とみたとき, 複素共役を取る写像はこれからそれ自身への $\mathbb{R}$ 上の線形写像である.

(5) 多項式環 $\mathbb{R}[x]$ からそれ自身へ, $f(x)$ にその導函数 $f'(x)$ を対応させる写像は $\mathbb{R}$ 上の線形写像.

(6) $A \in \mathrm{Mat}(n, k, \mathbb{R})$ とせよ. $\mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{R})$ から $\mathrm{Mat}(m, k, \mathbb{R})$ への写像 $M \mapsto MA$ は $\mathbb{R}$ 上の線形写像である.

[1] 特に $a \in \mathbb{R}$ を取り固定するとき, 写像 $\mathbb{R} \ni x \longmapsto ax \in \mathbb{R}$ は線形写像である.

定義 6.1.5 T を vector 空間 U から同 V への線形写像とする．このとき
$$\mathrm{Im}(T) = \{T(\boldsymbol{u}) \,|\, \boldsymbol{u} \in U\}, \quad \mathrm{Ker}(T) = \{\boldsymbol{u} \in U \,|\, T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}_V\}$$
とおき, $\mathrm{Im}(T)$ を T の 像, $\mathrm{Ker}(T)$ を T の 核 と呼ぶ.

問 6.1.6 T を vector 空間 U から同 V への線形写像とする．次の 2 つを証明せよ．
(1) T の像 $\mathrm{Im}(T)$ は V の部分空間である．
(2) T の核 $\mathrm{Ker}(T)$ は U の部分空間である．

定義 6.1.7 T を vector 空間 U から同 V への線形写像とする．このとき
$$\mathrm{rank}(T) = \dim(\mathrm{Im}(T)), \quad \mathrm{null}(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T))$$
と書いて, それぞれ T の 階数, 退化次数 といふ.

例 6.1.8 先の 6.1.3 の写像においては $\mathrm{null}(T_A)$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間の次元であり, $\mathrm{rank}(T_A)$ は $\{A\boldsymbol{x} \,|\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}$ の次元である．A の簡約化を B とすれば, これらはそれぞれ, 主成分の存在する B の列の個数（つまり $\mathrm{rank}(A)$）, および, 主成分の存在しない B の列の個数であるから, その和は B の列の個数 n に他ならない（例へば 5.5.18 を思ひ出せ）．ゆゑに,
$$\mathrm{null}(T_A) + \mathrm{rank}(T_A) = n.$$
この式は次の様により一般的な形で成り立ち 次元定理 と呼ばれる.

定理 6.1.9 (次元定理) T を vector 空間 U から同 V への線形写像とする．このとき
$$\mathrm{null}(T) + \mathrm{rank}(T) = \dim(U)$$
が成り立つ.

証明 $\mathrm{null}(T) = r, \mathrm{rank}(T) = s$ とおく．$\mathrm{Ker}(T)$ の基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\}$ と $\mathrm{Im}(T)$ の基 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_s\}$ をとる．さらに $\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{r+s} \in U$ を
$$T(\boldsymbol{u}_{r+1}) = \boldsymbol{v}_1, \ \cdots, \ T(\boldsymbol{u}_{r+s}) = \boldsymbol{v}_s$$
となる様に選ぶ．これら $r+s$ 個の vectors

(6.1.10) $$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{r+s}$$

が U の基となることが示されればよい.
生成性. 任意の $\boldsymbol{u} \in U$ について $T(\boldsymbol{u}) \in \mathrm{Im}(T)$ であるから,
$$T(\boldsymbol{u}) = b_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + b_r\boldsymbol{v}_s$$
と表せる．このとき
$$T\Big(\boldsymbol{u} - \sum_{j=1}^{s} b_j\boldsymbol{u}_{r+j}\Big) = T(\boldsymbol{u}) - \sum_{j=1}^{s} b_j T(\boldsymbol{u}_{r+j}) = T(\boldsymbol{u}) - \sum_{j=1}^{s} b_j\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}.$$
ゆゑに
$$\boldsymbol{u} - \sum_{j=1}^{s} b_j\boldsymbol{u}_{r+j} \in \mathrm{Ker}(T).$$

よつて

$$\boldsymbol{u} - \sum_{j=1}^{s} b_j \boldsymbol{u}_{r+j} = \sum_{j=1}^{r} a_j \boldsymbol{u}_j$$

と表せる. 結局

$$\boldsymbol{u} = \sum_{j=1}^{r} a_j \boldsymbol{u}_j + \sum_{j=1}^{s} b_j \boldsymbol{u}_{r+j}$$

となり U は (6.1.10) の vectors で生成される.

<u>1 次独立性</u>. いま (6.1.10) の vectors に 1 次関係

$$\sum_{j=1}^{r} a_j \boldsymbol{u}_j + \sum_{j=1}^{s} b_j \boldsymbol{u}_{r+j} = \boldsymbol{0} \tag{6.1.11}$$

があつたとせよ. これを T で写せば

$$\sum_{j=1}^{r} a_j\, T(\boldsymbol{u}_j) + \sum_{j=1}^{s} b_j\, T(\boldsymbol{u}_{r+j}) = \boldsymbol{0},$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{0} + \sum_{j=1}^{s} b_j\, \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0}.$$

ゆゑに $b_1 = \cdots = b_s = 0$ でなければならない. これより (6.1.11) は

$$\sum_{j=1}^{r} a_j \boldsymbol{u}_j = \boldsymbol{0} \tag{6.1.12}$$

となる. 従つて $a_1 = \cdots = a_r = 0$ が示され, (6.1.10) の vectors が 次独立である.
以上により (6.1.10) の vectors は U の基である. □

注意 6.1.13 5.4.4 の vectors を並べた行列を $A = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4\ \boldsymbol{a}_5]$ とおく. また A の簡約化を B とする. このとき T_A について $\mathrm{null}(T_A)$ は 解空間 $\{\boldsymbol{x} \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の次元である. それは B の主成分のない列の個数 (つまり 2) に他ならない. 一方 $\mathrm{rank}(T_A)$ は空間 $\{ A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \}$ の次元であるが, 5.4.4 等で見た様に, それは B の主成分 (のある列の) 個数 (つまり 3) に他ならない. また, それらの和が A の列の個数, つまり T_A の定義域としての空間 $U = \mathbb{R}^5$ の次元 (つまり 5) である. かうしてみると 6.1.9 (この場合は $2+3=5$) は自明な事柄であるともいへる.

問 6.1.14 線形写像 $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$T(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

について, 次を求めよ.

(1) $\mathrm{Ker}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{null}(T)$,

(2) $\mathrm{Im}(T)$ の 1 組の基と $\mathrm{rank}(T)$.

定義 6.1.15 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 U から V への 2 つの線形写像 T_1, T_2 と定数 c に対し 和 T_1+T_2 と scalar 倍 cT_1 を各 $\boldsymbol{u}\in U$ について

$$(T_1+T_2)(\boldsymbol{u})=T_1(\boldsymbol{u})+T_2(\boldsymbol{u}),\quad (cT_1)(\boldsymbol{u})=c\big(T_1(\boldsymbol{u})\big)$$

なるものとして定義する. 従つて, もちろん $(T_1-T_2)(\boldsymbol{u})=T_1(\boldsymbol{u})-T_2(\boldsymbol{u})$ である.

定義 6.1.16 $T: V_1\to V_2$ と $S: V_2\to V_3$ がともに線形写像のとき, これらの合成写像 $S\circ T$ も線形写像である (確かめよ). これを ST と記す.

6.2 Vector 空間の同型

Vector 空間の同型の概念は, この note では必要でないが, 基本的な事なので述べておく.

定義 6.2.1 Vector 空間 U からそれ自身への恒等写像を $I=I_U$ で表す[2]. U, V を $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とする. U から V への $\mathbf{K}$ 上の線形写像 T に対し, V から U への $\mathbf{K}$ 上の線形写像 S が存在して, $TS=I_U$, $ST=I_V$ を満たすとき[3], T は U から V への $\mathbf{K}$ 上の同型写像 であるといはれ, S は T の 逆写像 と呼ばれ T^{-1} と書かれる. Vectror 空間 V から V 自身への同型写像を 同型変換 と呼ぶ.

命題 6.2.2 線形写像 $T: U\longrightarrow V$ について, 次の 3 つは同値である.
(1) T は単射.
(2) $\mathrm{Ker}\,(T)=\{\mathbf{0}_U\}$.
(3) $\dim(U)=\mathrm{rank}(T)$.

証明 (1) $\Rightarrow$ (2) は明らか.
(2) $\Rightarrow$ (1). $T(\boldsymbol{u}_1)=T(\boldsymbol{u}_2)$ ならば, T の線形性により $T(\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2)=\mathbf{0}_V$. 仮定により $\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2=\mathbf{0}$. つまり $\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{u}_2$.
(3) $\Leftrightarrow$ (2) は 6.1.9 よりわかる. □

[3] 単位行列と同記号であるが, 混乱は生じない.
[3] TS や ST は合成写像を意味する. 6.1.16 を参照.

6.3　線形写像の表現行列

ここでは, 一般の線形写像にも行列の理論を適用するために, 線形写像と行列を結びつける. この note では

$$\mathrm{GL}(n, \mathbf{K}) = \{\, A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K}) \mid \det(A) \neq 0 \,\}$$

と書く [4].

定義 6.3.1　U と V を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とし, T を vector 空間 U から同 V への線形写像とする. U の基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ と V の基 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ を決めておく. このとき $T(\boldsymbol{u}_1)$, $\cdots$, $T(\boldsymbol{u}_n)$ はいづれも $\mathrm{Im}(T)$ の元であるから, $\boldsymbol{u}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{u}_n$ で書ける. 即ち行列 $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{K})$ が存在して

$$(T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)) = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m)\, A$$

と書ける. このとき A を U の基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ と V の基 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ に関する T の表現行列 と呼ぶ.

例 6.3.2　$T = T_A : \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x}$　については, 標準基を取れば, 表現行列は A そのものに他ならないことがわかる.

例題 6.3.3　$T : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_2$ を

$$T\bigl(f(t)\bigr) = \tfrac{d}{dx}f(x) + f(2x-1) - f(2x+1)$$

で定める. このとき次の問に答へよ.

(1)　T の像は $\mathbb{R}[x]_2$ に含まれることを示し, T が線形写像であることを示せ.

(2)　$\mathbb{R}[t]_3$ の基を $\{1,\, x,\, x^2,\, x^3\}$ とし, $\mathbb{R}[t]_2$ の基を $\{1,\, x,\, x^2\}$ として, T の表現行列を求めよ.

解　(1) は容易なので省略する. 簡単な計算で

$$\bigl(T(1),\, T(x),\, T(x^2),\, T(x^3)\bigr) = (0,\, -1,\, -6x,\, -21x^2-2) = (1,\, x,\, x^2)\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -21 \end{bmatrix}$$

となるから, 表現行列は $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -21 \end{bmatrix}$ である.

定義 6.3.4　(基の変換行列) U を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とする. U の 2 組の基

$$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}, \quad \{\boldsymbol{u'}_1, \cdots, \boldsymbol{u'}_n\}$$

を決めておく. これらの間の関係は, ある正方行列 $P \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ により

$$(\boldsymbol{u'}_1, \cdots, \boldsymbol{u'}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\, P$$

と書ける. このとき P を基の 変換行列 と呼ぶ. 5.4.9 から $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ である.

---

[4] これは行列の積に関して群（「代数学 1」で学ぶ）であり, $\mathbf{K}$ 上の n 次 一般線形群 と呼ばれる.

命題 6.3.5 U と V を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間とし,

U の 2 組の基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$, $\{\boldsymbol{u}'_1, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\}$,

V の 2 組の基 $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$, $\{\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_m\}$

を決めておく. これらの基の変換行列を P および Q とせよ. 即ち

$$(\boldsymbol{u}'_1, \cdots, \boldsymbol{u}'_n) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\,P, \quad (\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_m) = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m)\,Q.$$

さらに T を vector 空間 U から同 V への線形写像として,

T の $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$, $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m\}$ に関する表現行列を A,

T の $\{\boldsymbol{u}'_1, \cdots, \boldsymbol{u}'_n\}$, $\{\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_m\}$ に関する表現行列を B

とせよ. このとき

$$B = Q^{-1}AP.$$

証明 B を定義する式 $\big(T(\boldsymbol{u}'_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}'_n)\big) = (\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_m)\,B$ に Q の式を代入すれば

$$(T(\boldsymbol{u}'_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}'_n)) = (\boldsymbol{v}'_1, \cdots, \boldsymbol{v}'_m)\,B = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m)\,QB.$$

また $P = [p_{ij}]$ と書けば

$$(\boldsymbol{u}'_1, \cdots, \boldsymbol{u}'_n) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)P = \Big(\sum_{i=1}^{n} p_{i1}\boldsymbol{u}_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} p_{in}\boldsymbol{u}_i\Big)$$

であるから T の線形性によつて

$$\begin{aligned}(T(\boldsymbol{u}'_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}'_n)) &= \Big(T\Big(\sum_{i=1}^{n} p_{i1}\boldsymbol{u}_i\Big), \cdots, T\Big(\sum_{i=1}^{n} p_{in}\boldsymbol{u}_i\Big)\Big)\\ &= \Big(\sum_{i=1}^{n} p_{i1}\,T(\boldsymbol{u}_i), \cdots, \sum_{i=1}^{n} p_{in}\,T(\boldsymbol{u}_i)\Big) = (T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n))P\end{aligned}$$

となる. これに A の定義の式 $(T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)) = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m)\,A$ を代入すれば

$$(T(\boldsymbol{u}'_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}'_n)) = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m)\,AP.$$

ここで $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m$ の 1 次独立性と 5.3.9 により

$$QB = AP$$

を得るが, Q は正則であるから所望の式を得る. □

6.4 線形変換とその表現行列

Vector 空間 V から V 自身への線形写像を <u>線形変換</u> と呼ぶ．このときは, 定義域としての V の基と値域としての V の基は同じものを取るのが自然であるから, V の基 $\{\, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \,\}$ を定めたときこの基に関する V の線形変換 T の表現行列 A を

$$(T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\, A$$

によつて定義する．6.3.5 より次を得る．

命題 6.4.1 T を V の線形変換とし, $\{\, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \,\}$, $\{\, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \,\}$ を V の 2 組の基とする．これらの基の間の関係を

$$(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\, P$$

とする．もちろん $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ である．さらに T の $\{\, \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \,\}$ に関する表現行列を A, $\{\, \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n \,\}$ に関する表現行列を B とする．このとき

$$B = P^{-1}AP.$$

問 6.4.2 $\mathbb{Q}$ 上の vector 空間 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,)$ の基 $\{1, \sqrt{2}\}$ に関する線形変換 $\mathbb{Q}(\sqrt{2}\,) \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2}\,)$, $x \mapsto (1+\sqrt{2})x$ (これは 6.1.4 (2) に挙げた写像) の表現行列を求めよ．

6.5 固有値, 固有 vectors, 固有空間, 固有多項式

一般の線形変換に関して, 固有値と固有 vectors 等の定義を思ひださう．

定義 6.5.1 T は体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 V の線形変換とする．

$$T(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u} \quad (\ \boldsymbol{u} \in V,\ \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0},\ \ \lambda \in \mathbf{K}\ )$$

を満たす λ を T の <u>固有値</u>, $\boldsymbol{u}$ を固有値 λ に属する T の <u>固有 vector</u> といふ．Vector 空間 V の線形変換 T の固有値 λ に対し

$$W(\lambda, T) = \{\, \boldsymbol{u} \in V \mid T(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u} \,\}$$

とおき, T の固有値 λ の <u>固有空間</u> といふ．$W(\lambda, T)$ 内の $\mathbf{0}$ でない vector が λ に属する T の固有 vectors に他ならない．

問 6.5.2 $W(\lambda, T)$ は V の部分空間であることを示せ． (Hint : 5.2.10 を使ふ．)

ここで, 行列の固有値, 固有多項式を思ひ出す.

定義 6.5.3 正方行列 A に対して, 多項式

$$\varphi_A(t) = |tI - A|$$

を A の <u>固有多項式</u> とよぶ. $\varphi_A(t) = 0$ の根を行列 A の <u>固有値</u> といふ.

定理 6.5.4 λ が T_A の固有値 $\Longleftrightarrow \varphi_A(t) = 0$ (つまり λ は A の固有値).

証明 $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ と $\lambda \in \mathbf{K}$ が $T_A(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}$ を満たすことと, $(\lambda I - A)\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ が非自明な解を持つことは同じだから. □

定義 6.5.5 $V = \mathbf{K}^n$ で基を標準基にとるとき, T_A: $\boldsymbol{u} \longmapsto A\boldsymbol{u}$ の固有値を A の <u>固有値</u> と呼ぶ. また T_A の固有 vector を A の <u>固有 vector</u> ともいふ. A の固有値 λ について $W(\lambda, T_A)$ を $W(\lambda, A)$ とも書いて, A の <u>固有空間</u> と称する. よつて

$$W(\lambda, T_A) = W(\lambda, A) = \{\, \boldsymbol{u} \in \mathbf{K}^n \,|\, (\lambda I - A)\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \,\}.$$

例 6.5.6 $A = \begin{bmatrix} 11 & -16 \\ 8 & -13 \end{bmatrix}$ に対して

$$\varphi_A(t) = |\, tI - A \,| = \begin{vmatrix} t-11 & 16 \\ -8 & t+13 \end{vmatrix}$$

$$= (t-11)(t+13) + 16 \cdot 8 = t^2 + 2t - 15 = (t-3)(t+5)$$

であるから, 固有値は 3 と -5 である. さらに, 簡単な計算で, それぞれに対応する固有空間

$$W(3, T_A) = \left\{ c \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle|\, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad W(-5, T_A) = \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle|\, c \in \mathbb{R} \right\}$$

が得られる.

問 6.5.7 行列

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ -16 & -5 & -4 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

に対する線形写像 $T_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ について, 固有方程式, すべての固有値, および, それらに対応する固有空間を求めよ.

(答 : 固有方程式は $t^3 - 3t^2 - t + 3$ になり, 固有値は $1, -1, 3$ で,

$$W(1, T_A) = \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \middle|\, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad W(-1, T_A) = \left\{ c \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \middle|\, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad W(3, T_A) = \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \middle|\, c \in \mathbb{R} \right\}$$

である.)

次に Cayley-Hamilton の定理[5] といふ名で知られる印象的な定理を述べる．一般に多項式 $f(t) = \sum_j a_j t^t \in \mathbf{K}[t]$ と正方行列 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ について，$f(A) = \sum_j a_j A^t$ と約束する．ここで，もちろん $A^0 = I$ である．

定理 6.5.8 (Cayley-Hamilton の定理) 正方行列 A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ について

$$\varphi_A(A) = O.$$

証明 $B(t) = tI - A$ とおき，これの余因子行列を $\widetilde{B}(t)$ とおくと，4.5.6 により

$$B(t)\widetilde{B}(t) = \varphi_A(t)I \tag{6.5.9}$$

である．A の次数を n とする．$\widetilde{B}(t)$ の各成分は t の高々 $n-1$ の多項式である．よつて t の冪に関して整理すると

$$\widetilde{B}(t) = t^{n-1}B_{n-1} + t^{n-2}B_{n-2} + \cdots + tB_1 + B_0$$

と書ける．ここで B_k はどれも n 次正方行列である．(6.5.9) より

$$(tI - A)(t^{n-1}B_{n-1} + t^{n-2}B_{n-2} + \cdots + tB_1 + B_0) = \varphi_A(t)I \tag{6.5.10}$$

ここで形式的には t に A を代入して $\varphi_A(A)$ が示せさうであるが，この代入の操作は正当なものではない．そこで，以下の様にする．まづ，

$$\varphi_A(t) = t^n + c_1t^{n-1} + c_2t^{n-2} + \cdots + c_{n-1}t + c_n$$

とおく．次に (6.5.10) の左辺を展開すると

$$t^nB_{n-1} + t^{n-1}(-AB_{n-1}+B_{n-2}) + t^{n-2}(-AB_{n-2}+B_{n-3}) + \cdots + t(-AB_1+B_0) + (-AB_0).$$

よつて (6.5.10) において両辺の t の係数を比較して

$$B_{n-1} = I,\quad -AB_{n-1} + B_{n-2} = c_1I,\quad -AB_{n-2} + B_{n-3} = c_2I,\quad \cdots,$$
$$-AB_1 + B_0 = c_{n-1}I,\quad -AB_0 = c_nI$$

である．以上から

$$\begin{aligned}
\varphi_A(A) &= A^n + c_1A^{n-1} + c_2A^{n-2} + \cdots + c_{n-1}A + c_nI \\
&= A^nB_{n-1} + A^{n-1}(-AB_{n-1}+B_{n-2}) + A^{n-2}(-AB_{n-2}+B_{n-3}) + \cdots \\
&\qquad\qquad + A(-AB_1+B_0) + (-AB_0) \\
&= A^nB_{n-1} - A^nB_{n-1} + A^{n-1}B_{n-2} - A^{n-1}B_{n-2} + A^{n-2}B_{n-3} + \cdots \\
&\qquad\qquad - A^2B_1 + AB_0 - AB_0 \\
&= O
\end{aligned}$$

となつて証明された． □

例 6.5.11 6.5.6 の $A = \begin{bmatrix} 11 & -16 \\ 8 & -13 \end{bmatrix}$ に対して $\varphi_A(t) = |\,tI - A\,| = t^2 + 2t - 15$ である．これより 6.5.8 (Cayley-Hamilton の定理) は

$$\varphi_A(A) = A^2 - 2A - 15I = O$$

と確認できる (実際に計算してみよ).

[5] Arthur Cayley (1821-1895) England 生まれ．William Rowan Hamilton (1805-1865) Irland 生まれ．

演 習 問 題

6.5.12 （[M2] から） 次の (1), (2) の $T : \mathbb{R}[x]_2 \longrightarrow \mathbb{R}[x]_2$ それぞれについて
(i) 固有多項式 $\varphi_T(t)$,
(ii) T の固有値,
(iii) T の各固有値 λ に対して $W(\lambda, T)$
を求めよ.
(1) $T(f(x)) = f(x+1)$.
(2) $T(f(x)) = f(2x) + f'(x)$.

6.5.13 Cayley-Hamilton の定理 (と多項式の除法) を用ゐて $A = \begin{bmatrix} 11 & -16 \\ 8 & -13 \end{bmatrix}$ に対し, 次の行列を求めよ.

(1) A^{15}. (2) $A^{20} + 2A - 3I$.

6.5.14 行列 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ について次の問に答へよ.
(1) 固有多項式 $\varphi_A(t)$ を求めよ.
(2) $g(t) = t^7 - 4t^4 - 3t$ について $g(A)$ を求めよ.

6.6 一般の場合の固有値, 固有 vector, 固有空間, 固有方程式

一般の線形変換についても, 固有値, 固有 vectors, 固有空間, 固有多項式を定義する.

定義 6.6.1 T を n 次元 vector 空間 V の線形変換とする. V の 1 組の基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ をとる. この基に関する T の表現行列を A とするとき

$$\varphi_T(t) = \varphi_A(t)$$

と定義して, これを T の 固有多項式 とよぶ.

$\varphi_T(t)$ は基の選び方に依らない. 実際 $B = P^{-1}AP$ のとき

$$\varphi_B(t) = |tI - P^{-1}AP| = |P^{-1}(tI - A)P| = |tI - A| = \varphi_A(t)$$

であるから.

定理 6.6.2 T を vector 空間 V の線形変換とせよ. λ が T の固有値であるためには $\varphi_T(\lambda) = 0$ となることが必要十分である.

証明 (必要性) $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を V の 1 組の基とし, この基に関する T の表現行列を A とする. λ を T の固有値で $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{u} \in W(\lambda, T)$ とせよ.

$$\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = (\,\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\,)\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

とおく. このとき

$$T(\boldsymbol{u}) = T(c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n) = (T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n))\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\,A\boldsymbol{c}.$$

一方, $\boldsymbol{u}$ は T の λ に属する固有 vector だから

$$T(\boldsymbol{u}) = \lambda\,\boldsymbol{u} = \lambda\,(c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\,\lambda\boldsymbol{c}.$$

5.3.9 により $A\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{c}$ となる. $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ だから $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$. よつて $\boldsymbol{c}$ は A の固有値 λ に属する固有 vector である. 6.5.4 より $\varphi_T(\lambda) = \varphi_A(\lambda) = 0$ である.

(十分性) $\varphi_T(\lambda) = 0$ であるから $\varphi_A(\lambda) = 0$. 従つて

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}$$

は自明でない解を持つ. それを $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ とする. 即ち $A\boldsymbol{c} = \lambda\,\boldsymbol{c}$. ここで

$$\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\,\boldsymbol{c}$$

なる $\boldsymbol{u} \in V$ を取れば $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ であつて,

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{u}) &= T(c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{u}_n) = (T(\boldsymbol{u}_1, \cdots, T(\boldsymbol{u}_n))\boldsymbol{c} \\ &= (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\,A\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\,\lambda\,\boldsymbol{c} = \lambda\,(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\,\boldsymbol{c} = \lambda\,\boldsymbol{u} \end{aligned}$$

であるから $\boldsymbol{u}$ は T の λ を固有値にもつ固有 vector である. □

6.7 行列の対角化

線形変換を捉へるための重要な手法は表現行列の対角化である. ここではこれについての基本的なことを説明する.

定義 6.7.1 2 つの n 次正方行列 A, B について, 正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき, A と B は 相似 であるといはれる.

命題 6.7.2 Vector 空間 V 上の線形変換の表現行列は基を取り替へると, それに相似な行列が表現行列となる. また, ある行列 A を表現行列とする線形変換 T と, A に相似な行列 B があるとき, V の基を適当に取り換へれば B が表現行列となる.

証明 前半は 6.4.1 に他ならない. 後半も 6.3.5 の推論を逆に辿ればよい. □

定義 6.7.3 (1) 与へられた正方行列 A に対し, 正則行列 P を見付けて $P^{-1}AP$ が対角行列になる様にすることを A の 対角化 と称する. より精密に, $\mathbf{K}$ を体として, $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ のときに $B, P \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ と取れるとき, A は $\mathbf{K}$ 上対角化されるといふ. あるいは A は $\mathbf{K}$ 上 対角化可能 であるともいはれる.
(2) 線形変換 T の表現行列が対角化可能であるとき T は 対角化可能 であるといはれる.

注意 6.7.4 (1) (対角化する意義) 6.4.1 と 6.7.3 から, 対角化できる場合は, 基をうまく取ると, その基の各 vector の方向に定数倍するといふ線形写像にすぎないといふことである. 例へば $A = \begin{bmatrix} 11 & -16 \\ 8 & -13 \end{bmatrix}$ に対して $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ を取ると

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

を得るが, このことは, T_A を把握する際に, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ を基に取つた場合はわかりづらいが, $\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を基に取れば, T_A は $\boldsymbol{u}_1$ の方向には 3 倍し, $\boldsymbol{u}_2$ の方向には -5 倍する線形写像であると把握できることを意味してゐる.
(2) 対角化できない正方行列 A も存在する. それは, 基礎の体 $\mathbf{K}$ が小さすぎて, 固有値がその体に属さないことが原因である場合と, 体 $\mathbf{K}$ を拡大しても, 行列自身が原因で対角化できない場合とがある. 基礎の体が $\mathbb{C}$ の場合は, 前者は起り得ない. 後者の場合は, 対角行列に近い種々の “ 標準形 ” が考案されてゐる. 中でもよく知られたものが Jordan 標準形である. これについては第 **??** 節で学ぶ.

命題 6.7.5 T を V の線形変換とし, その相異なる固有値の全体を $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ とすると

$$\sum_{i=1}^{r} \dim_{\mathbf{K}} W(\lambda_i, T) \leq \dim_{\mathbf{K}} V.$$

証明 簡単のために $\dim_{\mathbf{K}}$ の $\mathbf{K}$ を省く. $\dim V = n, \dim W(\lambda_i, T) = n_i$ とおく. 各 i $(1 \leq i \leq r)$ に対し $W(\lambda_i, T)$ の 1 組の基 $\{\boldsymbol{u}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{in_i}\}$ を取り

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} \boldsymbol{u}_{ij} = \mathbf{0} \quad (c_{ij} \in \mathbb{R}) \tag{6.7.6}$$

とおく. これは $\boldsymbol{u}_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} \boldsymbol{u}_{ij}$ $(1 \leq i \leq r)$ とおけば

$$\sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{u}_i = \mathbf{0} \tag{6.7.7}$$

といふことである. $T(\boldsymbol{u}_i) = \lambda_i \, \boldsymbol{u}_i$ $(1 \leq i \leq r)$ であるから (6.7.7) を T で写すと

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \boldsymbol{u}_i = \mathbf{0}.$$

これを次々に T で写すことで

$$\sum_{i=1}^{r} {\lambda_i}^k \boldsymbol{u}_i = \mathbf{0} \quad (0 \leq k \leq r-1)$$

を得る. 即ち

$$(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r) P = (\mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}), \quad P = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & {\lambda_1}^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & {\lambda_2}^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \cdots & {\lambda_r}^{r-1} \end{bmatrix}$$

である. 4.5.13 により $\det(P) \neq 0$ だから, P は正則行列で

$$(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r) = (\mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}) P^{-1} = (\mathbf{0}, \cdots, \mathbf{0}).$$

つまり,

$$\boldsymbol{u}_i = \sum_{j=1}^{n_i} c_{ij} \boldsymbol{u}_{ij} = \mathbf{0} \quad (1 \leq i \leq r).$$

$\{\boldsymbol{u}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{in_i}\}$ は 1 次独立だから

$$c_{i1} = c_{i2} = \cdots = c_{in_i} = 0$$

である. よつて $n_1 + \cdots + n_r$ 個の vectors $\{\boldsymbol{u}_{ij} \,|\, 1 \leq i \leq r, \ 1 \leq j \leq n_i\}$ は 1 次独立である. この個数は V の vectors の 1 次独立な最大個数, つまり $n = \dim V$ を越えないから所望の不等式が成り立つ. □

次の定理はこの講義を通じて最も重要なものの 1 つである.

定理 6.7.8 A を n 次正方行列とし, A の相異なる固有値の全体を $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ とする. A が $\mathbf{K}$ 上で対角化されるためには

$$\sum_{i=1}^{r} \dim_{\mathbf{K}} W(\lambda_i, A) = n$$

であることが必要十分条件である.

証明 (必要性) A が対角化されるから, 正則行列 $P = [\,\boldsymbol{p}_1 \cdots \boldsymbol{p}_n\,]$ が存在して

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{bmatrix} \quad (\text{対角行列})$$

となる. このとき $AP = PA$ ゆゑ $A\boldsymbol{p}_j = b_j\boldsymbol{p}_j$ $(1 \leq j \leq n)$ である. つまり b_j は固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ のどれかに一致し, $\boldsymbol{p}_j (\neq \mathbf{0})$ はその固有値に対応する固有 vector である. 5.4.6 により $\boldsymbol{p}_1, \cdots, \boldsymbol{p}_n$ は 1 次独立なので

$$\dim(W(\lambda_i, A)) \geq \text{“}\, b_j = \lambda_i \text{ となる } j \text{ の個数”}.$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{r} \dim(W(\lambda, T_A)) = \sum_{i=1}^{r} \dim(W(\lambda, A)) \geq \sum_{i=1}^{r} \text{“}\, b_j = \lambda_i \text{ となる } j \text{ の個数”} = n$$

となる. これと 6.7.5 と合せれば所望の等式が得られる.

(十分性) 各 $W(\lambda_i, A)$ の基 $\{\boldsymbol{u}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{in_i}\}$ を選んでおく. 6.7.5 の証明から, vectors の集合 $\{\, \boldsymbol{u}_{in_i} \,|\, 1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq n_i \,\}$ は 1 次独立である. 一方

$$\sum_{i=1}^{r} \dim(W(\lambda, A)) = n$$

であるから, 上の集合は全空間 $\mathbb{R}^n$ の基である. これらを並べて

$$P = [\, \boldsymbol{u}_{11} \cdots \boldsymbol{u}_{1n_1}\, \boldsymbol{u}_{21} \cdots, \boldsymbol{u}_{2n_2} \cdots \boldsymbol{u}_{r1} \cdots \boldsymbol{u}_{rn_r}\,]$$

とおくと P は 5.4.6 から実正則行列であり, $A\boldsymbol{u}_{in_i} = \lambda_i \boldsymbol{u}_{in_i}$ を満たすので

$$AP = PB, \qquad B = \begin{bmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ \ddots \ \lambda_1}^{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overbrace{\lambda_r \ \ddots \ \lambda_r}^{n_r} \end{bmatrix} \quad (\text{対角行列}).$$

即ち $B = P^{-1}AP$ と対角化された. □

6.7.8 から容易に線形変換についての次の定理が得られる.

定理 6.7.9 T を $\mathbf{K}$ 上の vector 空間 V の線形変換とし, T の相異なる固有値の全体を λ_1, $\cdots$, λ_r とする. V の基を任意にとる. それに関する T が $\mathbf{K}$ 上対角化されるためには

$$\sum_{i=1}^{r} \dim_{\mathbf{K}}(W(\lambda_i, T)) = \dim_{\mathbf{K}}(V)$$

であることが必要十分条件である.

6.7.8 の証明を見れば 5.2.15 の記号を使つて 6.7.8 や 6.7.9 の主張を次の様に述べることができる.

系 6.7.10 6.7.8 の記号の元で, A が対角化できるためには

$$\sum_{i=1}^{r} W(\lambda_i, A) = \mathbf{K}^n$$

であることが必要十分である. 同様に, 6.7.9 の記号の元で, T が対角化できるためには

$$\sum_{i=1}^{r} W(\lambda_i, T) = V$$

であることが必要十分である.

上の 6.7.8 の証明は, 与へられた正方行列の対角化の計算方法を与へてゐる. そこで, 対角化の例を 1 つ示しておく.

例題 6.7.11 行列

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 2 \\ -16 & -5 & -4 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

に対し, 正則行列 P を見付けて $P^{-1}AP$ を対角行列とせよ.

解 まづ $\varphi_A(t) = (t-1)(t+1)(t-3)$ と計算される. そこで 6.5.4 に基づき

$$(A-I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \quad (A+I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}, \quad (A-3I)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

を, それぞれ解く. いま A は 6.5.7 のそれであつて

$$W(1, T_A) = \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}, \quad W(-1, T_A) = \left\{ c \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}, \quad W(3, T_A) = \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{R} \right\}$$

である. そこで, これらの空間を生成する vectors を並べて

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とすれば

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

を得る.

演 習 問 題

6.7.12 次の行列が対角化されるかを調べ, できる場合は対角化せよ（[M2], p.111 から）.

(1) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -12 & 5 \\ -30 & 13 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ 4 & 8 & 5 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (7) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

6.7.13 $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$ について A^n を求めよ.

6.7.14 n 次正方行列 $A = [\, a_{ij} \,]$ について, その対角成分の和を A の 跡 (trace) と呼び, $\mathrm{tr}(A)$ で表す. 即ち

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

A の固有多項式を $\varphi_A(t) = t^n + c_1 t^{n-1} + \cdots + c_n$ と書くとき

$$\mathrm{tr}(A) = -c_1, \quad \det(A) = (-1)^n c_n$$

であることを示せ.

6.7.15 次の問に答へよ.

(1) $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbf{K})$, $B \in \mathrm{Mat}(n, m, \mathbf{K})$ のとき, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ であることを示せ.

(2) 互ひに相似な 2 つの行列の跡は等しいこと, 即ち, 正方行列 A について

$$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$$

であることを示せ.

6.7.16 相似といふ関係は同値関係であることを示せ.

第7章　内積空間

7.1　内積

以下では, 専ら実数体 $\mathbb{R}$ 上の vector 空間のみ扱ひ, V は常に $\mathbb{R}$ 上の有限次元 vector 空間を表す.

定義 7.1.1　$V \times V$ から $\mathbb{R}$ への写像 (　,　) が次の 4 つの性質をすべて満たすとき, この写像を V における 内積 といふ. 但し $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$, $c \in \mathbb{R}$ は任意の元である.
P1　$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v})$,
P2　$(c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$,
P3　$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$,
P4　$\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0$.
また $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ に対する内積の値 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ を単に $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の 内積 と称する. 内積の定義された vector 空間を単に 内積空間 と称する.

以下では V は常に内積 (　,　) が定義された内積空間を表すものとする.

問 7.1.2　(　,　) を内積とする内積空間 V について,
P5　任意の $\boldsymbol{u} \in V$ について $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{0}) = 0$,
P6　$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}') = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}')$,
P7　$(\boldsymbol{u}, c\,\boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
が成り立つことを示せ.

例 7.1.3　$\mathbb{R}^n$ の vectors

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

について

$$(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

と定めれば, これは 7.1.1 の 4 条件を満たす. これを $\mathbb{R}^n$ の 標準内積 と呼ぶ.

問 7.1.4　$\mathbb{R}[x]_n$ における積分

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

は内積を与へることを確かめよ.

定義 7.1.5 $\boldsymbol{u} \in V$ に対し $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq 0$ であるから

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}$$

なる実数が定まる. これを $\boldsymbol{u}$ の norm, あるいは 長さ といふ.

命題 7.1.6 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$, $c \in \mathbb{R}$ に対して次が成り立つ.

(1) $\|c\,\boldsymbol{u}\| = |c|\,\|\boldsymbol{u}\|$.

(2) $|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leq \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|$ (Cauchy-Schwartz の不等式[1]).

(3) $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ (三角不等式).

証明 (1) $\|c\boldsymbol{u}\|^2 = (c\boldsymbol{u}, c\boldsymbol{u}) = c^2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = c^2\|\boldsymbol{u}\|^2$ であるから, これの平方根をとればよい.
(2) $t \in \mathbb{R}$ の函数 $f(t) = \|t\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2$ を考へる. これは

$$f(t) = \|t\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 t^2 + 2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})t + \|\boldsymbol{v}\|^2$$

と書けるが, 常に $f(t) \geq 0$ であるから, 2 次函数としての判別式 D は

$$D/4 = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})^2 - \|\boldsymbol{u}\|^2\|\boldsymbol{v}\|^2 \leq 0$$

を満たす. これより直ちに主張が導かれる.
(3) (2) を使ふと

$$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + \|\boldsymbol{v}\|^2 \leq \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}\|^2 = (\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2$$

を得る. これより直ちに主張が導かれる. □

定義 7.1.7 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ を満たす vectors $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は 垂直 であるといはれ, $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ と記される.

命題 7.1.8 零 vector と異なる $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r \in V$ が, どの 2 つも垂直であるとする. このとき, これらの vectors は 1 次独立である.

証明 $c_1, \cdots, c_r \in \mathbb{R}$ について $c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{0}$ であるとせよ. このとき各 i について

$$0 = (\boldsymbol{u}_i, c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_r\boldsymbol{u}_r) = c_1(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_1) + \cdots + c_r(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_r) = c_r(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_i)$$

となるが $\boldsymbol{u}_i \neq \boldsymbol{0}$ より $c_i = 0$ でなくてはならない. □

演 習 問 題

7.1.9 $\mathbb{R}^2$ において $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ に対し $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x_1y_1 + 2\,x_2y_2$ と定めれば, これは内積を与へることを示せ.

7.1.10 7.1.4 で確かめた様に $\mathbb{R}[x]_3$ における積分

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

[1] Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) France 生まれ. Karl Hermann Amandus Schwarz (1843-1921) Germany 生まれ.

はこの空間の内積である. 任意の $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$, $g(x) = b_1 + b_2x + b_3x^2$ に対して,

$$(f,g) = [\, a_1 \ a_2 \ a_3 \,] \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

となることを示せ.

7.1.11 上の 7.1.10 の内積に関する内積空間 $\mathbb{R}[x]_3$ において

$$f_1(x) = 3 + 15x, \quad f_2(x) = 3 - 30x + 15x^2$$

のどちらとも直交する多項式の全体を決定せよ. (答 : $\{\, c\,(-15 + 2x + 35x^2) \mid c \in \mathbb{R} \,\}$)

7.1.12 内積空間において, 次が成り立つことを示せ.
(1) $2(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{v}\|^2$.
(2) $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2)$.
(3) $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v} \iff \|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$.
(4) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \ \perp \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \iff \|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\|$.

7.1.13 内積空間 V とその部分空間 W に対し

$$W^{\perp} = \{\, \boldsymbol{u} \in V \mid \text{すべての } \boldsymbol{v} \in W \text{ に対して } (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0 \,\}$$

と定め, これを W の <u>直交補空間</u> と称する. $W^{\perp}$ は V の部分空間であることを示せ.

7.1.14 7.1.11 の状況のもとで

$$W = \{\, a\, f_1(x) + b\, f_2(x) \mid a,\ b \in \mathbb{R} \,\}$$

とおくと W は内積空間 $\mathbb{R}[x]_2$ の部分空間である. このとき $W^{\perp}$ を求めよ.

7.1.15 V の部分空間 W, W_1, W_2 について, 次の (1), (2), (3), (4) が成り立つことを示せ.
(1) $W \cap W^{\perp} = \{\boldsymbol{0}\}$, $V = W + W^{\perp}$.
(2) $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = \dim(V)$.
(3) $(W^{\perp})^{\perp} = W$.
(4) $W_1 \subset W_2 \iff {W_1}^{\perp} \supset {W_2}^{\perp}$.

7.1.16 「代数学 1」で触れた Hamilton の <u>4 元数体</u>

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{bmatrix} \middle|\ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{Mat}(2, \mathbb{C}) \quad (\text{もちろん } i \text{ は虚数単位})$$

は行列の和と scalar 倍に関して, $\mathbb{R}$ 上の 4 次元 vector 空間である. いま

$$A = \begin{bmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{bmatrix} \ \text{に対し} \ \overline{A} = \begin{bmatrix} a - bi & c - di \\ -c - di & a + bi \end{bmatrix} \ (\text{すべての成分を複素共役に})$$

とおき, $\mathbb{H}$ の任意の 2 元 A, B に対し $(A, B) = \det(A\overline{B})$ と定める. これが $\mathbb{H}$ の内積を与へることを示せ.

7.2　正規直交基と直交行列

この節でも V は内積 $(\ ,\ )$ を持つ $\mathbb{R}$ 上の有限次元 vector 空間を表すものとする．また $\mathbb{R}^n$ は標準内積を持つ内積空間を表すものとする．

定義 7.2.1　$\dim(V) = n$ とする．$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は V の基で

(7.2.2)
$$(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij} \quad (1 \le i, j \le n)$$

を満たすとする．この様な基を 正規直交基 と称する．実際, 7.1.8, 5.5.11, および仮定 $\dim(V) = n$ により, (7.2.2) が成り立てば, $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ は基となることに注意せよ．

命題 7.2.3　(Gram-Schmidt の直交化[2]) $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ を V の基とする．このとき V の正規直交基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ で

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r \rangle_{\mathbb{R}} \quad (1 \le r \le n)$$

となるものが存在する．(記号については 5.5.1 を見よ．)

証明　まず $\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{||\boldsymbol{v}_1||}\boldsymbol{v}_1$ として $r = 1$ の場合が成り立つ．次に

$$\boldsymbol{v}'_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1, \quad \boldsymbol{u}_2 = \tfrac{1}{||\boldsymbol{v}'_2||}\,\boldsymbol{v}'_2$$

とおくと $(\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1) = 0$, $||\boldsymbol{u}_2|| = 1$ となることがわかるから $r = 2$ のときも成り立つ．一般に $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ が所望の条件を満たすとき,

$$\boldsymbol{v}'_{r+1} = \boldsymbol{v}_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{u}_i)\,\boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{u}_{r+1} = \tfrac{1}{||\boldsymbol{v}'_{r+1}||}\,\boldsymbol{v}'_{r+1}$$

とおけば $(\boldsymbol{u}_{r+1}, \boldsymbol{u}_i) = 0$ $(i \le i \le r)$ であり, $\boldsymbol{u}_{r+1}$ の作り方から

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_{r+1} \rangle_{\mathbb{R}} = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1} \rangle_{\mathbb{R}}$$

となる．　□

定義 7.2.4　内積空間 V 上の線形変換 T が, 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して, 等式

$$(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

を満たすならば, T は 直交変換 と呼ばれる．

注意 7.2.5　$\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を内積空間 V の正規直交基とする．$\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n$, $\boldsymbol{v} = b_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{u}_n$ と書くとき,

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j\,(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n.$$

[2] Jørgen Pedersen Gram (1850-1916) Denmark 生まれ. Erhard Schmidt (1876-1959) Estonia 生まれ.

命題 7.2.6 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を内積空間 V の正規直交基とする. V の線形変換 T が直交変換であるためには, $\{T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)\}$ が内積空間 V の正規直交基であることが必要十分である.

証明 (必要性) T は直交変換だから

$$(T(\boldsymbol{u}_i), T(\boldsymbol{u}_j)) = \delta_{ij} \quad (1 \leq i,\ j \leq n)$$

である. $\dim V = n$ であるから, $\{T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)\}$ は正規直交基である.
(十分性) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ とし, $\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n$, $\boldsymbol{v} = b_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + b_n\boldsymbol{u}_n$ とすれば, 7.2.5 によつて

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n.$$

しかるに $T(\boldsymbol{u}) = a_1T(\boldsymbol{u}_1) + \cdots + a_nT(\boldsymbol{u}_n)$, $T(\boldsymbol{v}) = b_1T(\boldsymbol{u}_1) + \cdots + b_nT(\boldsymbol{u}_n)$ でもあるから, 仮定により

$$(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})) = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

を得, T が直交変換であることがわかる. □

注意 7.2.7 高校までで学ぶ 3 次元以下 Euclid 空間において, 原点を中心とする回転移動や, 原点を通る 1 本の直線あるいは 1 枚の平面に関する対称移動, さらにそれらの合成変換は任意の 2 点間の距離を変へない. 直交変換はそれを内積空間 (Euclid 空間の自然な一般化) へ拡張したものに他ならない. 余談であるが, 距離が定められてゐないのに, あらゆる滑らかな曲線と曲線の交点に角度のみが定義されてゐる様な空間も存在する. その様な空間から, それ自身への角度を変へない変換が考へられる (等角写像と呼ぶ). その例は複素函数論で学ぶであらう.

定義 7.2.8 実正方行列 A が ${}^tAA = I$ を満たすとき A は <u>直交行列</u> であるといはれる.

問 7.2.9 次の行列は直交行列であることを確かめよ.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \cos\theta\sin\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta \\ \sin\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

問 7.2.10 直交行列の行列式は 1 または -1 であることを示せ.

命題 7.2.11 $A = [\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n] \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ について, 次の 3 つは同値.
(1) A は直交行列.
(2) $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基.
(3) T_A は直交変換.

証明 (1) ⇔ (2). $A^tA = [(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)]$ であることからわかる.
(2) ⇔ (3). 7.2.6 を $V = \mathbb{R}^n$, $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\} = \{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$, $T = T_A$ として適用せよ. □

演 習 問 題

7.2.12 $\mathbb{R}^4$ における 3 つの vectors

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

の生成する部分空間を W とする. この vectors を, この順序に関して Gram-Schmidt の直交化により, 直交化し, W の直交基を求めよ.

7.2.13 $\mathbb{R}[x]_2$ を 7.1.4 の内積に関する内積空間とする. このとき, 次の基を Gram-Schmidt の方法で正規直交化せよ.

(1) $\{1,\ x,\ x^2\}$ (2) $\{1+x,\ x+x^2,\ 1\}$

7.2.14 P が直交行列であれば P^{-1} も直交行列であることを示せ.

7.2.15 2 つの直交行列の積もまた直交行列であることを示せ.

7.2.16 T を V の線形変換とする. T が直交変換であるためには $\|T(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|$ が全ての $\boldsymbol{u} \in V$ について成り立つことが必要十分であることを示せ.

7.2.17 $M \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ を n 次正則行列とし, その固有値を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とする. このとき, M^{-1} の固有値は ${\alpha_1}^{-1}, \cdots, {\alpha_n}^{-1}$ であることを示せ.

7.2.18 交代行列 $H \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ は -1 を固有値に持たないことを示せ.
(Hint : $\boldsymbol{u}$ と $A\boldsymbol{u}$ との標準内積を利用して $A\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$ ならば $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ となることを示せ.)

7.2.19 直交行列 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ について $|A| = -1$ ならば -1 は A の固有値であることを証明せよ.
(Hint : 行列式が -1 であるいくつかの直交行列の固有多項式を挙げておく :
$t^3 - \frac{3}{7}t^2 - \frac{3}{7}t + 1,\quad t^4 + \frac{4}{9}t^3 - \frac{4}{9}t - 1,\quad t^5 - \frac{3}{5}t^4 - \frac{2}{5}t^3 - \frac{2}{5}t^2 - \frac{3}{5}t + 1.$ 7.2.17 も使ふ.)

7.2.20 H が成分を有理数とする交代行列のとき $f(H) = (I - H)(I + H)^{-1}$ は, -1 を固有値に持たず, しかも成分がすべて有理数である様な直交行列であることを示せ. さらに, f は
$\{\, H \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q}) \,|\, H$ は交代行列 $\}$ から
$\{\, T \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{Q}) \,|\, T$ は $|T| = 1$ かつ -1 を固有値に持たない直交行列 $\}$
への全単射であることを示し, これの逆の対応を求めよ. (f は Cayley 変換 と呼ばれる.)

7.3 対称行列の対角化

6.7 では正方行列の対角化を考察した. ここでは与へられた $\mathbb{R}$ 上の n 次正方行列 A に対し, 内積空間 $\mathbb{R}^n$ の正規直交基を取り替へることで, A の表現するこの空間上の線形変換が対角行列にすることを考察する. これは幾何学的な応用において非常に重要である. これは, 6.7 で述べた対角化 $B = P^{-1}AP$ における正則行列 P として, 直交行列を選ぶことに相等する.

最初に, 複素共役に関して確認しておく.

定義 7.3.1 複素数 $\alpha = a + bi$ $(i = \sqrt{-1})$ に対し, $\overline{\alpha} = a - bi$ と書いて, これを α の <u>複素共役</u> と呼ぶ.

$\alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{\alpha} = \alpha$ である. また, 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ について

$$\overline{\alpha \pm \beta} = \overline{\alpha} \pm \overline{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}, \qquad \beta \neq 0 \ \text{のとき}\ \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$$

が成り立つ. 即ち, 複素共役をとる操作は四則演算を保つ.

定義 7.3.2 複素数を成分とする行列 $A = [a_{ij}]$ についても $\overline{A} = \left[\,\overline{a_{ij}}\,\right]$ と定め, A の <u>複素共役</u> と呼ぶ.

問 7.3.3 行列の複素共役についても上と同様な等式が成り立つ, 即ち, 複素数を成分とする任意の行列 A, B に対し, 以下の等式が成り立つことを示せ. もちろん, 演算が定義できる場合に限る.

$$\overline{A \pm B} = \overline{A} \pm \overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}, \qquad \det(B) \neq 0 \ \text{のとき}\ \overline{B^{-1}} = \overline{B}^{\,-1}.$$

この節では実対称行列は直交行列により対角化されることを証明する.

命題 7.3.4 実対称行列の固有値は全て実数である.

証明 λ を n 次の実対称行列 A の固有値とせよ. 体を $\mathbb{R}$ から $\mathbb{C}$ に広げて考察する. いま

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\,\boldsymbol{x}$$

となる複素数成分の vector $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ が存在するが, この式の両辺の複素共役をとれば

$$A\,\overline{\boldsymbol{x}} = \lambda\,\overline{\boldsymbol{x}} \quad (\because\ \lambda \in \mathbb{R})$$

を得る. このとき

$$\overline{\lambda}\,{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = {}^t(\overline{\lambda\,\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x} = {}^t(A\overline{x})\boldsymbol{x} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}\,{}^tA\boldsymbol{x} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}A\boldsymbol{x} = {}^t\overline{\boldsymbol{x}}(\lambda\,\boldsymbol{x}) = \lambda{}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}. \tag{7.3.5}$$

ここで $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ とすると $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ であるから,

$${}^t\overline{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x} = \overline{x_1}x_1 + \cdots + \overline{x_n}x_n = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \neq 0$$

であるから, (7.3.4) から $\overline{\lambda} = \lambda$, 即ち $\lambda \in \mathbb{R}$ を得る. □

命題 7.3.6 A を n 次実正方行列とする. A の固有値が全て実数ならば, A は直交行列により上三角行列に写される. 即ち, 直交行列 P が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となる. この操作を <u>上三角化</u> と称する. ここで, P は $\det(P) = 1$ となる様に選べる.

証明 A の次数 n に関する帰納法で証明する. $n = 1$ においては明らかである. 次数が $n-1$ 以下の場合は主張が成り立つと仮定し, 次数が n の場合を示す. λ_1 を A の固有値の 1 つとし, $\boldsymbol{q}_1$ を λ_1 に対応する固有 vector で $\|\boldsymbol{q}_1\| = 1$ なるものとする. ここで $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ ゆゑ $\boldsymbol{q}_1$ の成分も実数に取れることに注意せよ (実係数の連立方程式の解法!). $\boldsymbol{q}_1$ を含む正規直交基 $\{\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n\}$ をとり, $Q = [\boldsymbol{q}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{q}_n]$ とおく. このとき 7.2.11 により Q は直交行列であり

$$Q^{-1}AQ = \left[\begin{array}{c:c} \lambda_1 & * \\ \hdashline & \\ & B \\ & \end{array}\right] \quad (B \text{ は } n-1 \text{ 次の正方行列})$$

と書ける. $\varphi_A(t) = (t - \lambda_1)\,\varphi_B(t)$ であるから, B の固有値も全て実数である. よつて帰納法の仮定より

$$R^{-1}BR = \begin{bmatrix} \lambda_2 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

となる $n-1$ 次直交行列 R が存在する. よつて

$$P = Q \left[\begin{array}{c:c} 1 & \\ \hdashline & \\ & R \\ & \end{array}\right]$$

とおくと, P は直交行列であり, 行列の長方形分割を用ゐると

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \left[\begin{array}{c:c} 1 & \\ \hdashline & \\ & R^{-1} \\ & \end{array}\right] Q^{-1}AQ \left[\begin{array}{c:c} 1 & \\ \hdashline & \\ & R \\ & \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c:c} 1 & \\ \hdashline & \\ & R^{-1} \\ & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c} \lambda_1 & * \\ \hdashline & \\ & B \\ & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c} 1 & \\ \hdashline & \\ & R \\ & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:ccc} \lambda_1 & & & \\ \hdashline & \lambda_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{array}\right]. \end{aligned}$$

最後に, もし $\det(P) = -1$ ならば $\boldsymbol{q}_1$ を $-\boldsymbol{q}_1$ に取り替へれば $\det(P) = 1$ となるが, 依然として P は直交行列である. □

定理 7.3.7 実正方行列 A に対し, 直交行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列になるためには, A が対称行列となることが必要十分である.
またこの状況では, 直交行列 P は $\det(P)=1$ となる様に取れる.

証明 (必要性) 7.3.4 により実対称行列の固有値は全て実数であるから, 7.3.6 により $\det(P)=1$ なる直交行列 P で

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

とできる. ${}^tP = P^{-1}$ であるから, ${}^t(P^{-1}AP) = {}^tP\,{}^tA\,{}^tP^{-1}$ である. 即ち $P^{-1}AP$ は対称行列である. つまり

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

ここで $\det(P)$ の符号を変へたければ, P の 1 つの列の成分の符号を逆にすればよい.
(十分性) P が直交行列で $P^{-1}AP = B$ が対角行列であるから,

$${}^tA = {}^t(PBP^{-1}) = {}^t(PB\,{}^tP) = P\,{}^tB\,{}^tP = PBP^{-1} = A$$

となり A は対称行列である. □

ここで, 固有多項式が重根を持つ様な対称行列の直交行列による対角化の例を挙げておく.

例題 7.3.8 実対称行列 $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \end{bmatrix}$ に対し, $B = P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求め, B も記せ.

解 固有多項式は $\varphi_A(t) = (t-3)(t+6)^2$ で, 簡約化により固有空間を求めれば

$$W(3,A) = \left\{ c\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad W(-6,A) = \left\{ a\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \,\middle|\, a,\ b \in \mathbb{R} \right\}$$

となる. (ここで 7.3.11 の主張が成立してゐることを確かめられたい.) しかし, この場合の様に重根になつてゐる固有値に対応する固有空間においては, 簡約化の計算で自然に得られる基を構成する vectors は一般には互ひに直交しない. つまり, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ は直交してゐないので, $W(-6,A)$ の正規直交基を選ぶ必要がある. それには, この 2 つ関して Gram-Schmidt の正規直交化 (7.2.3) を行なつて, $W(-6,A)$ の正規直交基として

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

を得る．これに $W(3,A)$ の正規直交基 $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ を合はせて $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ とすれば, P は直交行列であつて $B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & -6 & \\ & & -6 \end{bmatrix}$ となる．しかし, $W(-6,A)$ の正規直交基としては,

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ととることもできて, この場合には,

$$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

となる．

演 習 問 題

7.3.9 次の実対称行列 A に対し, $B = P^{-1}AP$ が対角行列となる直交行列 P を求めよ．
(答は一通りではない．)

(1) $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ 　$\left(\text{答例：} P = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & 6 & \\ & & 9 \end{bmatrix}. \right)$

(2) $A = \begin{bmatrix} -5 & -18 & 0 \\ -18 & 34 & 18 \\ 0 & 18 & 13 \end{bmatrix}$ 　$\left(\text{答例：} P = \dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & & \\ & 49 & \\ & & -14 \end{bmatrix}. \right)$

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ 　$\left(\text{答例：} P = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & & \\ & -3 & \\ & & 6 \end{bmatrix}. \right)$

(4) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 　$\left(\text{答例：} P = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}. \right)$

7.3.10 実正方行列 $A_1, \cdots, A_s$ に対し, 直交行列 P が存在して, $P^{-1}A_1P, \cdots, P^{-1}A_sP$ がすべて対角行列となるためには, $A_1, \cdots, A_s$ のどの 2 つも交換可能であることが必要十分である．これを証明せよ．

7.3.11 A を n 次の実対称行列とせよ．$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ を A の固有値 λ, μ に対する固有 vectors とせよ．このとき $\lambda \neq \mu$ ならば $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ であることを示せ．(Hint : ${}^t\boldsymbol{u}A\boldsymbol{v}$ を 2 通りに計算し比較．)

第8章　2 次曲線と 2 次曲面

8.1　Euclid 空間と代数的曲面

ここでは Euclid 空間は, 非常に古くからある概念にもかかはらず, これを現代的に厳密に定義しやうとすると, かなり手間が掛かる[1] ので, ここでは, 簡単に述べておく.

この本においては, 記号 $\mathbb{R}^n$ は実数を成分とする n 次の数 vectors 全体のなす vector 空間を表してゐる. これと混同しない様に, ここでは n 次元 Euclid 空間を $\mathbb{E}^n$ で表す.

定義 8.1.1　n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{E}^n$ とは, 内積空間 $\mathbb{R}^n$ を位置 vector に持つ点のなす空間のことである. より詳しく述べれば $\mathbb{E}^n$ には, 原点と呼ばれるあらかじめ固定された点 O があり, 各点 $\mathrm{P} \in \mathbb{E}^n$ には一意的に vector $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ が定まる. このとき, $\boldsymbol{a}$ は O を始点とし, P を終点とする P の位置 vector と呼ばれ, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boldsymbol{a}$ と記される. 任意の 2 点 $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{E}^n$ の位置 vector を $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ とするとき, 点 P から Q に至る vector なるものを $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ として定義し $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と記す. $\mathbb{R}^n$ の正規直交基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を 1 つとる. このとき $\mathbb{E}^n$ の各点 P の位置 vector　$\boldsymbol{p} = \sum_{j=1}^n c_j \boldsymbol{u}_j$ の係数 $(c_1, \cdots, c_n)$ を P の座標と呼び, $\mathrm{P} = (c_1, \cdots, c_n) \in \mathbb{E}^n$ などと書く. また任意の 2 点 P, Q の距離を $\|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\|$ と定める.

例へば $\mathbb{E}^3$ は実数 3 個の順序付きの組 (x, y, z) (これを $\mathbb{E}^3$ の点と呼ぶ) の全体であり, 2 つの点 (x, y, z) と (x', y', z') の距離が $\left((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right)^{\frac{1}{2}}$ で与へられる空間である. 高校までで学んだ座標平面や座標空間は, それぞれ $\mathbb{E}^2$, $\mathbb{E}^3$ に他ならない.

さて, $\mathbb{E}^n$ の座標は, 原点 O の変更と, 位置 vectors の空間 $\mathbb{R}^n$ 正規直交基の変更に伴なつて変はるのであるが, それに応じて, 考察する図形 $S \subset \mathbb{E}^n$ の方程式が変更を受ける.

定義 8.1.2　空間 $\mathbb{E}^n$ の部分集合 S が n 変数の実数係数多項式 $F(X_1, \cdots, X_n)$ によつて

$$S = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{E}^n \,|\, F(x_1, \cdots, x_n) = 0\} \tag{8.1.3}$$

と表はされるとき, S を $\mathbb{E}^n$ の代数的超曲面と呼ぶ. (8.1.3) において, F の次数が d のとき, S を d 次代数的超曲面と呼ぶ. $n = 2$ のとき S は代数的曲線と呼ばれ, $n = 3$ のとき S は代数的曲面[2] と呼ばれる.

[1] 気になる読者は, 例へば, 岩波数学辞典の「ユークリッド空間」の項目, あるいは 河田敬義 著 :「アフィン幾何・射影幾何」(岩波講座 基礎数学) などを見られたい.

[2] 一般に, 代数曲線, 代数的曲面といふ言葉はもつと広い概念を指すので, この用語の使用法は, この本に限つてのものであることに注意されたい.

補題 8.1.4 一般に, $\mathbb{E}^n$ の座標を直交変換と平行移動により $\boldsymbol{x} \longmapsto T\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$, つまり $\boldsymbol{x} = {}^tT\,(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{b})$, ($\boldsymbol{x}$ は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を成分とする列 vector, T は直交行列, $\boldsymbol{b}$ は定 vector) で変更して, (8.1.3) の S を与へる多項式 $F(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ を新しい多項式 $G(X'_1, X'_2, \cdots, X'_n)$ に変換するとき, F と G の全次数は同一である.

証明 なぜなら, この様な変換の逆の変換は再びこの形の変換であるが, もし, 次数が下つたとすると（1 次式での変換で次数が上がることは有り得ない）逆の変換で元に戻したときに, 1 次式での変換で次数が上がることになり矛盾である. □

8.2 2 次曲線の分類

ここでは $\mathbb{E}^2$ において

$$F(X,Y) = a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2b_1X + 2b_2Y + c$$

により

$$C = \{\,(x,y) \in \mathbb{E}^2 \mid F(x,y) = 0\,\}$$

と定義される代数的曲線を, 単に 2 次曲線 と称する. 以下, この 2 次曲線 C の形状を調べる. C が空集合の場合もある. ここで $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$, $D = \det(A)$ として, $D = 0$ か否かで場合を分ける.

$D \neq 0$ のとき. まづ,

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{D}, \frac{a_{11}b_2 - a_{12}b_1}{D}\right), \quad (X', Y') = (X - x_0, Y - y_0)$$

とおくと

$$F(X,Y) = p_{11}X'^2 + 2p_{12}X'Y' + p_{22}Y'^2 + c'$$

の形になる. ここで $p_{12} = 0$ ならば C の形状は一目瞭然なので, $p_{12} \neq 0$ とする. この場合は

$$2p_{12}\cos(2\theta) = (a_{11} - a_{22})\sin(2\theta)$$

を満たす θ を取り

$$\begin{bmatrix} X'' \\ Y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix}$$

なる X'', Y'' で $F(X,Y)$ を書けば (直交行列による変換 !)

$$F(X,Y) = q_{11}X''^2 + q_{22}Y''^2 + c''$$

となる. これを C の 標準形 といふ. ここで

$$F(X,Y) = [\,X'\ Y'\,] \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} q_{11} & \\ & q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} + c''$$

であるから q_{11} と q_{22} は A の固有値に他ならない.

$D = 0$ の場合 この場合は

$$F(X,Y) = \pm(pX + qY)^2 + 2b_1X + 2b_2Y$$

の形になるから,

$$\cos\theta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \quad \sin\theta = \frac{-q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

なる θ を取つて

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

なる X', Y' で F を書けば

$$F(X,Y) = \pm(p^2 + q^2)X'^2 + 2b_1(X'\cos\theta + Y'\sin\theta) + 2b_2(-X'\sin\theta + Y'\cos\theta)$$

となる. 以上のことと高校で学んだ事を合はせれば 2 次曲線は C は楕円, 双曲線, 放物線などの簡単な図形であることがわかる.

例題 8.2.1 次の方程式で表される 2 次曲線 S の概形を図示せよ：

$$x^2 - 4xy - 2y^2 + 10x + 4y = 0$$

解 まづ, $(x,\, y) = (x' - x_0,\, y' - y_0)$ を代入して $x,\, y$ の 1 次の項を消すための平行移動を求めると $(x_0,\, y_0) = (1, -2)$ を得る. これにより, 与式は

$$x'^2 - 4x'y' - 2y'^2 - 2 = 0 \tag{8.2.2}$$

となる. この係数に対応する 2 次行列を $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$ とおく. $\varphi_A(t) = (t-2)(t+3)$ より A の固有値は 2, -3 であり, 対応する固有 vector を求めることにより,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & \\ & -3 \end{bmatrix}, \quad \left(\text{但し } P = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ で, これは直交行列} \right)$$

を得る (7.3.11 に注意せよ). $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$ とおき, (8.2.2) に代入すれば

$$2x''^2 - 3y''^2 = 2, \qquad (\text{ 煩雑なので } {}'' \text{ を外して }) \quad 2x^2 - 3y^2 = 2$$

を得る. 漸近線は

$$y - 2 = \tfrac{\sqrt{6}-2}{2}\,(x+1), \quad y - 2 = \tfrac{-\sqrt{6}-2}{2}\,(x+1)$$

であり, その交点 $(-1, 2)$ が S の中心である. S と座標軸との交点は $(0,0)$, $(0,2)$, $(-10,0)$ の 3 点. 以上から S の概形を図示すれば

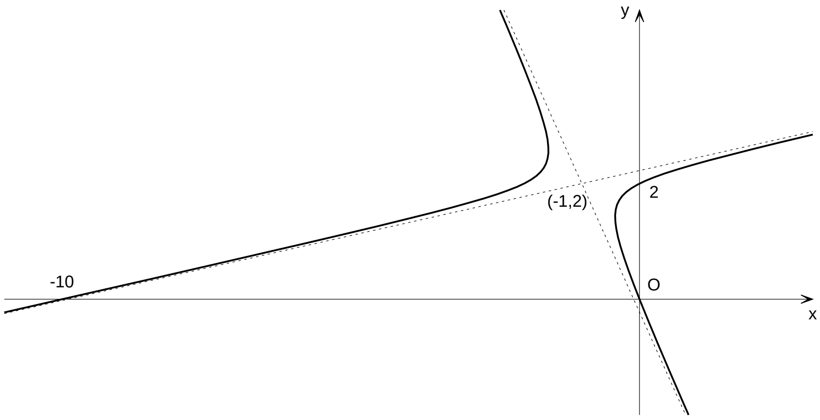


図 8.2.3

となる.

2 次曲線の方程式は, 正規直交基を選んで, 対角行列による 2 次形式に変換できたが, 双曲線, 楕円は直交する 2 本の対称軸を持つし, 放物線は対称軸を持つから, 2 次対称行列が直交行列で対角化されるといふ定理 7.3.7 の幾何学的な意味が明晰に感じ取れるであらう.

演 習 問 題

8.2.4 次の 2 次曲線を標準形に変形し, 元の曲線の概形を描け.

(1) $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4x - 4y - 4 = 0.$ （答：標準形は $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$ ）

(2) $2x^2 + 4xy - y^2 - 20x - 8y + 32 = 0.$ （答：標準形は $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1.$ ）

8.3　2 次曲面の分類

この節の目的は, 対称行列が直交行列により対角化されることを, 幾何学的な観察を通じて膚(はだ)で感じることにある.

空間 $\mathbb{E}^3$ の部分集合 S が 3 変数の実数係数多項式 $F(X,Y,Z)$ によつて

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{E}^3 \,|\, F(x,y,z) = 0\} \tag{8.3.1}$$

と表はされるとき, S を $\mathbb{E}^3$ の 代数的曲面 と呼ぶのであつた（8.1.2 を見よ）.

以下, この節では,

$$F(X,Y,Z) = a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{23}YZ + 2a_{31}ZX + 2a_{12}XY + c \quad (c \neq 0) \tag{8.3.2}$$

の形の多項式で定義される 2 次曲面 S のみ扱ふ. 本来は 8.2 節の様に X, Y, Z の 1 次の項を含めた形で扱ふべきであるが, 煩雑になるので, ここでは (8.3.2) の形の多項式で定義される 2 次曲面のみに限定して説明する. これ以外の 2 次曲面については [A], §9.4 が詳しい.

以下では, (8.3.2) に基き,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad F(x,y,z) = {}^t\boldsymbol{x}\, A\, \boldsymbol{x} - c$$

と書く. また A の対角化を $T^{-1}AT = \begin{bmatrix} b_1 & & \\ & b_2 & \\ & & b_3 \end{bmatrix}$ とおく. ここで T は直交行列である.

$\boldsymbol{x}' = T\boldsymbol{x}$ とおくことで, F は

$$F(T\boldsymbol{x}') = b_1 x'^2 + b_2 y'^2 + b_3 z'^2 + c$$

に変換される. 方程式 $F(T(\boldsymbol{x}')) = 0$ を $c \neq 0$ で割ることにより,

$$a_1\, x''^2 + a_2\, y''^2 + a_3\, z''^2 = 1$$

の形にできる. 煩雑なので, $''$ を省いて

$$a_1\, x^2 + a_2\, y^2 + a_3\, z^2 = 1 \tag{8.3.3}$$

と書く. これを S の 標準形 と称する. 以下では $\mathrm{rank}(A) = 3$, 即ち $a_1 a_2 a_3 \neq 0$ と仮定する.

定義 8.3.4　上記 (8.3.3) の形になつたとき, a_1, a_2, a_3 のうちの正の数の個数 r と負の数の個数 s を記号

$$\mathrm{sgn}(A) = (r, s)$$

で表し, この記号を F の 符号数 と称する.

ここで, 2 次曲面 (8.3.3) を分類すれば, 次の様になる.

1. $\mathrm{sgn}(A) = (3, 0)$ のとき標準形は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

となり, 図 8.3.5 の様になる.
これを 楕円面 と呼ぶ.

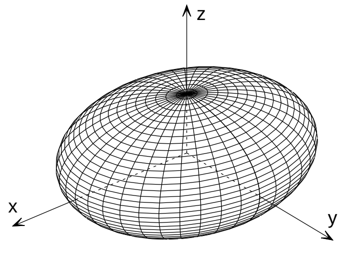


図 8.3.5　楕円面

2. $\mathrm{sgn}(A) = (2, 1)$ のとき標準形は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

となり, 図 8.3.6 の様になる.
これを 一葉(いちよう)双曲面 と呼ぶ.

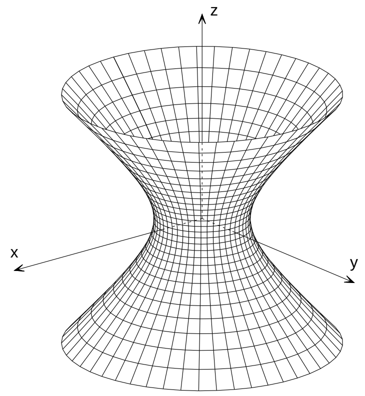


図 8.3.6　一葉双曲面

3. $\mathrm{sgn}(A) = (1, 2)$ のとき標準形は

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

となり, 図 8.3.7 の様になる.
これを 二葉(によう)双曲面 と呼ぶ.

4. $\mathrm{sgn}(A) = (0, 3)$ のときは空集合になる.

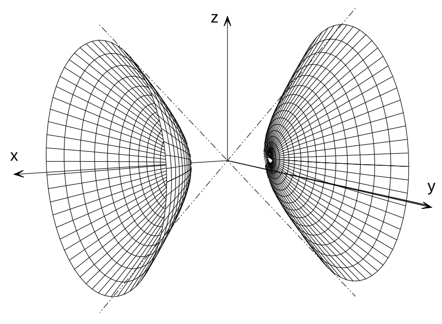


図 8.3.7　二葉双曲面

注意 8.3.8　8.2 と 8.3 で概説した 2 次曲線や 2 次曲面の概念は, 一般の体の上での 2 次形式へと一般化され, 古くから活発に研究されてをり, 厖大な研究が存在する.

演 習 問 題

8.3.9　次に挙げる方程式で定義される 2 次曲面の標準形を求めよ. また得られた標準形の表す曲面の概略を図示し, その名称を記せ.

(1) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz = 3.$

(2) $-5x^2 + 34y^2 + 13z^2 - 36xy + 36yz = 7.$

(3) $-2x^2 - 2y^2 - 5z^2 + 8xy + 4yz + 4zx = 3.$　(Hint : 7.3.8 の結果を利用.)

第9章　Vector 空間の直和と最小多項式

9.1　Vector 空間の部分空間による直和分解

次に述べる vector 空間の直和分解の概念はとても重要である.

定義 9.1.1　Vector 空間 V と自明でない部分空間 $W_1, \cdots, W_r$ について, 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ が

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_r, \quad \boldsymbol{w}_i \in W_i$$

と表され, かつ唯 1 通りにしか表せないとき, V は $W_1, \cdots, W_r$ の <u>直和</u> である, または, V は $W_1, \cdots, W_r$ によつて <u>直和分解</u> される, などといはれ,

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r \quad \left(\text{または} \quad V = \bigoplus_{i=1}^{r} W_i \right)$$

と表記される. この状況で, 各 W_i は V の <u>直和因子</u> と呼ばれる.

問 9.1.2　$B = \{ \boldsymbol{u}_1, \ \cdots, \ \boldsymbol{u}_n \}$ が V の基のとき, これらを, 任意の組 $B_1, \cdots, B_r$ に分けて $B = B_1 \cup \cdots \cup B_r$ $(B_i \cap B_j = \emptyset)$ とし, 各 $1 \leq i \leq r$ について, W_i を B_i の元で生成される部分空間とする. このとき $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ である. これを示せ.

問 9.1.3 Vector 空間 V が $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ と直和に分解してゐるとし, 各部分空間 W_i の基 $B_i = \{ \boldsymbol{u}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{u}_{ir_i} \}$ $(1 \leq i \leq r)$ をとつておく. このとき, これらの全体 $B = B_1 \cup \cdots \cup B_r$ は V の基である. これを証明せよ.

問 9.1.4　$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ のとき, $\dim(V) = \dim(W_1) + \cdots + \dim(W_r)$ であることを示せ. ここで 5.2.15 で述べた, 部分空間の和の記号 $W_1 + \cdots + W_r = \sum_{i=1}^{r} W_i$ を思ひ出さう.

定理 9.1.5　V を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間, W_i $(1 \leq i \leq r)$ は V の部分空間であるとし, $V = W_1 + W_2 + \cdots + W_r$ であるとする. このとき, 次の 3 つは同値である.
(1)　$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$ (直和分解),
(2)　任意の $2 \leq k \leq r$ に対し, $(W_1 + W_2 + \cdots + W_{k-1}) \cap W_k = \{\mathbf{0}\}$,
(3)　任意の $1 \leq j \leq r$ に対し, $W_j \cap \displaystyle\sum_{i=1, i \neq j}^{r} W_i = \{\mathbf{0}\}$.

証明　(1)⇒(2). (2) の等式がある $2 \leq k \leq r$ で不成立であるとせよ :

$$(W_1 + W_2 + \cdots + W_r) \cap W_k \neq \{\mathbf{0}\}.$$

このとき $\boldsymbol{w}_k \in (W_1 + W_2 + \cdots + W_{k-1}) \cap W_k$ が存在して $\boldsymbol{w}_k \neq \mathbf{0}$ となる. ゆゑに $\boldsymbol{w}_k \in V$ は

$$\boldsymbol{w}_k = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_{k-1}, \quad \boldsymbol{w}_j \in W_j, \quad (1 \leq j \leq k)$$

と表はされてゐる. つまり

$$\mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} = \mathbf{0} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_{k-1} - \boldsymbol{w}_k$$

となり, $\mathbf{0}$ が 2 通りに表はされることになり矛盾である.
(2)⇒(1). ある $\boldsymbol{v} \in V$ が 2 通りに

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 + \cdots + \boldsymbol{w}_{r-1} + \boldsymbol{w}_r \quad = \boldsymbol{w}'_1 + \boldsymbol{w}'_2 + \cdots + \boldsymbol{w}'_{r-1} + \boldsymbol{w}'_r$$

と表はされたとせよ. この 2 式の差を取れば

$$(\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}'_1) + (\boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}'_2) + \cdots + (\boldsymbol{w}_{r-1} - \boldsymbol{w}_{r-1}) = \boldsymbol{w}'_r - \boldsymbol{w}_r$$

となるが, これと (2) の条件から $\boldsymbol{w}'_r = \boldsymbol{w}_r$ でなければならない. 同様な議論を繰り返へせば,

$$\boldsymbol{w}'_r = \boldsymbol{w}_r, \quad \boldsymbol{w}'_{r-1} = \boldsymbol{w}_{r-1}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{w}'_1 = \boldsymbol{w}_1$$

がわかり, (1) が成り立つことがわかる.
(2) $\Longleftrightarrow$ (3) は (1) と (2) の同値性と和の可換性からわかる. □

定理 9.1.6 I を vector 空間 V の単位変換とし, $T_i \neq O$ が V の線形変換で 2 つの条件
(1) $I = T_1 + T_2 + \cdots + T_r$, (和の定義は 6.1.15 を見よ)
(2) $i \neq j$ ならば $T_iT_j = O$ (零写像)
を共に満たすとせよ. このとき

$$T_i{}^2 (= T_iT_i) = T_i \;\; (1 \leq i \leq r) \quad \text{で}^{1)} \quad V = T_1(V) \oplus T_2(V) \oplus \cdots \oplus T_r(V).$$

例 9.1.7 いま, 3 つの行列

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

について, $T_i = T_{A_i} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\boldsymbol{u} \mapsto A_i\boldsymbol{u}$ $(1 \leq i \leq 3)$ とすれば, $I = T_1 + T_2 + T_3$ であり, $i \neq j$ について $T_iT_j = O$ である.

証明 条件 (1) の両辺に T_i を施し (2) を使へば

$$T_i = T_iI = T_i(T_1 + T_2 + \cdots + T_r) = T_iT_1 + T_iT_2 + \cdots + T_iT_r = T_iT_i$$

となり $T_iT_i = T_i$ が示された. 次に 9.1.5 により, 任意の $1 \leq k \leq r$ に対して

$$\big(T_1(V) \oplus T_2(V) \oplus \cdots \oplus T_{k-1}(V)\big) \cap T_k(V) = \{\mathbf{0}\} \tag{9.1.8}$$

であることを示せばよい. $\boldsymbol{w} \in \big(T_1(V) \oplus T_2(V) \oplus \cdots \oplus T_{k-1}(V)\big) \cap T_k(V)$ は

$$\boldsymbol{w} = T_1(\boldsymbol{v}_1) + T_2(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + T_{k-1}(\boldsymbol{v}_{k-1}) = T_k(\boldsymbol{v}_k), \quad \boldsymbol{v}_j \in V, \tag{9.1.9}$$

と表はされる. (9.1.9) を T_k で写せば

$$(\,T_k(\boldsymbol{w}) =\,)\, T_kT_1(\boldsymbol{v}_1) + T_kT_2(\boldsymbol{v}_2) + \cdots + T_kT_{k-1}(\boldsymbol{v}_{k-1})\,(= \mathbf{0}) = T_kT_k(\boldsymbol{v}_k). \tag{9.1.10}$$

一方 (9.1.9) の中辺を除いた等式に T_k を施せば, 前半で示した通り $T_kT_k = T_k$ であるから

$$\boldsymbol{w} = T_k(\boldsymbol{v}_k) = T_kT_k(\boldsymbol{v}_k) = \mathbf{0}. \tag{9.1.11}$$

よつて (9.1.8) が成り立つ. □

1) つまり T_i は冪等行列 (9.5.1 を参照) である.

演 習 問 題

9.1.12 Vector 空間 V とその部分空間 $W_1, \cdots, W_s$ について, $V = W_1 + \cdots + W_s$ であるとする. このとき, 次のことを示せ. $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s$ であるためには, $\mathbf{0} \in V$ が $W_1, \cdots, W_s$ に属する vectors の和として一意的に表示されること, 即ち, もし $\boldsymbol{w}_1 \in W_1, \cdots, \boldsymbol{w}_s \in W_s$ について $\mathbf{0} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_s$ ならば $\boldsymbol{w}_1 = \cdots = \boldsymbol{w}_s = \mathbf{0}$ となること, それが必要十分である.

9.2　最小多項式

ここでは, 固有多項式をさらに精密化した最小多項式と呼ばれるものについて学ぶ.

定義 9.2.1 (多項式環における ideal) 多項式環 $\mathbf{K}[t]$ の部分集合 M が 2 つの条件

I1　$M + M \subset M$,

I2　$\mathbf{K}[t]\, M \subset M$

を共に満たすならば, M は, この多項式環の ideal であるといはれる.

問 9.2.2 次の集合はどれも $\mathbb{R}[t]$ の ideal である. これを示せ.

(1)　$\{0\}$,　$\mathbb{R}[t]$.

(2)　$\{ f(t) \in \mathbb{R}[t] \mid f(1) = 0 \}$,　$\{ f(t) \in \mathbb{R}[t] \mid f(1) = 0,\ f(2) = 0 \}$.

(3)　$\{ g_1(t)(t-1)^2 + g_2(t)(t^3 - 2t^2 + 1) \mid g_1(t),\ g_2(t) \in \mathbb{R}[t] \}$.

(4)　$f_1(t), \cdots, f_n(t) \in \mathbb{R}[t]$ をとり固定するとき
$\{ g_1(t)f_1(t) + \cdots + g_n(t)f_n(t) \mid g_1(t),\ \cdots,\ g_n(t) \in \mathbb{R}[t] \}$.

補題 9.2.3 M を $\mathbf{K}[t]$ の任意の ideal とせよ. このとき, ある $p(t) \in \mathbf{K}[t]$ が存在して,

$$M = p(t)\, \mathbf{K}[t]$$

となる. この様な状況を M は $p(t)$ で生成されるといふ.

証明 0 を除く M の元の中で, 次数が最小な多項式の 1 つを $p(t)$ とせよ. 任意に $f(t) \in M$ とれ. このとき, ある $q(t), r(t) \in \mathbf{K}[t]$ により

$$f(t) = p(t)q(t) + r(t), \quad (\ r(t) = 0 \ \text{ または } \ \deg r(t) < \deg p(t)\ )$$

と書ける. 但し deg は多項式の次数を表す. しかるに $r(t) = f(t) - p(t)q(t) \in M$ であるから, $p(t)$ の選び方から $r(t) = 0$ でなければならない. 従つて $M = p(t)\mathbf{K}[t]$ である. □

注意 9.2.4 9.2.3 の主張は, $\mathbf{K}[t]$ は単項 ideal 整域（可換環論の用語）である, と述べられる.

補題 9.2.5 多項式 $f_1(t), \cdots, f_n(t) \in \mathbf{K}[t]$ が共通の因子を持たないとき, $g_1(t), \cdots, g_n(t) \in \mathbf{K}[t]$ が存在して,

$$f_1(t)g_1(t) + \cdots + f_n(t)g_n(t) = 1$$

となる. この等式を $f_1(t), \cdots, f_n(t)$ に対する Bezout 等式 と呼ぶ.

証明 まづ, $M = \{ f_1(t)g_1(t) + \cdots + f_n(t)g_n(t) \mid g_1(t),\ \cdots,\ g_n(t) \in \mathbf{K}[t] \}$ とおく. M が ideal であることは容易に確かめられる. よつて, 9.2.3 により, ある多項式 $p(t)$ によつて

$M = \big(p(t)\big)\,\mathbf{K}[t]$ と書ける．しかるに $f_1(t), \cdots, f_n(t) \in M$ であるから, $p(t)$ の次数が 0 でなければ, 仮定に矛盾する．$p(t)$ の次数が 0 であれば $M = \mathbf{K}[t]$ となり, 証明は完了する． □

定義 9.2.6 (正方行列の最小多項式) 正方行列 A に対し, $f(A) = O$ を満たす多項式 $f(t) \in \mathbf{K}[t]$ の中で, 次数が最小かつ最高次の係数が 1 であるもの [2] を $\mu_A(t)$ で表す．下記の 9.2.8 から, これは常に存在し, 一意的に定まる．$\mu_A(t)$ を A の <u>最小多項式</u> と呼ぶ．

例 9.2.7 3 次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \\ & 1 & 3 \\ & & 1 \end{bmatrix}$ について $\varphi_A(t) = (t-1)^2(t-2)$, $\mu_A(t) = (t-1)(t-2)$, $g_B(t) = \mu_B(t) = (t-1)^3$ である (確かめよ)．この様に, 最小多項式と固有多項式は異ることもあれば一致することもあるし, 最小多項式が重根を持つ場合もある．

定理 9.2.8 (行列の最小多項式の存在と一意性) 正方行列 A に対し, 次が成り立つ．

(1) A の最小多項式は存在し, しかも唯 1 つに限る．

(2) λ が A の固有値 $\iff f(\lambda) = 0$.

(3) $0 \neq f(t) \in \mathbf{K}[t]$ について, $f(A) = 0 \ \Rightarrow\ \mu_A(t) \,|\, f(t)$. 特に $\mu_A(t) \,|\, \varphi_A(t)$ である．

証明 (1) いま $J = \{\, f(t) \in \mathbf{K}[t] \,|\, f(T) = O \,\}$ とおく．J は $\mathbf{K}[t]$ の ideal である．よつて 9.2.3 により monic な $p(t) \in \mathbf{K}[t]$ が存在して $J = p(t)\,\mathbf{K}[t]$ と書ける．即ち, 最小多項式が存在する．また $p(t)$ に monic 性を課すれば一意的であるから一意性も従ふ．

(2) A の任意の固有値 λ について $A\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ ($\exists \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$) だから, 任意の多項式 $f(t)$ について $f(A)\boldsymbol{u} = f(\lambda)\boldsymbol{u}$ が成り立つ．特に, 上の $p(t)$ については $\mathbf{0} = O\mathbf{0} = p(A)\boldsymbol{u} = p(\lambda)\boldsymbol{u}$ ゆゑ, $p(\lambda) = 0$ となり, (2) の ($\Rightarrow$) が示された．一方 6.5.8 (C-H の定理) により $\varphi_A(A) = O$ ゆゑ $\varphi_A(t) \in J$ であるが, (1) の証明の $p(t)$ の意味から $\varphi_A(t)$ は $p(t)$ で割り切れる．よつて残りの主張もすべて成り立つ． □

一般の線形変換 $T : U \longrightarrow U$ についても, いままでと同様に U の基を定めて表現行列について考察することで, 次の定義に至る．

定義 9.2.9 Vector 空間 V の線形変換 T に対し, $f(T) = O$ を満たす多項式 $f(t) \in \mathbf{K}[t]$ の中で, 次数が最小で monic な多項式を $\mu_T(t)$ で表す．次の 9.2.10 により, これは存在し, 一意的に定まる．$\mu_T(t)$ を T の <u>最小多項式</u> と呼ぶ．

問 9.2.10 V を体 $\mathbf{K}$ 上の vector 空間として, V の基を 1 つ決めて固定する．T を V の線形変換とし, A をその基に関する T の表現行列とせよ．以下のことが成り立つことを示せ．

(1) $f(T) = O$ (零変換) $\iff$ $f(A) = O$ (零行列).

(2) $\mu_T(t) = \mu_A(t)$. 特に $\mu_T(t)$ は存在し, しかも唯 1 つしか存在しない．

(3) $0 \neq f(t) \in \mathbf{K}[t]$ について, $f(T) = 0 \ \Rightarrow\ \mu_T(t) \,|\, f(t)$. 特に $\mu_T(t) \,|\, \varphi_T(t)$ である．

(4) λ が T の固有値 $\iff \mu_T(\lambda) = 0$.

演 習 問 題

9.2.11 正方行列 A が 2 つの正方行列 B と C によつて $A = \begin{bmatrix} B & \\ & C \end{bmatrix}$ と書かれるとき

[2] 最高次の係数が 1 である多項式を <u>monic</u> と称する．

$\mu_A(t)$ は $\mu_B(t)$ と $\mu_C(t)$ の最小公倍多項式であることを示せ.

9.2.12 次の行列の最小多項式を求めよ.

(1) $\begin{bmatrix} 3 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 3 \end{bmatrix}$

9.3 可換な線形変換, 可換な行列

ここで, Toeplitz の定理 11.5.7 の証明に必要な事実と関係する事実をいくつか述べておく.

命題 9.3.1 T_1, T_2 が $\mathbb{C}$ 上の線形変換で $T_1T_2 = T_2T_1$ であるとき, 次が成り立つ.
(1) T_1 の固有空間は T_2 によつてそれ自身に写される.
このことを T_1 の固有空間は T_2 で <u>不変</u> であるなどといふ.
(2) T_1 と T_2 に共通の固有 vector が存在する.

証明 (1) λ を T_1 の 1 つの固有値とし $\boldsymbol{u} \in W(\lambda, T_1)$ とする. このとき $T_1(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$ ゆゑ,

$$T_1\bigl(T_2(\boldsymbol{u})\bigr) = (T_1T_2)(\boldsymbol{u}) = (T_2T_1)(\boldsymbol{u}) = T_2\bigl(T_1(\boldsymbol{u})\bigr) = T_2(\lambda\boldsymbol{u}) = \lambda T_2(\boldsymbol{u})$$

となるが, これは $T_2(\boldsymbol{u}) \in W(\lambda, T_1)$ であることを示す.
(2) $\mathbb{C}$ 上では, どんな線形変換も少くとも 1 つ固有 vector を持つから, T_2 は $W(\lambda, T_1)$ の線形変換として固有 vector を持つが, それは T_1 と T_2 に共通の固有 vector に他ならない. □

命題 9.3.2 A と B が $\mathbb{C}$ 上の正方行列で $AB = BA$ であるとき, 次が成り立つ.
(1) A の固有空間に属する $\boldsymbol{u}$ に対し $B\boldsymbol{u}$ はまたその空間に属する.
(2) A と B に共通な固有 vector が存在する.

証明 9.3.1 から明らかである. □

次の様な 9.3.1 の逆に近い主張が成り立つ :

命題 9.3.3 V の線形変換 T_1, T_2 について, T_1 が対角化可能で T_1 の任意の固有空間は T_2 によつてそれ自身に写されるとき, $T_1T_2 = T_2T_1$ である.

証明 λ を T_1 の任意の固有値とする. $\boldsymbol{u} \in W(\lambda, T_1)$ のとき, $T_1(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$ であるから,

$$(T_1T_2)(\boldsymbol{u}) = T_1(T_2(\boldsymbol{u})) = \lambda T_2(\boldsymbol{u}) = T_2(\lambda\boldsymbol{u}) = T_2(T_1(\boldsymbol{u})) = (T_2T_1)(\boldsymbol{u})$$

となる. 一方, 6.7.10 より V の任意の vector は T_1 の固有空間に属する vectors の和で書けるから, 主張が成り立つ. □

正方行列 A について T_A を考察すれば, 9.3.3 を行列に焼き直した主張も成り立つ.

命題 9.3.4 2 つの行列 $A_1,\ A_2 \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ について, A_1 が対角化可能で A_1 の任意の固有空間が, 写像 $\boldsymbol{u} \longmapsto A_2\boldsymbol{u}$ によつてそれ自身に写されるとき, $A_1A_2 = A_2A_1$ である.

演 習 問 題

9.3.5 次の 2 つの行列について $AB = BA$ であることを確かめ, A と B の共通の固有 vectors をすべて求めよ.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -3 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ $\left(答 \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{C} \right\} \cup \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{C} \right\} \right)$

(2) $A = \begin{bmatrix} 33 & 17 & -22 \\ -13 & -4 & 9 \\ 35 & 20 & -23 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -31 & -15 & 21 \\ -10 & -6 & 7 \\ -50 & -25 & 34 \end{bmatrix}$ [3].

$\left(参考 : \varphi_A(t) = (t-2)^3,\ \varphi_B(t) = (t+1)^3 \text{ で } \dim W(2, A) = 1, \dim W(-1, B) = 2 \text{ である. 答 } \left\{ c \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \middle| c \in \mathbb{C} \right\} \right)$

9.3.6 T_1, T_2 はともに, 対角化可能な $\mathbb{C}$ 上の vector 空間 V の線形変換であるとし, $T_1T_2 = T_2T_1$ が成り立つてゐるとする. このとき V の基が存在して, その基に対する T_1 と T_2 の表現行列がどちらも対角行列になる. これを証明せよ. (Hint : 9.3.1 を使ふ.)

(この様な状況を, T_1 と T_2 は <u>同時対角化可能</u> であると言ふ.)

---

[3] この問題は $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 \end{bmatrix}$,
$A = PA_1P^{-1},\ B = P({B_1}^2 + 2B_1)P^{-1}$ として作つたものである.

9.4 線形変換の直和と行列の直和

Vector 空間 V が, 部分空間 W_i の直和で

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_r$$

と表されてゐるとする. V の各 vector $\boldsymbol{v}$ は

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_r, \quad (\boldsymbol{w}_i \in W_i)$$

の形に一意的に表される. それぞれの W_i の線形変換 T_i が与へられたとき, V の変換 T を, 上の $\boldsymbol{v}$ を

$$T(\boldsymbol{v}) = T_1(\boldsymbol{w}_1) + \cdots + T_r(\boldsymbol{w}_r)$$

に写すものとして定めると, これは線形変換になる.

定義 9.4.1 上の状況のとき

$$T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_r$$

と表し, T を $T_1, \cdots, T_r$ の 直和 といふ.

定義 9.4.2 (行列の直和) 正方行列 $A_1, \cdots, A_r$ について, 行列

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{bmatrix}$$

を $A_1, \cdots, A_r$ の 直和 と呼び

$$A = A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_r$$

と表す.

定義 9.4.3 (補空間) Vector 空間 V の部分空間 W が与へられたとき,

$$V = W \oplus W'$$

を満たす部分空間 W' を W の 補空間 と呼ぶ.

補空間は W から一意的に定まるわけではない. 7.1.13 で述べた直交補空間 $W^{\perp}$ は補空間の特殊な例である.

演 習 問 題

9.4.4 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ を V の基とする. 最初の r 個 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ で生成される部分空間を W とすると, 残りの $\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ で生成される部分空間 W' は W の補空間であることを示せ.

9.5 冪等行列 (射影行列), 射影子, 冪零行列

前節で学んだ直和の概念に関連する事柄として, ここで, 冪等行列といふものについて述べておく. n 次元 vector 空間 V が 2 つの部分空間 W_1, W_2 の直和であるとする：

$$V = W_1 \oplus W_2.$$

$\boldsymbol{v} \in V$ が $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$, $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$ と分解されるとき, $\boldsymbol{v}$ にその W_1 成分と呼ぶべき $\boldsymbol{w}_1$ を対応させる写像 $T : V \to W_1 \subset V$, $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{w}_1$ は V の線形変換である（確かめよ）. これは <u>射影子</u> と呼ばれる. このとき $T^2 = T$ である. 実際, $\boldsymbol{w}_1$ の W_1 成分は $\boldsymbol{w}_1$ 自身なのだから, $T^2(\boldsymbol{v}) = T(T(\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{w}_1) = \boldsymbol{w}_1 = T(\boldsymbol{v})$. 定義から直ちに

$$\boldsymbol{v} \in W_1 \iff T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v},$$
$$\boldsymbol{v} \in W_2 \iff (I - T)(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \iff T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$$

であることもわかる.

定義 9.5.1 一般に線形変換 T が $T^2 = T$ を満たすとき, T は <u>冪等変換</u>（べきとう）と呼ばれる.
また, ある $m \in \mathbb{N}$ が存在して $T^m = O$ となるとき, T は <u>冪零変換</u>（べきれい）と呼ばれる.

いま T を冪等変換として, $\dim(V) = n$, $\dim(W_1) = r$ とし, W_1 の基を $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\}$, W_2 の基を $\{\boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ とすれば, これらの和集合が V の基となる. $T\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{r} c_i \boldsymbol{u}_i$ であるから, この基に関する表現行列を A, つまり,

$$\big(T(\boldsymbol{u}_1), \cdots, T(\boldsymbol{u}_r), T(\boldsymbol{u}_{r+1}), \cdots, T(\boldsymbol{u}_n)\big) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{u}_n)A$$

とすれば

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ 1 が } r \text{ 個並ぶ }) \tag{9.5.2}$$

となり, $A^2 = A$ である.

定義 9.5.3 一般に $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ が $A^2 = A$ を満たすとき, A は <u>冪等行列</u>（べきとう）または <u>射影行列</u> と呼ばれる.

また, 上の状況で, 写像 $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{w}_2$ の表現行列は, 先の A を使つて $I - A$ となり,

$$(I - A)^2 = I - A, \quad A(I - A) = (I - A)A = O$$

が成り立つことが簡単に確かめられる.

次に冪零行列について述べておく.

定義 9.5.4 正方行列 A について, ある $m \in \mathbb{N}$ が存在して $A^m = O$ となるとき, A は <u>冪零行列</u> と称される.

問 9.5.5 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ & 0 & 2 \\ & & 0 \end{bmatrix}$ と任意の 3 次正則行列 P について $P^{-1}AP$ が冪零行列であることを示せ.

命題 9.5.6 線形変換 T のある基に関する表現行列を A とせよ. 次の 4 つは同値である.
(1) T は冪零変換.
(2) A は冪零行列.
(3) T の固有値は 0 のみである.
(4) A の固有値は 0 のみである.

証明 (1) $\Leftrightarrow$ (2). $\ell \in \mathbb{N}$ について T^ℓ の表現行列は A^ℓ であるから明らか.
(3) $\Leftrightarrow$ (4) は 6.6.2 からわかる.
(1) $\Rightarrow$ (3). λ を T の固有値とし, $T(\boldsymbol{u}) = \lambda\boldsymbol{u}$ なる $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ を採れ. いま, ある $k \in \mathbb{N}$ があつて $T^k = O$ であるから, $\boldsymbol{0} = T^k(\boldsymbol{u}) = \lambda^k\boldsymbol{u}$. ゆゑに $\lambda = 0$ でなければならない.
(4) $\Rightarrow$ (2). A の次数を n とする. 仮定より $\varphi_A(t) = t^n$. 6.5.8 (C-H) より $A^n = O$. つまり, A は冪零行列である. □

演 習 問 題

9.5.7 Vector 空間 V の冪等変換 T が与へられたとき

$$W_1 = \{\, \boldsymbol{u} \in V \,|\, T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u} \,\}, \quad W_2 = \{\, \boldsymbol{u} \in V \,|\, T(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0} \,\}$$

とおくと, $W_1 = T(V)$, $W_2 = (I - T)(V)$, $V = W_1 \oplus W_2$ が成り立つ. これらを示せ.

9.5.8 A を n 次冪等行列とする. n 次正則行列 P が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

となることを示せ. このことから $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{rank}(A)$ であることがわかる.
(Hint : 9.5.7 の記号で W_1 と W_2 の基（列 vectors）を別々に取り, それを並べた行列を P としたとき, $P^{-1}AP$ が上の形になることを示せば良い. 最後の部分は 6.7.15 によりわかる.)

9.5.9 $f : \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K}) \longrightarrow \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ は, 任意の $X, Y \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$, 任意の $c \in \mathbf{K}$ について

$$f(X + Y) = f(X) + f(Y), \quad f(cX) = cf(X), \quad f(XY) = f(X)f(Y)$$

を満たすとする. (このことを, f は $\mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ の環としての 自己準同型 である, といふ.)
このとき, $P \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{K})$ が存在して, 任意の $X \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ に対して

$$f(X) = P^{-1}XP$$

となることを証明せよ.
(Hint : (i, j) 成分が 1 でそれ以外の成分がすべて 0 である行列 I_{ij} について $f(I_{ij})$ を考察せよ.)

9.5.10 可換な 2 つの冪零行列の scalar 倍, 和, 積のどれも, 冪零行列である. これを示せ.

9.5.11 対角化可能な冪零行列は零行列のみであることを示せ.

第10章 Jordan 標準形

10.1 準固有空間

対角化できない行列に対しても, 対角行列に近い形の標準形が, いろいろ知られてゐるが, その代表的なものである Jordan 標準形について述べる. そのために, 固有空間の概念を拡張しておく必要がある. この節を通して, すべての vector 空間は $\mathbf{K}=\mathbb{C}$ 上のものに限られる.

定義 10.1.1 線形変換 T の相異なる固有値の全体を $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ とし, その固有多項式を
$$\varphi_T(t)=\prod_{i=1}^{r}(t-\alpha_i)^{n_i}$$
とする. このとき, 各 i について n_i を α_i の 重複度 と呼ぶ. 正方行列 A についても同様で, A の相異なる固有値の全体を $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ として, その固有多項式が
$$\varphi_A(t)=\prod_{i=1}^{r}(t-\alpha_i)^{n_i}$$
であるとき, 各 i について n_i を α_i の 重複度 と呼ぶ.

定義 10.1.2 T を V の線形変換とする. I は今までの通り恒等写像を表すものとする. T の固有値 λ に対し
$$\widetilde{W}(\lambda, T)=\{\,\boldsymbol{u}\in V \mid (T-\lambda I)^{\ell}\boldsymbol{u}=\mathbf{0}\ (\exists \ell\in\mathbb{N})\,\}$$
とおく. これを T の λ に関する 準固有空間 と呼ぶ. 正方行列 A についても
$$\widetilde{W}(\lambda, A)=\widetilde{W}(\lambda, T_A)$$
と記して A の 準固有空間 と呼ぶ.

問 10.1.3 $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{bmatrix}$で定められる線形変換 $T_A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $T_A(\boldsymbol{u})=A\boldsymbol{u}$ に対し, T_A の固有値は 3 のみであることを確かめた上で, $W(3, T_A)$ および $\widetilde{W}(3, T_A)$ を求めよ.

注意 10.1.4 (1) 10.1.2 の状況の下で, 明らかに $W(\alpha_i, T)$ は $\widetilde{W}(\alpha_i, T)$ の部分空間である.
(2) 次の 10.1.5 (3) と 6.7.8 の証明から, 線形変換 T の表現行列が対角化できる場合は,
$$W(\alpha_i, T)=\widetilde{W}(\alpha_i, T)$$
となる.

定理 10.1.5　V の線形変換 T の相異なる固有値の全体を $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ とする．次が成り立つ．
(1) 各 i について, T により $\widetilde{W}(\alpha_i, T)$ は それ自身へ写像される．
(2) V はこれらの直和に分解される：
$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} \widetilde{W}(\alpha_i, T).$$
(3) α_i の重複度を n_i とすれば
$$\dim \widetilde{W}(\alpha_i, T) = n_i.$$

証明　(1) の証明．$m \in \mathbb{N}$ について, T と $(T - \alpha_i I)^m$ は可換であるから, $\boldsymbol{u} \in \widetilde{W}(\alpha_i, T)$ ならば, ある $m \in \mathbb{N}$ について $(T - \alpha_i I)^m(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ であり,
$$(T - \alpha_i I)^m\bigl(T(\boldsymbol{u})\bigr) = T\bigl((T - \alpha_i I)^m(\boldsymbol{u})\bigr) = T(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}.$$
よつて $T(\boldsymbol{u}) \in \widetilde{W}(\alpha_i, T)$.
(2) の証明．T の固有多項式 $\varphi_T(t) = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(t - \alpha_i)^{n_i}$ の因子として $f_i(t)$ を次の様に定める：
$$f_i(t) = \prod_{j \neq i}^{r}(t - \alpha_j)^{n_j}.$$
$f_1, \cdots, f_r$ は共通の因子を持たないから 9.2.5 より多項式 $g_1, \cdots, g_r \in \mathbf{K}[t]$ が存在して
$$1 = g_1(t)f_1(t) + g_2(t)f_2(t) + \cdots + g_r(t)f_r(t) \tag{10.1.6}$$
となる．$T_i = g_i(T)f_i(T)$ とおくと
$$I = T_1 + T_2 + \cdots + T_r \tag{10.1.7}$$
が成り立つ．この T_i は 9.1.6 の 2 つの条件を満たす．まづ, 条件 (1) は (10.1.7) に他ならない．また, 条件 (2) $T_iT_j = O$ $(i \neq j)$ に関しては, $g_i(t)f_i(t)$ と $g_j(t)f_j(t)$ の積が $\varphi_T(t)$ で割り切れることと 6.5.8 (C-H 定理) とからわかる．以上から
$$V = T_1(V) \oplus T_2(V) \oplus \cdots \oplus T_r(V)$$
が成り立つ．よつて (2) を示すには
$$T_i(V) = \widetilde{W}(\lambda_i, T) \tag{10.1.8}$$
であることを示せばよい．
任意の $\boldsymbol{w} = T_i(\boldsymbol{v}) \in T_i(V)$ $(\boldsymbol{v} \in V)$ をとると,
$$(T - \alpha_i I)^{n_i}(\boldsymbol{w}) = (T - \alpha_i I)^{n_i}T_i(\boldsymbol{v}) = (T - \alpha_i I)^{n_i}g_i(T)f_i(T)(\boldsymbol{v}) = g_i(T)f_i(T)(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$$
となる．よつて $\boldsymbol{w} \in \widetilde{W}(\alpha_i, T)$ であり, $T_i(V) \subset \widetilde{W}(\alpha_i, T)$ がわかつた．
次に逆の包含関係を示さう．$\gcd\bigl(t - \alpha_i,\ g_i(t)f_i(t)\bigr) = 1$ であるから 9.2.5 を用ゐれば, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し, 多項式 $p(t), q(t)$ が存在して　$p(t)(t - \alpha_i)^m + q(t)g_i(t)f_i(t) = 1$　となるから,
$$p(T)(T - \alpha_i I)^m + q(T)T_i(T) = I \tag{10.1.9}$$
である．いま m を十分大にとり, 任意に $\boldsymbol{w} \in \widetilde{W}(\alpha_i, T)$ をとれば,
$$p(T)(T - \alpha_i I)^m(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0} \tag{10.1.10}$$
である．また $q(T)$ と $T_i = g_i(T)f_i(T)$ は可換ゆゑ, $\boldsymbol{w}$ を (10.1.9) の両辺で写し, (10.1.10) を使

ふと

$$\boldsymbol{w} = q(T)T_i(T)(\boldsymbol{w}) = T_i\big(q(T)(\boldsymbol{w})\big) \in T_i(V)$$

である. よつて $\widetilde{W}(\lambda_i, T) \subset T_i(V)$. 以上で $T_i(V) = \widetilde{W}(\lambda_i, T)$ が示された.

(3) の証明. $W_i = \widetilde{W}(\alpha_i, T), \dim W_i = {n_i}'$ とおく. $W_1, \cdots, W_s$ の基を選ぶとき, これらを並べたものは 9.1.3 により V の基になる. W_i が T に関して不変なので, この基に関する T の表現行列 A は,

$$A = A^{(1)} \oplus \cdots \oplus A^{(s)} \quad (\text{ 記号は 9.4.2 をみよ })$$

の形になる. ここに $A^{(i)}$ は, いま選んだ W_i の基に関し, T を W_i に制限した線形変換を表現する ${n_i}'$ 次正方行列である. W_i の次元は有限であるから, 準固有空間の定義より $N_i = A^{(i)} - \alpha_i I_{{n_i}'}$ は冪零行列でなければならず, 9.5.6 から, その固有値は 0 のみであり,

$$\varphi_{N_i}(t) = |tI_{{n_i}'} - (A^{(i)} - \alpha_i I_{{n_i}'})| = t^{{n_i}'}$$

となる. ここで t を $t - \alpha_i$ に置き変へて $\varphi_{A^{(i)}}(t) = |tI_{{n_i}'} - A^{(i)}| = (t - \alpha_i)^{{n_i}'}$ がわかり,

$$\varphi_T(t) = \varphi_A(t) = |tI - A| = \prod_i f_{A^{(i)}}(t) = \prod_i (t - \alpha_i)^{{n_i}'}.$$

これにより $n_i = {n_i}'$ でなければならない. □

注意 10.1.11 ここでは 10.1.5 の証明中で用いた記号を使ふ. 任意に $\boldsymbol{v} \in V$ をとれば, 一意的に

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \cdots + \boldsymbol{w}_r, \quad \boldsymbol{w}_i \in \widetilde{W}(\alpha_i, T)$$

と分解される. 一方, $f_j(t)$ の定義と 10.1.5 (3) の証明とから $j \neq i$ のとき, $g_j(A^{(i)})f_j(A^{(i)}) = O$ である. ゆゑに (10.1.6) から $I_{n_i} = g_i(A^{(i)})f_i(A^{(i)})$ を得る. $T_i = g_j(T)f_j(T)$ であつたから, これらは $T_i(\boldsymbol{w}_j) = \delta_{ij}\boldsymbol{w}_i$ を意味し,

$$T_i(\boldsymbol{v}) = T_i(\boldsymbol{w}_1 + \cdots \boldsymbol{w}_i + \cdots + \boldsymbol{w}_s) = T_i(\boldsymbol{w}_1) + \cdots + T_i(\boldsymbol{w}_i) + \cdots + T_i(\boldsymbol{w}_s) = \boldsymbol{w}_i,$$

$$g_j(T)f_j(T)(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}_j. \tag{10.1.12}$$

を得る. つまり $g_j(T)f_j(T)$ は V から $\widetilde{W}(\alpha_i, T)$ への射影子 (11.2.2) に他ならない.

命題 10.1.13 λ を線形変換 T の固有値とし, その重複度を m とすると

$$\widetilde{W}(\lambda, T) = \{\, \boldsymbol{u} \,|\, (T - \lambda I)^m(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0} \,\}.$$

証明 10.1.11 の記号で $\lambda = \alpha_j$ であるとし, $g_j(t) = g(t)$, $f_j(t) = f(t)$ と書くことにする. 主張を示すには左辺が右辺に含まれることを示せばよい. $(t - \lambda)^m f(t) \,\big|\, \varphi_T(t)$ だから C-H 定理 6.5.8 により, $(T - \lambda I)^m f(T) = O$ である. このとき, 任意の $\boldsymbol{w} \in \widetilde{W}(\lambda, T)$ に対し, 10.1.12 で $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ ととれば

$$(T - \lambda I)^m(\boldsymbol{w}) = (T - \lambda I)^m g(T)f(T)(\boldsymbol{w}) = g(T)(T - \lambda I)^m f(T)(\boldsymbol{w}) = g(T)O(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{0}.$$

よつて $\boldsymbol{w} \in \{\, \boldsymbol{u} \,|\, (T - \lambda I)^m(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0} \,\}$ である. □

演 習 問 題

10.1.14 以下に与へられる $\mathbb{C}^4$ の線形変換 T_A について, 次の問に答へよ :

$$T_A : \boldsymbol{x} \longmapsto A\boldsymbol{x}, \quad \text{但し} \quad A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & 4 & 3 & -3 \\ -9 & 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(1) T_A の固有値とそのそれぞれの重複度を求めよ.

(2) それぞれの固有値 λ に対し, 準固有空間 $\widetilde{W}(\lambda, T_A)$ を求めよ.

(Hint : 10.1.5 の証明中の (10.1.8) あるいは 10.1.13 を用いよ.)

(略解 : $\varphi_A(t) = (t-2)^2(t-3)^2$ から (1) はわかる. (2) は

$$\widetilde{W}(2, T_A) = \left\{ a \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle|\, a,\ b \in \mathbb{C} \right\}, \ \widetilde{W}(3, T_A) = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle|\, a,\ b \in \mathbb{C} \right\}.$$)

10.2 Jordan 標準形

対角化できない行列も含めた標準形として Jordan 行列と呼ばれるものを考へる.

定義 10.2.1 $n \in \mathbb{N}$ と $\lambda \in \mathbf{K}$ に対し, 正方行列

$$\left.\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{bmatrix}\right\} n$$

を Jordan 細胞 と呼んで $J(\lambda, n)$ で表す.

例 10.2.2 次の行列はどれも Jordan 細胞である :

$$J(2,3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad J(-5,3) = \begin{bmatrix} -5 & 1 & \\ & -5 & 1 \\ & & -5 \end{bmatrix}, \quad J(0,4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}.$$

定義 10.2.3 いくつかの Jordan 細胞の直和で表される正方行列を Jordan 行列 と呼ぶ. 線形変換 T の適当な基に関しての表現行列が Jordan 行列 J であるとき, J は T の Jordan 標準形 である, といふ.

例 10.2.4 Jordan 行列の例 :

$$J(2,3) \oplus J(5,2) \oplus J(-1,1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 5 & 1 & \\ & & & & 5 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}.$$

定理 10.2.5 V の基を適当にとれば, V の冪零変換 N の表現行列 A は次の形になる

(10.2.6) $$A = J(0, n_1) \oplus J(0, n_2) \oplus \cdots \oplus J(0, n_r) \quad (\text{Jordan 行列}).$$

ここで, $n_1 \geq \cdots \geq n_r$ なる条件を追加すれば, 上の行列は一意的に定まる.

証明 N は冪零変換で, $N^{\nu-1} \neq O$, $N^{\nu} = O$ とする.

$$W^{(i)} = \{\boldsymbol{u} \in V \mid N^i \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}\}$$

とおけば,

$$V = W^{(\nu)} \supset W^{(\nu-1)} \supset \cdots \supset W^{(1)} \supset \{\boldsymbol{0}\}.$$

いま $\dim W^{(i)} = m_i$, $m_i - m_{i-1} = r_i$ $(1 \leq i \leq \nu)$, $m_0 = 0$ とおく. $W^{(\nu-1)}$ の任意の基に r_ν 個の vectors $\boldsymbol{a}_1, \cdots \boldsymbol{a}_{r_\nu}$ を付け加へて $W^{(\nu)}$ の基になる様にすれば

(10.2.7) $$W^{(\nu)} = \langle \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_\nu} \rangle \oplus W^{(\nu-1)}.$$

そのとき, $N\boldsymbol{a}_1, \cdots, N\boldsymbol{a}_{r_\nu} \in W^{(\nu-1)}$ であるが, これらの vectors は 1 次独立で, かつ

$$\langle N\boldsymbol{a}_1, \cdots, N\boldsymbol{a}_{r_\nu} \rangle \cap W^{(\nu-2)} = \{\boldsymbol{0}\}$$

となる. 実際 $c_1 N\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{r_\nu} N\boldsymbol{a}_{r_\nu} \in W^{(\nu-2)}$ とすれば,

$$N^{\nu-2}(c_1 N\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{r_\nu} N\boldsymbol{a}_{r_\nu}) = N^{\nu-1}(c_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{r_\nu} \boldsymbol{a}_{r_\nu}) = \boldsymbol{0}.$$

よつて, $c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_{r_\nu}\boldsymbol{a}_{r_\nu} \in W^{(\nu-1)}$. しかるに (10.2.7) から $\langle \boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_\nu} \rangle \cap W^{(\nu-1)} = \{\boldsymbol{0}\}$. ゆ

ゑに, $c_1 = \cdots = c_{r_\nu} = 0$. 以上から $r_\nu \le r_{\nu-1}$ もわかる. 従つて $r_{\nu-1} - r_\nu$ 個の vectors $\boldsymbol{a}_{r_\nu+1}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_{r_{\nu-1}}$ が存在して, $W^{(\nu-2)}$ の基に $N\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $N\boldsymbol{a}_{r_\nu}$, $\boldsymbol{a}_{r_\nu+1}$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_{r_{\nu-1}}$ を付け加へたものが $W^{(\nu-1)}$ の基になる. すなはち

$$W^{(\nu-1)} = \langle N\boldsymbol{a}_1, \cdots, N\boldsymbol{a}_{r_\nu}, \boldsymbol{a}_{r_\nu+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_{\nu-1}} \rangle \oplus W^{(\nu-2)}. \tag{10.2.8}$$

従つて, 上と同様にして

$$N^2\boldsymbol{a}_1,\ \cdots,\ N^2\boldsymbol{a}_\nu,\ N^2\boldsymbol{a}_{r_\nu+1},\ \cdots,\ N\boldsymbol{a}_{r_{\nu-1}} \in W^{(\nu-2)}$$

は 1 次独立であり, かつ,

$$\langle N^2\boldsymbol{a}_1, \cdots, N^2\boldsymbol{a}_{r_\nu}, N\boldsymbol{a}_{r_\nu+1}, \cdots, N\boldsymbol{a}_{r_\mu-1} \rangle \cap W^{(\nu-3)} = \{\boldsymbol{0}\}$$

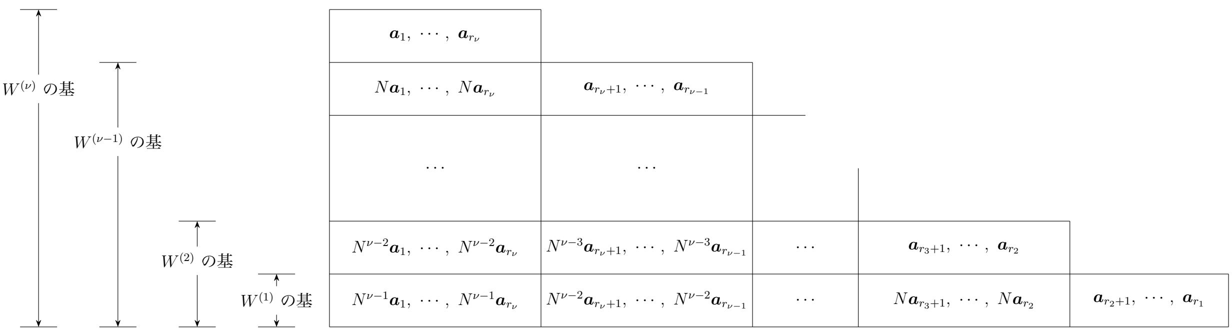
であることがわかる. よつて $r_{\nu-1} \le r_{\nu-2}$. 以下同様にして $r_\nu \le r_{\nu-1} \le \cdots \le r_1$ で, vectors $\boldsymbol{a}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{a}_{r_1}$ を適当に選べば

$$W^{(i)} = \langle N^{\nu-i}\boldsymbol{a}_{r_{i+1}+1}, \cdots, N^{\nu-i}\boldsymbol{a}_{r_\nu}, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_{i+1}+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{r_i} \rangle \oplus W^{(i-1)} \tag{10.2.9}$$

となることが証明される. これらの vectors の全体

$$\bigcup_{1 \le i \le \nu} \{\, N^j(\boldsymbol{a}_k) \,|\, 0 \le j \le \nu - i,\ r_\nu + 1 \le k \le r_{\nu-1} \,\}$$

は, 9.1.3 と 10.1.5(2) により, V の基を与へる.



さて $r_{i+1} + 1 \le j \le r_i$ に対し $\langle \boldsymbol{a}_j, N\boldsymbol{a}_j, \cdots, N^{i-1}\boldsymbol{a}_j \rangle$ は明らかに N で安定な部分空間である. この基の順序を逆にしたものに関して N を行列で表現してみると

$$N(N^{i-1}\boldsymbol{a}_j, N^{i-2}\boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_j) = (N^{i-1}\boldsymbol{a}_j, N^{i-2}\boldsymbol{a}_j, \cdots, \boldsymbol{a}_j) \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

となる. 従つて上の図に並んだ vectors のうち最左列にあるもの（ν 個）を下から上の順に並べ, その次に, 第 2 列にあるものを下から上の順で並べ, これを最右列まで行なつて得られた vectors の組を基とすれば, 対応する表現行列 A は所望の形になる. このとき, 得られた Jordan 行列は, 定理の主張の中の条件 $n_1 \ge \cdots \ge n_r$ を満たしてゐる.

（一意性）いま, N が V のある基に関して別の Jordan 行列を表現行列に持つとせよ. (記号を節約して) それを (10.2.6) の右辺の形であるとせよ. ここで $n_1 \ge \cdots \ge n_r$ であるとする. このとき, その基をなす vectors のそれぞれが N により写る様子を見れば, これまでに現れた ν, r_i, m_i 等がすべて, (10.2.6) の右辺, 特に n_1, $\cdots$, n_r のみから定まることがわかる. 例へば $\nu = n_1$ であり, r_ν は n_1 と等しい n_i の個数に一致する. しかるに, それらの値はどれも N のみから定められたものであるから, (10.2.6) の様な表示は一意的でなければならない. □

補題 10.2.10 線形変換 T の相異なる固有値のすべてからなる集合を $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ とする．各 i について T を $\widetilde{W}(\lambda_i, T)$ の線形変換と見做したものを T_i とする．また I_i を $\widetilde{W}(\lambda_i, T)$ の単位変換 (恒等写像) とする．このとき $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_r$ であつて

$$T - (\lambda_1 I_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_r I_r)$$

は冪零変換である．

証明 前半は 10.1.5 に他ならない．準固有空間の定義から $T_i - \lambda_i I_i$ は $\widetilde{W}(\lambda_i, T)$ の冪零変換で,

$$\begin{aligned} T - (\lambda_1 I_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_r I_r) &= (T_1 \oplus \cdots \oplus T_r) - (\lambda_1 I_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_r I_r) \\ &= (T_1 - \lambda_1 I_1) \oplus \cdots \oplus (T_r - \lambda_r I_r) \end{aligned}$$

となつてゐるから, 結論を得る． □

定理 10.2.11 V の線形変換 T の相異なる固有値のすべてを $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ とする．T は適当な基に関して次の形の行列により, 直和の順序を無視すれば一意的に, 表現される

$$A = \underbrace{J(\lambda_1, n_{11}) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_1, n_{1m_1})}_{\text{固有値が } \lambda_1} \oplus \cdots \oplus \underbrace{J(\lambda_r, n_{r1}) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_r, n_{rm_r})}_{\text{固有値が } \lambda_r}.$$

また T の最小多項式は $N_i = \max\{n_{ij} \,|\, 1 \le j \le r\}$ として, 次式で与へられる：

$$\mu_T(t) = \prod_{i=1}^{r} (t - \lambda_i)^{N_i}.$$

証明 10.2.10 の証明により, V の直和分解 $V = \bigoplus_{i=1}^{r} \widetilde{W}(\lambda_i, T)$ に応じて,

$$T - (\,\lambda_1 I_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_r I_r\,) = \bigoplus_{i=1}^{r} (T_i - \lambda_i I_i) \qquad (\,\text{ここに } I_i \text{ は } \widetilde{W}(\lambda_i, T) \text{ の単位変換}\,)$$

であり，この直和因子のそれぞれが冪零変換であるから，10.2.5 により，適当な基に関して $T - (\,\lambda_1 I_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_r I_r\,)$ の表現行列は $J(0, n_{i1}) \oplus \cdots \oplus J(0, n_{im_i})$ の形で表される．ゆゑに $T_i = \lambda_i I_i + (T_i - \lambda_i I_i)$ の表現行列は, I_k を k 次単位行列として,

$$\begin{aligned} \lambda_i I + \big(J(0, n_{i1}) \oplus \cdots \oplus J(0, n_{im_i})\big) &= \big(\lambda_i I_{n_{i1}} + J(0, n_{i1})\big) \oplus \cdots \oplus \big(\lambda_i I_{n_{im_i}} + J(0, n_{im_i})\big) \\ &= J(\lambda_i, n_{i1}) \oplus \cdots \oplus J(\lambda_i, n_{im_i}) \end{aligned}$$

と相似になる．これから所望の主張が従ふ．一意性は 10.2.5 の一意性からの帰結である． □

定義 10.2.12 10.2.11 の一意性に鑑み, 線形変換 T の表現行列 が Jordan 行列 B に相似であれば, B を T の <u>Jordan 標準形</u> と称する．また正方行列 A について T_A の Jordan 標準形が B のとき, B を A の <u>Jordan 標準形</u> と称する．

最後に 10.2.11 を行列の言葉で述べておく．

定理 10.2.13 (1) 任意の正方行列 A はある Jordan 行列 B と相似である．しかも, Jordan 細胞の順序を無視すれば B は一意的に定まる．
(2) $\mu_A(t) = \mu_{T_A}(t)$ (9.2.10 を見よ) であり, それは Jordan 標準形を構成する Jordan 細胞の様子から 10.2.11 の様に与へられる．

定義 10.2.14　正方行列 A が対角化可能であるとき A は <u>半単純行列</u> であるといはれる.

補題 10.2.15　任意の行列 A は次の様な和に一意的に表される.

(10.2.16)　$$A = S + N,\quad S \text{ は半単純行列}, N \text{ は冪零行列}, SN = NS.$$

このとき, S, N は A の $\mathbf{K}$ 係数多項式として表される.

証明　いま A の異る固有値の全体を $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ とし,

$$\varphi_A(t) = \prod_{i=1}^{r}(t-\alpha_i)^{n_i}, \quad f_i(t) = \prod_{j\neq i}(t-\alpha_j)^{n_j}$$

とおく. このとき 10.1.5 の証明と同様に

$$1 = \sum_{i}^{r} g_i(t) f_i(t)$$

となる $g_i(t) \in \mathbf{K}[t]$ が存在する. いま,

$$S = \sum_i \alpha_i g_i(A) f_i(A) \quad (\text{ これは } A \text{ の } \mathbf{K} \text{ 係数多項式である })$$

とおき, $\widetilde{W}(\alpha_1, A), \cdots, \widetilde{W}(\alpha_r, A)$ のそれぞれの基 (列 vectors) を取り, それらを順に並べてできる正方行列を P とすれば $A_j \in \mathrm{Mat}(n_j, \mathbf{K})$ が存在して

$$AP = P\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{bmatrix} \text{ と書け, また (10.1.12) から } SP = P\begin{bmatrix} \alpha_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_s I_{n_s} \end{bmatrix}$$

となることがわかる. つまり $B = P^{-1}SP$ が対角行列となる. よつて S は半単純である. また $N = A - S$ とおけば

$$P^{-1}NP = P^{-1}AP - B = \begin{bmatrix} N_1 & & & \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_s \end{bmatrix}, \quad N_j = A_j - \alpha_j I_{n_j}.$$

各 N_i が冪零であるから, N も冪零である. 次に一意性を証明する. $A = S + N = S' + N'$ と 2 通りに分解されたとせよ. 仮定により $S'N' = N'S'$ であるから, S' と N' は A と可換であり, さらに A の多項式である S や N とも可換である. 9.3.6 より S と S' は同時に対角化されるから $S - S'$ は半単純であり, 9.5.10 により $N - N'$ は冪零行列である. いま $S - S' = N' - N$ であるから 9.5.11 により $S - S' = N' - N = O$, 即ち $S' = S$, $N' = N$ でなければならない.　□

演 習 問 題

10.2.17　上の 10.2.16 において, A の Jordan 標準形を J とし, $J = P^{-1}AP$ なる正則行列 P を取り, さらに J の対角成分の 1 つ上の 1 を（存在すれば）すべて 0 に置き換へてできる対角行列を B とするとき,

$$S = PBP^{-1}, \quad N = P(J-B)P^{-1}$$

である. これを示せ.

10.3 例

実際に Jordan 標準形を求めてみる. 固有多項式が重根を持たない場合はすでに 6.7.8 等で説明したから, ここでは, 専ら重根を持つ場合を取り挙げる. 計算では 10.2.5 の証明を辿ればよく, すべての固有値 λ について $W^{(1)}$, $W^{(2)}$, $\cdots$ のすべてを求めることによる. 以下, 便宜のために, 正方行列 A とその固有値 λ, および $i = 0, 1, \cdots$ について

$$W^{(i)}(\lambda) = W^{(i)}(\lambda, A) = \{\, \boldsymbol{u} \in V \mid (A - \lambda I)^i \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \,\}$$

と記すことにする.

例題 10.3.1 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ の Jordan 標準形を求めよ.

解 まづ, 固有多項式を求め, $\varphi_A(t) = (t-2)^2(t-3)$ を得る. さらに

$$W^{(2)}(2) = \left\{ a\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle|\, a,\ b \in \mathbb{C} \right\}, \quad W^{(1)}(2) = \left\{ a\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle|\, a \in \mathbb{C} \right\},$$

$$W^{(1)}(3) = \left\{ c\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \middle|\, c \in \mathbb{C} \right\}.$$

であるから [1], 10.2.5 の証明に従つて

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (A-2)\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ととり,

$$P = \big[\, (A-2I)\,\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{b}_1 \,\big] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

を得る.

例題 10.3.2 行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ の Jordan 標準形を求めよ.

解 固有多項式は $\varphi_A(t) = (t-2)^3$ であり,

$$W^{(2)}(2) = \left\{ a\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \middle|\, a,\ b \in \mathbb{C} \right\}, \quad W^{(1)}(2) = \left\{ a\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle|\, a \in \mathbb{C} \right\}$$

である. ここで $(A-2I)^2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \boldsymbol{0}$ あるから

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (A-2I)\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad (A-2I)^2\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \big[\, (A-2I)^2\,\boldsymbol{a}_1 \ \ (A-2I)\,\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_1 \,\big] = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

を得る.

[1] $W^{(2)}(2, A)$ を求めるには, 互除法により Bezout 等式 $1 \cdot (t-2)^2 + (-t+1)(t-3) = 1$ を得て, それを利用してもよい.

例題 10.3.3 行列 $A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & -2 \\ -3 & -3 & 2 \\ -3 & -5 & 4 \end{bmatrix}$ の Jordan 標準形を求めよ.

解 この場合も $\varphi_A(t) = (t-2)^3$ であるが,

$$W^{(1)}(2) = \left\{ a\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \middle| a,\ b \in \mathbb{C} \right\}$$

が 2 次元だから $W^{(2)}(2) = W^{(3)}(2) = \mathbb{C}^3$ となる. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \notin W^{(2)}$ だから, これを $\boldsymbol{a}_1$ として,

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ (A-2I)\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}\left(= \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right).$$

これらの 1 次結合では表せない vector として $\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ を選んで

$$P = \big[\,(A-2I)\,\boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_1 \ \ \boldsymbol{a}_2\,\big], \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

を得る.

これらの例から, 固有多項式 $\varphi_A(t)$ が重根を持つ場合は, それだけから A の Jordan 標準形を決定することはできないことがわかる.

問 10.3.4 (Frobenius の定理) 行列 $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbf{K})$ の固有値の全体を, 重複を許して $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とすると, 多項式 $f(t) \in \mathbf{K}[t]$ に対し, $f(A)$ の固有値は $f(\alpha_1), \cdots, f(\alpha_n)$ であることを示せ.

例題 10.3.5 A は正方行列で $t \in \mathbb{C}$ とする. このとき, 形式的な冪級数として

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{tr}(A^j)\frac{t^j}{n}\right) = \det(I - tA)$$

が成り立つことを示せ. 但し $\exp(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}$ である.

解 A の固有値を $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$, Jordan 標準形を J とすれば, $\mathrm{tr}(A^j) = \mathrm{tr}(J^j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^j$ となることが 6.7.15 と 10.3.4 によつてわかる. よつて

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} {\alpha_i}^j \frac{t^j}{n}\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} {\alpha_i}^n \frac{t^j}{n}\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\alpha_i t)^j}{n}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \log(1-\alpha_i t)\right) = \exp\left(\log\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i t)\right) \\ &= \det(I - tJ) = \det(I - tA)\end{aligned}$$

となり証明される. ここで $\log(1-t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j}$ と定めたが, 形式的冪級数しての等式 $\exp\big(\log(1-t)\big) = 1 - t$ を示すのは意外と面倒である [2].

[2] 荒川・伊吹山・金子 共著 : ベルヌーイ数とゼータ関数, 牧野書店 (2001 年) の pp.32–33 を参照.

演 習 問 題

10.3.6 次の行列 A に対し, 正則行列 P を与へて $B = P^{-1}AP$ を Jordan 標準形とせよ :

(1) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$. $\left(答例 : P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \right)$

(2) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ -10 & 12 & 9 & -5 \\ 11 & -11 & -9 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. $\left(答例: P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 \end{bmatrix} \right)$

(3) $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 4 & -2 \\ -8 & 10 & 7 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -5 & 5 & 5 & -3 \end{bmatrix}$. $\left(答例: P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 14 \\ 0 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 45 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & -1 \end{bmatrix} \right)$

10.3.7 正方行列 A に対し, 次の 2 つの条件は同値であることを示せ.

(1) $\mu_A(t) = \varphi_A(t)$.

(2) A の任意の固有値 λ に対し, A の Jordan 標準形には λ を固有値とする Jordan 細胞が唯 1 つだけ含まれる.

10.3.8 次の行列の最小多項式を記せ.

(1) $A = J(3,3) \oplus J(2,5)$.

(2) $B = J(3,2) \oplus J(3,5) \oplus J(3,5) \oplus J(2,5)$.

(3) $C = J(-2,1) \oplus J(-2,2) \oplus J(3,5) \oplus J(3,1)$.

10.4 Jordan 標準形についての留意点

簡単のため $c = \cos\theta$, $s = \sin\theta$ と記す.

$$\begin{bmatrix} c & c \\ s & -s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & c^2 \\ s^2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & c \\ s & -s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+sc & 0 \\ 0 & 2-sc \end{bmatrix}$$

は対角化の 1 例であるが, $\theta \to 0$ とすると, 左辺左端の行列の第 2 列の成分は発散し, 左辺右端の行列は非正則な行列に退化してしまふ. もとの行列は対角ができないものになり, Jordan 標準形

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix} \quad (固有値\ 2\ に関する\ \text{Jordan}\ 細胞)$$

になる. これの変換行列はもちろん単位行列である. この様に Jordan 標準形はもとの行列の変形に応じて連続的に得られるものではないため, 数値計算など, わずかの数値の違ひで対角化が可能になつたりならなかつたりする場合は, 非常に扱ひにくい. それでも, 線形代数の講義で扱はれる理由は, Lie 群論などで, 正方行列 A に対して $\exp A$ を計算する場合などに有効であるからである. 例へば

$$\exp\left(P^{-1} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} P \right) = P^{-1} \begin{bmatrix} e^a & e^a \\ 0 & e^a \end{bmatrix} P$$

などを示すのに使はれる.

10.5 微分方程式の解法への Jordan 標準形の応用

線形代数学の応用への道案内として, t の函数 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ に対する微分方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \tag{10.5.1}$$

を解法について, より進んだ数学の知識を仮定せずに, 考へ方のみ述べてみる. ここで

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

と書いて, (10.5.1) を

$$\frac{d}{dt}\,\boldsymbol{x}(t) = A\,\boldsymbol{x}(t)$$

と表す. 方針を簡単に書いておくので, 読者には細部を埋められたい. まづ, 1 つの函数に関する変数分離型の微分方程式の解法と同様に

$$\boldsymbol{x}(t) = \exp(tA)\,\boldsymbol{x}(0)$$

と求められる. 但し exp は行列の指数函数であつて極めて自然なものである. 一方, 10.3.1 で示した様に

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$$

により

$$A = PJP^{-1}$$

と書ける. このとき容易に $\exp(tA) = P^{-1}\exp(tJ)P$ であることがわかる. しかも Jordan 標準形 J については $\exp(tJ)$ の成分表示も容易にわかり, 最終的に

$$\boldsymbol{x}(t) = P\exp(tJ)P^{-1}\,\boldsymbol{x}(0) = P\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \\ & e^{2t} & \\ & & e^{3t} \end{bmatrix}P^{-1}\,\boldsymbol{x}(0)$$

なる綺麗な解が得られるのである. 線形微分方程式の一般論から解は, 初期値 $\boldsymbol{x}(0)$ を決めれば一意的であることが知られてゐる [3)] から, これが (10.5.1) の一般解である.

注意 10.5.2 一般に与へられた実正方行列 A を直交行列 P を見付けて, (あるいは次節で学ぶ様に, 複素正方行列を unitary 行列 P を見付けて) $P^{-1}AP$ が Jordan 標準形にできるか, といふ疑問が浮かぶであらう. しかし, これは一般には不可能である. ではどの様な標準形を考へるとうまくいくのか. それは重要な問題である. 興味を持つた読者は, 例へば
D.E. Littelwood : “On unitary equivalence”, J. London Math. Soc. 28 (1953) 314-322
などを眺められたい.

[3)] 例へば, 三宅敏恒著 : 「微分方程式のやさしい解き方」

第11章　Hermite 空間

この章では, $\mathbb{C}$ 上の vector 空間を扱ふ. そのために, まづは, Hermite 内積 [1] と呼ばれる計量を定義する. この内積により $\mathbb{R}$ 上で内積空間を考察したのと同様な扱ひが可能になる.

11.1　Hermite 内積

定義 11.1.1　複素数体 $\mathbb{C}$ 上の vector 空間 V の vectors $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ に対し, 複素数 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ を対応させる写像 $(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{C}$ が次の 4 つの条件をすべて満たすとき, この写像を V の Hermite 内積 と呼ぶ. 以下では $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{v}'$ は V の任意の vectors を表す.

H1　$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}', \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}', \boldsymbol{v})$,

H2　$(c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = c\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$,

H3　$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \overline{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}$　(ここで $\overline{}$ は複素共役を取ることを示す),

H4　$\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ ならば $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0$.

問 11.1.2　$\mathbb{C}$ 上の vector 空間の Hermite 内積 $(\ ,\ )$ について以下を示せ. 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{v}' \in V$, 任意の $c \in \mathbb{C}$ に対し

(1)　$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}')$,

(2)　$(\boldsymbol{u}, c\boldsymbol{v}) = \overline{c}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$　($\overline{c}$ は c の複素共役を表す),

(3)　$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v}) = 0$.

定義 11.1.3　(Hermite 空間)　Hermite 内積が定義された $\mathbb{C}$ 上の vector 空間を Hermite 空間 と称する. 以後, 特に断らない限り, この講義で扱ふ Hermite 空間の Hermite 内積は $(\ ,\ )$ で表すことにする.

例 11.1.4　$\mathbb{C}^n$ 上の任意の vectors　$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ に対して

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}} = a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n} \tag{11.1.5}$$

と定義すると, これは Hermite 内積になり, $\mathbb{C}^n$ は Hermite 空間になる. この内積を $\mathbb{C}^n$ の標準 Hermite 内積 と称する.

例 11.1.6　11.1.4 の空間において (11.1.5) を

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}} = a_1\overline{b_1} + 2a_2\overline{b_2} + \cdots + na_n\overline{b_n}$$

に置き換へても, $\mathbb{C}^n$ は Hermite 空間になる.

[1] Charles Hermite (1822-1901) France 生まれ.

定義 11.1.7 (Norm) Hermite 空間 V と $\boldsymbol{u} \in V$ に対し
$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})}$$
とおき, これを $\boldsymbol{u}$ の norm あるいは 長さ と呼ぶ.

命題 11.1.8 Hermite 空間 V の norm について, 次の 3 つが成り立つ. 但し, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$, $c \in \mathbb{C}$ は任意とする :

(1) $\|c\,\boldsymbol{u}\| = |c|\,\|\boldsymbol{u}\|$,

(2) $|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})| \leq \|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|$ (Cauchy-Schwartz の不等式),

(3) $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ (三角不等式).

証明 (1) と (3) は 7.1.6 と同様に示される.
(2) を示す. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ ならば, 正しい. $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ とする. 簡単な計算で
$$\left\| -\overline{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}\,\boldsymbol{u} + \|\boldsymbol{u}\|^2\,\boldsymbol{v} \right\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 \left(\|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 - |(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})|^2 \right)$$
がわかる. 左辺が正または 0 であり $\|\boldsymbol{u}\| \neq 0$ であるから, 所望の不等式を得る. □

以下 V は Hermite 内積 (,) が与へられた Hermite 空間とする. もちろん V は $\mathbb{C}$ 上の vector 空間とし, $\mathbb{R}$ 上の vector 空間としての構造は考へない. また $\mathbb{C}^n$ については, その Hermite 内積として標準 Hermite 内積のみを扱ふ.

定義 11.1.9 (1) $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ について $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ であることを
$$\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$$
と記し, $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ は 直交 するといふ.
(2) W_1 と W_2 を V の部分空間とせよ. もし, 任意の $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$ と任意の $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$ に関して $(\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2) = 0$ であるならば, W_1 と W_2 は 直交する といひ,
$$W_1 \perp W_2$$
と記す.
(3) W が V の部分空間のとき, 9.4.3 と同様に,
$$W^{\perp} = \{\, \boldsymbol{u} \in V \mid 任意の\ \boldsymbol{v} \in W\ について\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0 \}$$
と定義し, これを W の 直交補空間 と称する. もちろん $W \perp W^{\perp}$ である.

命題 11.1.10 $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$ $(\boldsymbol{u}_k \neq \boldsymbol{0},\ 1 \leq k \leq n)$ が 2 つづつ互ひに直交すれば, これらは $\mathbb{C}$ 上 1 次独立である.

証明 いま
$$a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots a_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{0}$$
であるとせよ. この両辺と $\boldsymbol{u}_j$ との内積を取れば
$$c_j\|\boldsymbol{u}_j\|^2 = 0$$
を得るが, $\boldsymbol{u}_j \neq \boldsymbol{0}$ より $\|\boldsymbol{u}_j\|^2 \neq 0$ ゆゑ, $c_j = 0$ となる. □

定義 11.1.11 (1) V の基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ が

$$(\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij} \quad (1 \leq i,\ j \leq n)$$

を満すとき, これらは <u>正規直交基</u> であるといはれる.

(2) Hermite 空間 $\mathbb{C}^n$ の基本 vectors からなる基 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ は標準 Hermite 内積に関して正規直交基である. これを $\mathbb{C}^n$ の <u>標準基</u> といふ.

内積空間の場合の 7.2.3 と同様にして, 次のことが成り立つ.

命題 11.1.12 (Gram-Schmidt の直交化) n 次元 Hermite 空間 V の 1 組の基を $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n\}$ とする. このとき V の正規直交基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ で, 任意の $1 \leq r \leq n$ について

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r \rangle_{\mathbb{C}}$$

となるものが存在する. 特に有限次元 Hermite 空間は正規直交基を持つ.

証明 証明は内積空間の場合と全く同様であるが, 以下に記す. まづ

$$\boldsymbol{u}_1 = \tfrac{1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}\boldsymbol{v}_1$$

とおくと, $\|\boldsymbol{u}_1\| = 1$ である. よつて $r = 1$ について主張は正しい. 次に ($n \geq 2$ のとき)

$$\boldsymbol{v'}_2 = \boldsymbol{v}_2 - (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1)\,\boldsymbol{u}_1, \quad \boldsymbol{u}_2 = \tfrac{1}{\|\boldsymbol{v'}_2\|}\boldsymbol{v'}_2$$

とおくと $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = 0$, $\|\boldsymbol{u}_2\| = 1$ であり,

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle_{\mathbb{C}}$$

であるので, $r = 2$ でも正しい. 一般に $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r$ $(1 \leq r < n)$ が求まつたとき

$$\boldsymbol{v'}_{r+1} = \boldsymbol{v}_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{v}_{r+1}, \boldsymbol{u}_i)\,\boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{u}_{r+1} = \tfrac{1}{\|\boldsymbol{v'}_{r+1}\|}\boldsymbol{v'}_{r+1}$$

とおく. $(\boldsymbol{v'}_{r+1}, \boldsymbol{u}_i) = 0$, $(1 \leq i \leq r)$ だから, $(\boldsymbol{u}_{r+1}, \boldsymbol{u}_i) = 0$ であり,

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_{r+1} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v}_{r+1} \rangle_{\mathbb{C}} = \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1} \rangle_{\mathbb{C}}$$

ゆゑ $\boldsymbol{u}_{r+1}$ が求められた. この様にして主張が正しい事がわかる. □

11.2 直交補空間

部分空間とその直交補空間の間に次の事が成り立つ.

命題 11.2.1 V の部分空間 W, W_1, W_2 について, 次の (1), (2), (3), (4) が成り立つ.
(1) $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$, $V = W \oplus W^{\perp}$.
(2) $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = \dim(V)$.
(3) $(W^{\perp})^{\perp} = W$.
(4) $W_1 \subset W_2 \Longleftrightarrow {W_1}^{\perp} \supset {W_2}^{\perp}$.

証明 (1) まづ, $\boldsymbol{u} \in W \cap W^{\perp}$ ならば, 定義により, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$, 即ち $\|\boldsymbol{u}\|^2 = 0$. よつて $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$.
次に $\dim(W) = r$ とし, W の正規直交基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_r\}$ をとる. $\boldsymbol{v} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_i)\, \boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{w}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$$

とおく. $\boldsymbol{w} \in W$ であり, 任意の $\boldsymbol{u}_j$ $(1 \leq j \leq r)$ に対して

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{w}', \boldsymbol{u}_j) &= (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}_j) = (\boldsymbol{v} - \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_i)\, \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) \\ &= (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_j) - \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_i)\, (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_j) - (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_j) = 0\end{aligned}$$

となるから $\boldsymbol{w}' \in W^{\perp}$ であり, $V = W + W^{\perp}$ がわかつた. これと $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$ から, 主張は示された.
(2) は 9.1.4 を使へば (1) より明かである.
(3) 定義より $W \subset (W^{\perp})^{\perp}$ である. (2) を W と $W^{\perp}$ に適用すれば

$$\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = \dim(V), \quad \dim(W^{\perp}) + \dim((W^{\perp})^{\perp}) = \dim(V)$$

を得るが, この 2 式より $\dim(W) = \dim((W^{\perp})^{\perp})$ ゆゑ, $W = (W^{\perp})^{\perp}$ でなければならない.
(4) $(\Rightarrow)$. $\boldsymbol{u} \in {W_2}^{\perp}$ ならば, 任意の $\boldsymbol{v} \in W_2$ について $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$. 従つて, 任意の $\boldsymbol{v} \in W_1$ について $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$. よつて $\boldsymbol{u} \in {W_1}^{\perp}$. $(\Leftarrow)$ は (3) を使へばよい. □

定義 11.2.2 W を V の部分空間とせよ. いま, 各 $\boldsymbol{v} \in V$ に対し $\boldsymbol{w} \in W$, $\boldsymbol{w}' \in W^{\perp}$ が

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}'$$

によつて一意的に定まる (11.2.1(1) による). このとき, $\boldsymbol{v} \longmapsto \boldsymbol{w}$ により定まる V から W への写像は線形写像であつて, V から W への射影子 (9.5 節の冒頭) の一種である. これを pr_W で表す. 11.2.1(1) の記号を使へば

$$\mathrm{pr}_W(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}_i)\, \boldsymbol{u}_i$$

と書ける.

問 11.2.3 上で定義した射影子 pr_W は線形写像であることを示せ.

例題 11.2.4 $V = \mathbb{C}^2$, $W = \left\{ c \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{C} \right\}$ とする. V から W への射影子を求めよ.

11.3 随伴変換, 随伴行列

次の概念は数学の至るところに現はれ, 重要である.

定義 11.3.1 V の線形変換 T に対して, すべての $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ について

$$(T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{u}, T^*(\boldsymbol{v}))$$

を満たす写像 $T^* : V \longrightarrow V$ を T の随伴変換といふ.

問 11.3.2 (1) 線形変換 T の随伴変換 T^* は線形変換であることを示せ.
(2) T に対して T^* は一意的に存在することを示せ.

問 11.3.3 複素数を成分とする行列 A について, ${}^t\overline{A} = \overline{{}^tA}$ であることを示せ.

定義 11.3.4 正方行列 A に対して $A^* = {}^t\overline{A}$ を A の随伴行列と呼ぶ. $|A^*| = \overline{|A|}$ に注意.

随伴変換と随伴行列の関係は次の通り.

命題 11.3.5 V の正規直交基を 1 組定め, T を V の線形変換とする. この基に関する 線形変換 T の表現行列 を A とせよ. このとき, この基に関する T^* の表現行列は A^* である. また, この基に関して A^* を表現行列とする線形変換が T^* に他ならない. 特に $(T_A)^* = T_{A^*}$ である.

証明 $\dim(V) = n$ とする. 1 組定められた V の正規直交基を $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ とする. この基に関する T^* の表現行列を $B = [b_{ij}]$ とし, $A = [a_{ij}]$ とおく. このとき

$$\big(T(\boldsymbol{u}_i), \boldsymbol{u}_j\big) = \Big(\sum_k a_{ki}\,\boldsymbol{u}_k,\, \boldsymbol{u}_j\Big) = a_{ji},$$

$$\big(\boldsymbol{u}_i, T^*(\boldsymbol{u}_j)\big) = \Big(\boldsymbol{u}_i,\, \sum_k b_{kj}\,\boldsymbol{u}_k\Big) = \overline{b_{ij}}.$$

ゆゑに, すべての i, j について $a_{ij} = \overline{b_{ji}}$ である. つまり $B^* = A$. □

命題 11.3.6 T が V の線形変換であるとき, $(T^*)^* = T$ である.

証明 V の正規直交基を取り, それに関する表現行列 A について, $(A^*)^* = A$ であるから, 主張は 11.3.5 により正しい. □

命題 11.3.7 T_1 と T_2 が V の線形変換であるとき $(T_1T_2)^* = {T_2}^*\,{T_1}^*$ である.

証明 これも行列に関する性質 $(AB)^* = B^*A^*$ と 11.3.5 から直ちにわかる. □

演 習 問 題

11.3.8 $\mathbb{C}$ に係数を持つ n 次以下の x の多項式全体 $\mathbb{C}[x]$ を $\mathbb{C}$ 上の vector 空間とみなとき,

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \quad (\, f,\ g \in \mathbb{C}[x]\,)$$

は, この空間において Hermite 内積を与へることを示せ.

11.4 Hermite 変換, Unitary 変換, 正規変換

定義 11.4.1 (1) V の線形変換 T が $T^* = T$ を満たすとき, T は Hermite 変換 と呼ばれ, $T^* = -T$ を満たすとき, 歪 Hermite 変換 と呼ばれる.
(2) また, 正方行列 A が $A^* = A$ を満たすとき, A は Hermite 行列 と呼ばれ, $A^* = -A$ を満たすとき, A は 歪 Hermite 行列 と呼ばれる.

注意 11.4.2 11.3.5(1) により, 線形変換 T が Hermite 行列であることと, 任意の正規直交基に関する T の表現行列が Hermite 行列であることは同値である.

問 11.4.3 線形変換 T に対して T^*T および TT^* は Hermite 変換であることを示せ. また, 正方行列 A に対して A^*A および AA^* は Hermite 行列であることを示せ.

問 11.4.4 T が Hermite 変換であるとき, 任意の自然数 n に対し T^n も Hermite 変換であることを示せ. さらに T が正則な Hermite 変換であるとき, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し T^n は Hermite 変換であることを示せ.

問 11.4.5 A が Hermite 行列であるとき ${}^tA$ も Hermite 行列であることを示せ.

定理 11.4.6 Hermite 変換, Hermite 行列の固有値はすべて実数である.

証明 V の Hermite 変換 T が固有値 $\lambda \in \mathbb{C}$ を持つとき, $\mathbf{0} \neq \boldsymbol{u} \in V$ が存在して

$$T(\boldsymbol{u}) = \lambda \boldsymbol{u}$$

となる. このとき

$$(T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) = (\lambda \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \lambda\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \lambda \|\boldsymbol{u}\|^2.$$

一方, T は Hermite 変換だから

$$(T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, T(\boldsymbol{u})) = (\boldsymbol{u}, \lambda \boldsymbol{u}) = \overline{\lambda}\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \overline{\lambda} \|\boldsymbol{u}\|^2.$$

従つて $\lambda \|\boldsymbol{u}\|^2 = \overline{\lambda} \|\boldsymbol{u}\|^2$ であるが, $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$ ゆゑ $\lambda = \overline{\lambda}$ で $\lambda \in \mathbb{R}$.
Hermite 行列に関しては問 (次の 11.4.7) とする. □

問 11.4.7 Hermite 行列の固有値はすべて実数であることを示せ.

定義 11.4.8 V の線形変換 T が Hermite 内積の値を変へないとき, 即ち, 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ について

$$\big(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})\big) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

が成り立つとき, T は unitary 変換 と呼ばれる.

注意 11.4.9 T が V の unitary 変換であるためには, V の 1 つの基 (正規直交基でなくてもよい) $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ について

$$\big(T(\boldsymbol{u}_i), T(\boldsymbol{v}_j)\big) = (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j)$$

が成り立つことが必要十分である.

命題 11.4.10 T を Hermite 空間 V の線形変換とする. 次の 3 つは同値である.
(1) T は unitary 変換である.
(2) $T^*T = I_V$.
(3) $TT^* = I_V$.

証明 (1) $\Rightarrow$ (2). 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ について, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \big(T(\boldsymbol{u}), T(\boldsymbol{v})\big) = \big(\boldsymbol{u}, T^*T(\boldsymbol{v})\big)$ ゆゑ, $T^*T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}$ である. つまり (2) が成り立つ.
(2) $\Rightarrow$ (1) は上の議論を逆に辿ればよい.
(2) $\Leftrightarrow$ (3). V の基を決めて, それに関する T の表現行列を A とすれば, 仮定から $A^*A = I$. 4.5.9 により, $A^* = A^{-1}$ であり $AA^* = I$ が成り立つ. これは $TT^* = I_V$ を意味する.
(3) $\Leftrightarrow$ (2) は上の議論を逆に辿ればよい. □

定義 11.4.11 正方行列 U が $U^*U = I$, つまり ${}^tU\overline{U} = I$ を満たすとき, U は unitary 行列であると言はれる.

注意 11.4.12 Unitary 行列は絶対値 1 の複素数 $e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ の類似であると考へられる.

問 11.4.13 U が unitary 行列であるとき ${}^tU$ も unitary 行列であることを示せ.

問 11.4.14 Unitary 行列の行列式の絶対値は 1 であることを示せ.

例題 11.4.15 V の正規直交基を固定する. T が V の unitary 変換であるためには, この基に関する表現行列が unitary 行列であることが必要十分であることを示せ.

証明 $\dim(V) = n$ として, 与へられた正規直交基を $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ とし, T の表現行列を $A = [\boldsymbol{a}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n]$ とせよ. このとき

$$\big(T(\boldsymbol{u}_i),\, T(\boldsymbol{u}_j)\big) = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\boldsymbol{u}_k,\ \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\boldsymbol{u}_k\Big) = {}^t\boldsymbol{a}_i\overline{\boldsymbol{a}_j}.$$

T が unitary 変換であることは $\big(T(\boldsymbol{u}_i),\, T(\boldsymbol{u}_j)\big) = (\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j) = \delta_{ij}$ であることに他ならず, それは

$${}^t\boldsymbol{a}_i\overline{\boldsymbol{a}_j} = \delta_{ij},$$

即ち ${}^tA\overline{A} = I$ であることと同値である. 従つて A は unitary 行列である. □

命題 11.4.16 n 次正方行列 $U = [\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n]$ について, 次の 3 条件は同値である.
(1) U は unitary 行列.
(2) T_U は $\mathbb{C}^n$ の標準 Hermite 内積に関して unitary 変換である.
(3) $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$ は $\mathbb{C}^n$ の標準 Hermite 内積に関して正規直交基である.

証明 (1) $\Leftrightarrow$ (2) は 11.4.15 から直ちにわかる. また (1) を仮定すれば $U^*U = I$ であるが, これは, すべての $1 \leq i, j \leq n$ について ${}^t\overline{\boldsymbol{a}_i}\boldsymbol{a}_j = \delta_{ij}$, 即ち ${}^t\boldsymbol{a}_i\overline{\boldsymbol{a}_j} = \delta_{ij}$ であることと同値であり, これは $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \delta_{ij}$ を意味するから, (3) が結論される. この議論は可逆だから (3) $\Rightarrow$ (1) も示された. □

定理 11.4.17 T を V の線形変換とせよ. T が V の unitary 変換であるためには, 任意の $\boldsymbol{u} \in V$ に対し, $\|T(\boldsymbol{u})\| = \|\boldsymbol{u}\|$ であることが必要十分である.

証明 (必要性) これは定義より明らか. (十分性) $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ について

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 + (\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \overline{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})} + \|\boldsymbol{u}\|^2,$$

$$\|T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})\|^2 = \|(T\boldsymbol{u})\|^2 + (T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v})) + \overline{(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v}))} + \|T(\boldsymbol{u})\|^2$$

であることと T についての仮定から

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) + \overline{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})} = (T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v})) + \overline{(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v}))}$$

である. ここで実数部分を real, 虚数部分を imag で表せば, 上のことから $\mathrm{real}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \mathrm{real}(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v}))$. 一方 $\boldsymbol{u}$ の代りに $i\boldsymbol{u}$ をとると $\mathrm{real}(-i(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})) = \mathrm{real}(-i(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v})))$, つまり $\mathrm{imag}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \mathrm{imag}(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v}))$ が示され, 結局, 任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ について

$$(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \big(T(\boldsymbol{u}),T(\boldsymbol{v})\big)$$

となるから T は unitary 変換である. □

注意 11.4.18 次の様な類似があると考へればわかり易いかも知れない :

複素数を成分に持つ行列	$\longleftrightarrow$	複素数
随伴行列	$\longleftrightarrow$	複素共役
Hermite 行列	$\longleftrightarrow$	実数
正定値 Hermite 行列	$\longleftrightarrow$	正の数
歪 Hermite 行列	$\longleftrightarrow$	純虚数
Unitary 行列	$\longleftrightarrow$	絶対値 1 の複素数.

演 習 問 題

11.4.19 一般に 2 つの Hermite 行列の和, 積は Hermite 行列になるか. 理由をつけて答へよ.

11.4.20 任意の正方行列 A は Hermite 行列 H を歪 Hermite 行列 S の和 $A = H + S$ として一意的に表されることを示せ.

11.4.21 次の問に答へよ.
(1) $U^2 = -I$ となる行列は 2 次 unitary 行列 U を 2 つ挙げよ.
(2) $U^2 = -I$ となる行列は 3 次 unitary 行列 U を 3 つ挙げよ.
(3) 正則な歪 Hermite 行列 S に対し, SU が正定値 Hermite 行列になり $SU = US$ かつ $U^2 = -I$ となる uniraty 行列 U が一意的に存在することを示せ.

11.4.22 行列 $A \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C})$ を任意にとり固定する. このとき, 2 つの集合

$$\mathscr{H} = \{\, X \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid X^*A + AX = O,\ \varphi_X(-1) \neq 0 \,\},$$

$$\mathscr{U} = \{\, T \in \mathrm{Mat}(n,\mathbb{C}) \mid T^*AT = A,\ \varphi_T(-1) \neq 0 \,\}$$

が Cayley 変換 $T = (1-X)(1+X)^{-1}$ により 1 対 1 に対応することを証明せよ. とくに $A = I$ とすれば unitary 行列のある集合と歪 Hermite 行列のある集合との対応が得られる.

11.5 正規変換

定義 11.5.1 (1) V の線形変換 T は, T^* と可換であるとき 正規変換 であるといはれる.
(2) 正方行列 A は, A^* と可換であるとき 正規行列 であるといはれる.

補題 11.5.2 (1) T を V の線形変換とせよ. T が正規変換であるためには T の表現行列が正規行列であることが必要十分である.
(2) A を n 次正方行列とせよ. $\mathbb{C}^n$ の標準 Hermite 内積について T_A が正規変換であるためには A が正規行列であることが必要十分である.

証明 (1) V の基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ に関しての T の表現行列を A とすれば, T^* の表現行列は A^* になるから.
(2) T_A の標準基に関する表現行列は A に他ならないから (1) によつて主張が従ふ. □

問 11.5.3 次の主張を証明せよ.
(1) 正規行列の scalar 倍は正規行列である.
(2) Hermite 行列, 歪 Hermite 行列は正規行列である.
(3) Unitary 行列は正規行列である. (Hint : 11.4.10 を利用せよ.)

命題 11.5.4 $\dim(V) = n$ とする. T_1 と T_2 を互ひに可換な V の線形変換とせよ. V の部分空間 $W_0, W_1, \cdots, W_n$ で
(1) $T_1(W_k) = T_2(W_k) = W_k \quad (0 \leq k \leq n)$,
(2) $W_0 = \{\mathbf{0}\} \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{n-1} \subset W_n = V$,
(3) $\dim(W_k) = k \quad (0 \leq k \leq n)$
を全て満すものが存在する.

証明 n に関する帰納法で証明する. $n = 1$ のときは明かである.
空間 V の次元が $n-1$ までの場合は正しいとし, $\dim(V) = n$ の場合を証明する. T_1 と T_2 の随伴変換 ${T_1}^*$ と ${T_2}^*$ は可換である. 実際,

$$ {T_1}^*{T_2}^* = (T_2T_1)^* = (T_1T_2)^* = {T_2}^*{T_1}^*. $$

従つて 9.3.1 により, ${T_1}^*$ と ${T_2}^*$ に共通の固有 vector が存在する. その 1 つを $\boldsymbol{u}$ とし, ${T_1}^*\boldsymbol{u} = \overline{\lambda_1}\,\boldsymbol{u}$, ${T_2}^*\boldsymbol{u} = \overline{\lambda_2}\,\boldsymbol{u}$ とする. ここで $W_{n-1} = \{\boldsymbol{u}\}^\perp$ とおく. 11.2.1(2) により $\dim(W_{n-1}) = n-1$ であり, T_1 も T_2 も W_{n-1} の変換を与へる. 実際, $\boldsymbol{v} \in W_{n-1}$ ならば

$$ (\boldsymbol{u}, T_i(\boldsymbol{v})) = ({T_i}^*, \boldsymbol{v}) = (\overline{\lambda_i}\,\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \overline{\lambda_i}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0 $$

より $T_i(\boldsymbol{v}) \in W_{n-1}$ である. W_{n-1} に対して帰納法の仮定を用ゐれば
(1) $T_1(W_k) = T_2(W_k) = W_k \quad (0 \leq k \leq n-1)$,
(2) $\{\mathbf{0}\} = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{n-2} \subset W_{n-1}$,
(3) $\dim(W_k) = k \quad (0 \leq k \leq n-1)$
を満たす部分空間 $W_0, W_1, \cdots, W_{n-2}$ が得られる. これで, 主張は証明された. □

定理 11.5.5 T_1 と T_2 を互ひに可換な V の線形変換とせよ. T_1 と T_2 の表現行列が同時に上三角行列となる様な V の正規直交基が存在する.

証明 11.5.4 の記号を用ゐる. 11.5.4 と Gram-Schmidt の正規直交化 11.1.12 により, V の正規直交基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ を $\boldsymbol{u}_k \in W_k$ かつ $\boldsymbol{u}_k \notin W_{k-1}$ なる様に選べば, この基に関する T_1 と T_2 の表現行列は上三角行列になる. □

定理 11.5.6 V の線形変換 T に関して, 次の 3 条件は同値である.
(1) T は正規変換である.
(2) T の表現行列が対角行列になる様な正規直交基が存在する.
(3) T の固有 vectors からなる正規直交基が存在する.

証明 (1)⇒(2). T が正規変換なので T と T^* は可換. そこで, これらに 11.5.5 を適用すると V の正規直交基が存在して T の表現行列 A と T^* の表現行列 A^* はともに上三角行列になる. このとき $A^* = {}^t\overline{A}$ であるから ${}^t\overline{A}$ が上三角行列ならば A は下三角行列になる. よつて A も A^* も対角行列でなければならない.
(2)⇒(3) は容易.
(3)⇒(1). 正規直交基 $\{\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n\}$ について $T(\boldsymbol{u}_i) = \lambda_i\,\boldsymbol{u}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ とせよ. このとき

$$
\begin{aligned}
T^*T(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n) &= T^*\left((\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}\right) \\
&= T^*(\lambda_1\boldsymbol{u}_1, \cdots, \lambda_n\boldsymbol{u}_n) = (\lambda_1 T^*(\boldsymbol{u}_1), \cdots, \lambda_n T^*(\boldsymbol{u}_n)) \\
&= (\lambda_1 T^*(\boldsymbol{u}_1), \cdots, \lambda_n T^*(\boldsymbol{u}_n)) = T^*(\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix} \\
&= (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\begin{bmatrix}\overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix} \\
&= (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\begin{bmatrix}|\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2\end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

TT^* の変換も同じ結果を与へるから T と T^* は可換であり, T は正規行列である. □

行列 A から定まる線形変換 T_A に関して 11.5.6 を適用すれば, 次が示される.

定理 11.5.7 (Toeplitz の定理) A を正方行列とする. 次の 3 条件は同値である.
(1) A は正規行列である.
(2) Unitary 行列 U が存在して $U^{-1}AU$ が対角行列になる.
(3) A の適当な固有 vectors (列 vectors) を並べると unitary 行列になる.

命題 11.5.8 T を V の正規変換とし, その固有値の全体を $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) 固有空間 $W(\lambda_i, T)$ は互ひに直交する.

(2) $W(\lambda_i, T)$ 上の恒等変換を I_i と書く. このとき, 直和分解

$$V = W(\lambda_1, T) \oplus \cdots \oplus W(\lambda_r, T)$$

が得られるが, これに応じて,

$$T = \lambda_1 I_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_r I_r$$

となる. これを T の spectrum 分解 と称する.

証明 (1) 以下の様に 7.3.11 と同じ方法で証明できる. λ と μ を T の異なる固有値とし, 任意に $\boldsymbol{u} \in W(\lambda, T)$, $\boldsymbol{v} \in W(\mu, T)$ を取れば,

$$(\lambda\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \big(T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}\big) = \big(\boldsymbol{u}, T^*(\boldsymbol{v})\big) = (\boldsymbol{u}, \overline{\mu}\boldsymbol{v}) = \mu(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

なので $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ でなくてはならない.

(2) 11.5.6 により T は適当な基に関して対角行列で表はれる. 一方 10.2.10 により, 左辺と右辺の差は冪零変換であるから, その表現行列は冪零行列である. この 2 つのことから, その差の表現行列は零行列である. よつて T について所望の分解が得られる. □

演 習 問 題

11.5.9 次の行列 A について以下の問に答へよ.

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 10+i & -4+2i & -12i \\ -10 & 5 & -2+4i \\ 8i & -10i & 10-i \end{bmatrix}.$$

(1) A が Hermite 行列ではないが正規行列であることを確かめよ.

(2) A^2 は Hermite 行列であることを確かめよ.

(3) Unitary 行列 P を求めて $P^{-1}AP = B$ を対角行列とせよ.

$\left(答例 (一通りではない) : P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3-i & -1-2i & -1+3i \\ -1-3i & -3+1i & 1-2i \\ 1+2i & -3-i & -3-i \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} i & & \\ & -i & \\ & & 5 \end{bmatrix} \right)$

11.5.10 次の 2 つは同値であることを示せ.

(1) $2s$ 個の行列 $A_1,\ {A_1}^*,\ \cdots,\ A_s,\ {A_s}^*$ のどの 2 つも交換可能とする.
(特に $A_1, \cdots, A_s$ は正規行列である)

(2) Unitary 行列 P が存在して $P^{-1}A_1P, \cdots, P^{-1}A_sP$ がすべて対角行列となる.

(c.f. 7.3.10 と同様に, この状況を $A_1, \cdots, A_s$ は unitary 行列で 同時対角化 されるといふ.)

(Hint : 11.5.7 (Toeplitz の定理) の証明の考へ方を応用せよ.)

11.6 正定値 Hermite 行列

定義 11.6.1 Hermite 変換 T の固有値がすべて正のとき, T は <u>正定値 Hermite 変換</u> と呼ばれる. これは, 写像

$$V \times V \to \mathbb{C}, \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \longmapsto (T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v})$$

が Hermite 内積になることに他ならない. また, T の固有値がすべて非負であるとき, T は <u>半正定値 Hermite 変換</u> と呼ばれる.

定義 11.6.2 Hermite 行列 A の固有値がすべて正のとき, A は <u>正定値 Hermite 行列</u> と呼ばれる. これは, 写像

$$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \quad (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \longmapsto {}^t\boldsymbol{u} A \boldsymbol{v}$$

が Hermite 内積になることに他ならない. また, A の固有値がすべて非負であるとき, A は <u>半正定値 Hermite 行列</u> と呼ばれる.

命題 11.6.3 V の Hermite 変換 T について, 次が成り立つ.
(1) T が正定値 Hermite 変換 $\Longleftrightarrow$ 任意の $\boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ について $(T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}) > 0$.
(2) T が半正定値 Hermite 変換 $\Longleftrightarrow$ 任意の $\boldsymbol{u} \in V$ について $(T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}) \geq 0$.

証明 (1) Hermite 変換は正規変換であつたから, 11.5.6 により, V には T の固有 vectors からなる正規直交基が存在する. それを $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n$ とし, それぞれの固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とする. 任意に $\boldsymbol{u} \in V$ をとり, $\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n$ と書けば,

$$\big(T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}\big) = (a_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{u}_n,\ \boldsymbol{u}) = \lambda_1|a_1|^2 + \cdots + \lambda_n|a_n|^2$$

を得る. これにより, すべての λ_j が正であることと, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ について $\big(T(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}\big) > 0$ であることが同値である.
(2) の証明は (1) と同様であるから省略する. □

命題 11.6.4 T が正定値 (半正定値) Hermite 変換であるためには, $T = S^2$ を満たす正定値 (半正定値) Hermite 変換 S が存在することが必要十分である. またこのとき, S は一意的に存在する.

証明 半正定値の場合も正定値の場合と同様に証明できるから, 正定値の場合のみ示す.
(必要性) T を spectrum 分解して

$$T = \lambda_1 I_1 \oplus \cdots \oplus \lambda_r I_r, \quad (\lambda_i > 0)$$

とせよ. ここで

$$S = \sqrt{\lambda_1} I_1 \oplus \cdots \oplus \sqrt{\lambda_r} I_r$$

とおくと, $T = S^2$ で

$$W(\lambda_i, T) = W(\sqrt{\lambda_i}, S) \quad (1 \leq i \leq r) \tag{11.6.5}$$

であることが確かめられる (問とする : 11.6.6). よつて S も正定値 Hermite 変換である. 次に

S の存在の一意性を示す. いま, S' も Hermite 変換で $T = S'^2$ を満すとせよ. S' の異なる固有値のすべてを $\mu_1, \cdots, \mu_s$ とし, 各 $1 \le i \le s$ について ${I'}_i$ を $W(\mu_i, S')$ の恒等変換とすれば, S' は

$$S' = \mu_1 {I'}_1 \oplus \cdots \oplus \mu_s {I'}_s$$

と spectrum 分解される. このとき, $S'^2 = T$ であることから $s = r$ で, 番号を付け替へれば ${\mu_1}^2 = \lambda_1, \cdots, {\mu_r}^2 = \lambda_r$ となることがわかる. このことから容易に $S' = S$ がわかる.
(十分性) これは明らかである. □

問 11.6.6　(11.6.5) を証明せよ.

11.6.4 を行列の言葉で述べておく.

命題 11.6.7　正方行列 A が (半) 正定値 Hermite 行列であるためには, A が Hermite 行列で $A = B^2$ となる (半) 正定値 Hermite 行列 B が存在することが必要十分である.

定義 11.6.8　半正定値 Hermite 変換 T に対して $T = S^2$ となる半正定値 Hermite 変換 S を $\sqrt{T}$ で表す. 同様に, 半正定値 Hermite 行列 A に対して $A = B^2$ となる半正定値 Hermite 行列 B を $\sqrt{A}$ で表す.

補題 11.6.9　$\ell \in \mathbb{N}$, 対角化可能な線形変換 H と H の固有値 α に関して次が成り立つ :

$$W(\alpha, H) = W(\alpha^\ell, H^\ell).$$

証明　基を定めておき, H の表現行列を A とすれば正則行列 P と H の固有値を対角成分に持つ行列 B が存在して, $A = PBP^{-1}$ と書ける. このとき $A^2 = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) = PB^2P^{-1}$ となるから, P の任意の列 vector は A のある固有値 α に関する固有 vector であり, 同時に A^2 の固有値 α^2 に関する固有 vector でもある. 具体的に書けば次の様になる. A の固有値のすべてを, 重複も込めて $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ と書き, $B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{bmatrix}$ とおいて, $P = [\,\boldsymbol{p}_1 \cdots, \boldsymbol{p}_n]$ によつて $B = P^{-1}AP$ となつてゐるものとする. このとき A^2 の固有値の全体は, 重複も込めて ${\alpha_1}^2, \cdots, {\alpha_n}^2$ であり, $P^{-1}A^2P = B^2$ となつてゐる. つまり $A\boldsymbol{p}_i = \alpha_i \boldsymbol{p}_i$, $A^2\boldsymbol{p}_i = {\alpha_i}^2 \boldsymbol{p}_i$ である. それゆゑ $W(\alpha_i, A) \subset W({\alpha_i}^2, A^2)$ であるが, 6.7.8 と合はせると

$$n = \sum_{i=1}^{r} \dim_{\mathbb{C}} W(\alpha_i, A) \le \sum_{i=1}^{r} \dim_{\mathbb{C}} W({\alpha_i}^2, A^2) = n.$$

よつて $W(\alpha_i, A) = W({\alpha_i}^2, A^2)$.　$\ell > 2$ の場合も同様に示される. □

定理 11.6.10 (1) Hermite 空間の任意の同型変換 T は, ある正定値 Hermite 変換 H とある unitary 変換 U の積として $T = HU$ の形に一意的に書かれる. このとき $HU = UH$ であるためには T が正規変換であることが必要十分である.
(2) 任意の正則行列 A は, ある正定値 Hermite 行列 B とある unitary 行列 C の積として $A = BC$ の形に一意的に書かれる. このとき $BC = CB$ であるためには A が正規行列であることが必要十分である.

証明 (1) 仮定より 0 は T の固有値ではない. また T^* も正則である. 線形変換 TT^* は Hermite 変換なので 11.4.6 により, TT^* の全ての固有値は実数である. ゆゑに

$$\big(TT^*(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{u}\big) = (T^*(\boldsymbol{u}), T^*(\boldsymbol{u})) > 0$$

である. つまり TT^* は正定値 Hermite 変換である. 11.6.4 により $\sqrt{TT^*}$ が存在するから, それを H とおく. H は正則変換である. さらに $U = H^{-1}T$ とおくと

$$UU^* = (H^{-1}T)(H^{-1}T)^* = H^{-1}TT^*H^{-1} = H^{-1}H^2H^{-1} = I$$

であり, U が Unitary 変換であることがわかつた. これで, 所望の表示 $T = HU$ が得られた. 次に, この形の表示の一意性を示さう. いま 2 通りに $T = H_1U_1 = H_2U_2$ と表されたとせよ. このとき

$$H_2 = H_1U_1{U_2}^{-1}, \quad H_2 = {H_2}^* = ({U_2}^{-1})^*{U_1}^*{U_1}^* = U_2{U_1}^{-1}H_1$$

であるから

$${H_2}^2 = (H_1U_1{U_2}^{-1})(U_2{U_1}^{-1}H_1) = {H_1}^2$$

となる. H_1 も H_2 も正定値 Hermite 変換なので $H_1 = H_2$. これより $U_1 = U_2$ が従ふ.
次に T を正規変換とする. $T^*T = TT^*$ から $(HU)^*HU = HU(HU)^*$ であるが, これは $H^2U = UH^2$ を意味する. しかるに, 11.6.9 と 9.3.3 により, これは $HU = UH$ と同値である. 逆に, $HU = UH$ ならば T が正規変換になることは, この議論を逆に辿ればよい.
(2) 同型変換の表現行列は正則行列, Hermite 変換の表現行列は Hermite 行列, unitary 変換の表現行列は unitary 行列であつて, 変換の合成の表現行列は表現行列の積であるから, (1) より (2) が従ふ. □

注意 11.6.11 1 次元空間の場合, H は正の実数倍であり, それは複素数平面の原点を中心にした拡大写像であり, U は絶対値 1 の複素数を掛けること, つまり原点中心の回転を表す. 任意の正則変換はこれらの合成であるから, 11.6.10 は, この事実の一般化である. 行列の言葉で言へば, 任意の複素数 z が $z = re^{i\theta}$ と表示されることの類似である.

問 11.6.12 11.6.10 の主張の $T = HU$ を $T = UH$ に変へた場合に, 主張は成立するか.
(Hint : 11.4.5, 11.4.13, および ${}^t(HU) = {}^tU{}^tH$.)

跡 (trace), 96
1 元体, 67
1 次関係, 71
1 次結合, 71
1 次従属, 71
1 次独立, 71
位置 vector, 107
一様双曲面, 112
一般線形群, 85
ideal, 115
上三角化, 104
上三角行列, 12
Hermite 行列, 140
Hermite 空間, 135
Hermite 内積, 135
Hermite 変換, 140
解空間, 79
階数, 21
階数 (線形写像の), 82
階数 (行列の) (rank), 74
可換, 11
可逆的, 19
核 (Ker), 82
拡大係数体, 30
簡約化, 21, 30
簡約行列, 19, 30
基 (基底), 77
奇置換, 41
基本行列, 33
基本 vector, 77
逆行列, 35
逆元, 67
逆写像, 84
逆置換, 40
逆 vector, 68
行基本変形, 19
行 vector, 6
行列, 3
Kroneker の δ, 7
偶置換, 41
Gram-Schmidt の直交化, 100, 137
Cayley-Hamilton の定理, 89
Cayley 変換, 102
原点, 107
交代行列, 8
交代的, 57
恒等置換, 40
固有空間 $W(\lambda, T)$, 87
固有空間 (行列の) $W(\lambda, A)$, 88
固有多項式 (線形変換の), 91
固有多項式 (行列の) $\varphi_A(t)$, 88
固有値 (行列の), 88
固有値 (線形変換の), 87
固有 vector (行列の), 88
固有 vector (線形変換の), 87
Cauchy-Schwartz の不等式, 98
ごかん, 40
差, 9
最小多項式 (行列の) $\mu_A(t)$, 116
最小多項式 (線形変換の) $\mu_T(t)$, 116
最大 1 次独立数, 72
細胞, 15
三角不等式, 98
座標, 107
4 元数体, 99
始点, 107
射影行列, 120
射影子, 120
終点, 107
主成分, 19
次元 $\dim_{\mathbf{K}}$, 77
次元定理, 82
自己準同型, 121
自明な 1 次関係, 71
自明な解, 26
じゆんかいちかん, 40
準固有空間, 122
Jordan 行列, 126
Jordan 細胞, 126
Jordan 標準形, 128
垂直, 98
随伴変換 T^*, 139
数 vector, 3, 6
数 vector 空間, 68
scalar 行列, 5
scalar 倍, 68
scalar 倍 (線形写像の), 84
spectrum 分解, 145
随伴行列 A^*, 139
正規化, 57
正規行列, 143
正規直交基, 100
正規直交基 (Hermite 空間の), 137
正規変換, 143
生成される, 77
正則, 35
正定値 Hermite 行列, 146
正定値 Hermite 変換, 146
成分, 4
正方行列, 5
積 (置換の), 39
積の結合律, 11
線形写像, 81
線形変換, 87
相似, 92
像 (Im), 82
体, 67
対角化, 92
対角化可能, 92
対角行列, 5
対角成分, 5
対称行列, 8
対称群, 40
互ひに素 (置換が), 41
多重線形性, 57
単位行列, 5
単位元, 67
単項 ideal 整域, 115
代数的曲線, 107
代数的曲面, 107
代数的超曲面, 107
楕円面, 112
置換, 40
重複度 (行列での), 122
重複度 (線形変換での), 122
長方形分割, 15
直和 (部分空間の), 113
直和 (行列の), 119
直和 (線形変換の), 119
直和因子, 113
直和分解, 113
直交 (Hermite 空間での), 136
直交行列, 101
直交変換, 100
直交補空間, 99
直交補空間 (Hetmite 空間), 136
点, 107
Toeplitz の定理, 144
同型写像, 84
同型変換, 84
同次形, 26
同時対角化, 118, 145
内積, 97
内積空間, 97
長さ, 98
長さ (Hermite 空間での), 136
2 次曲線, 109
二葉双曲面, 112
norm, 98
norm (Hermite 空間での), 136
掃き出し法, 19
半正定値 Hermite 行列, 146
半正定値 Hermite 変換, 146
半単純行列, 129
反転置簡約行列, 80
反転置行列, 80
等しい (行列が), 4
表現行列, 85
標準 Hermite 内積, 135
標準基 (Hermite 空間の), 137
標準基 (数 vector 空間の), 77
標準形 (2 次曲線の), 109
標準形 (2 次曲面の), 111
標準内積, 97
Vandermonde の行列式, 63
複素共役, 103
符号, 41
符号数, 111
不変, 117
Frobenius の定理, 131
部分空間, 69
分割, 15
分配律, 11
変換行列, 85
冪乗, 11
冪等行列, 120
冪等変換, 120
冪零行列, 12, 120
冪零変換, 120
vector 空間, 68
Bezout 等式, 115
補空間, 119
monic, 116
Euclid 空間, 107
有限次元, 77
unitary 行列, 141
unitary 変換, 140
余因子, 60
余因子行列, 60
余因子展開, 62
零行列, 5
零空間, 77
零写像, 81
零 vector, 6, 68
列, 4
列 vector, 6
和, 9
和 (vector 空間の), 70
和 (vectors の), 68
和 (線形写像の), 84
歪 Hermite 行列, 140
歪 Hermite 変換, 140
和の結合律, 11

積, 39
符号, 41
置換, 40