# 2020 微積分 (斎藤・小木曽) シケプリまとめ

Cu* イリド †

2021 年某月某日

これは 2020 年度理科 1 類 38 組の微積分シケプリをまとめて加筆修正したものとなる．記述内容は，授業で取り扱った概念の復習である．結果の掲載をメインとし，証明は扱わなかった．また，授業内容について，筆者が知る $+\alpha$ コンテンツを「おまけのコーナー」として掲載した．また，S セメスターのときに作成した対策問題も適宜掲載している．理解の助けになれば幸いである．

加筆修正にあたって，メインパートとおまけパートを分離することも考えたが，分離した場合，どこのおまけなのか分かりにくくなると考え，あえて分離していない．シケプリとしての機能は低下するが，より試験対策に特化したシケプリはその年のシケ対が頑張って作成してほしい．

筆者はまだ学部生であるため，浅い理解の箇所が多い．あくまでもこのシケプリは理解の補助のために用いてほしい．また，試験範囲の概念を知ることに主眼に置いているため，細かい証明は載せていない．

作成にあたって，旧版シケプリを読んで，私の間違いを指摘してくれたクラスメイトにこの場を借りて感謝を述べたい．また，このシケプリを制作する上で，VSCode と github で作業を行った．VSCode はいいぞ．

この~~怪文書~~シケプリが後輩諸君の学びの助けになれば幸いである．

* 金属元素．湧源クラブ所属．『らき☆すた』はいいぞ．
† うさぎ．『まちカドまぞく』はいいぞ．

# 目次


0 教員紹介 7
- 0.1 S1 . . . 7
- 0.2 S2 . . . 7
- 0.3 A1 . . . 7
- 0.4 A2 . . . 7
- 0.5 おまけ 1 . . . 8
- 0.6 おまけ 2 . . . 8

1 集合と写像 9
- 1.1 写像について . . . 9
- 1.2 単射と全射について . . . 9

2 極限 10
- 2.1 概要 . . . 10
- 2.2 お気持ちでもわかりたい人向け . . . 10
- 2.3 例題 . . . 10
- 2.4 例題の解答 . . . 11

3 微分 12

4 いろんな関数 12
- 4.1 双曲線関数 . . . 12
- 4.2 逆三角関数 . . . 13
- 4.3 逆双曲線関数 . . . 13
- 4.4 微分 . . . 13
  - 4.4.1 参考問題 . . . 14

5 おまけのコーナー 1：arctan のおもしろ数式 14

6 定積分 16
- 6.1 例題 . . . 16
- 6.2 例題の解答 . . . 16

7 微分方程式 18
- 7.1 変数分離でなんとかなるやつ . . . 18
- 7.2 一階斉次線型微分方程式 . . . 19
- 7.3 二階斉次線型微分方程式 . . . 19

8 偏微分 19
- 8.1 接平面と勾配 . . . 20
- 8.2 停留点 . . . 20

9 Taylor の定理 20

9.1 Taylor の定理 . . . . . 20
9.2 展開 . . . . . 20
9.3 例題 . . . . . 21
9.3.1 問題 . . . . . 21
9.3.2 解答 . . . . . 21
9.4 Taylor 展開の注意点 . . . . . 23
9.5 2 変数 Taylor の定理 . . . . . 23
9.6 逸話 . . . . . 23

10 おまけのコーナー 2：Maclaurin 展開による近似 23
10.1 $\arctan x$ を用いる . . . . . 24
10.2 $\arcsin^2 x$ を用いる . . . . . 24
10.3 円周率公式 . . . . . 25

11 全微分 25
11.1 Landau の記号 . . . . . 25
11.2 全微分 . . . . . 25
11.3 C ナンタラ級 . . . . . 26

12 chain rule 26
12.1 1 変数に関する chain rule . . . . . 26
12.2 2 変数に関する chain rule . . . . . 27
12.2.1 $x$，$y$ が 1 変数関数 . . . . . 27
12.2.2 $x$，$y$ が 2 変数関数 . . . . . 27
12.3 接ベクトル . . . . . 27
12.4 例題 . . . . . 27
12.4.1 問題 . . . . . 28
12.4.2 解答 . . . . . 28

13 2 変数関数の極大・極小 29
13.1 概要 . . . . . 30
13.2 例題 . . . . . 30
13.2.1 問題 . . . . . 30
13.2.2 解答 . . . . . 30

14 陰関数定理 34
14.1 特異点 . . . . . 34
14.2 陰関数定理 . . . . . 35

15 Lagrange の未定乗数法 35
15.1 定理 . . . . . 35
15.2 例 . . . . . 35

16 おまけのコーナー 3：開集合・連続・極限 36
16.1 実数について . . . . . 36
16.1.1 実数における絶対値と収束 . . . . . 36

16.1.2 開集合の書き直し . . . 36
16.1.3 連続関数の書き直し . . . 38
16.2 距離空間 . . . 38
16.2.1 定義 . . . 38
16.2.2 開集合等の書き直し . . . 39
16.3 一般の位相空間 . . . 39
16.3.1 ここまで一般化して何がいいんですか？ . . . 40

17 級数の収束 41
17.1 introduction . . . 41
17.2 数列の収束 . . . 41
17.3 級数の収束 . . . 42
17.4 収束半径 . . . 42
17.4.1 定義から . . . 42
17.4.2 d'Alembert の判定法 . . . 42
17.4.3 Cauchy-Hadamard の冪根判定法 . . . 43
17.5 収束することの計算 . . . 43
17.5.1 交代級数の収束判定 . . . 43
17.5.2 優級数法 . . . 44
17.5.3 Cauchy の収束判定法 . . . 44
17.5.4 arctan 的な話 . . . 44
17.6 項別微分・積分 . . . 45
17.6.1 項別微分・積分とは . . . 45
17.6.2 項別微分・積分と収束半径 . . . 45
17.6.3 arctan 的な話 2 . . . 45
17.7 無限級数の積 . . . 46

18 おまけのコーナー 4：Riemann の再配列定理 46

19 関数列の収束 47
19.1 各点収束と一様収束 . . . 47
19.1.1 Cauchy の収束判定法 . . . 47
19.2 微積分と極限の交換 . . . 48
19.3 冪級数関連の話題 . . . 48
19.4 Abel の定理 . . . 49
19.4.1 arctan 的な話 3 . . . 49

20 おまけのコーナー 5：Fourier 級数展開 49
20.1 関数を Fourier 級数展開する . . . 49
20.1.1 級数展開を作ってみる . . . 51
20.2 Fourier 級数展開と微積分 . . . 52
20.3 Fourier 級数展開の別表示 . . . 53
20.4 どのような関数が Fourier 級数展開できるのか . . . 54
20.5 関数空間 $L^2$ . . . 54
20.5.1 測度論の言葉紹介 . . . 54

20.5.2 二乗可積分 . . . 55
20.5.3 証明及び Bessel の不等式 . . . 55

21 一様連続 57

22 広義積分 57
22.1 広義積分の収束判定 . . . 57
22.1.1 Cauchy 型 . . . 57
22.1.2 優級数法 . . . 58

23 ガンマ関数 58
23.1 ガンマ関数 . . . 58
23.2 ベータ関数 . . . 59
23.3 Wallis の公式と Stirling の公式 . . . 59
23.4 Hölder の不等式 . . . 59
23.4.1 Hölder の不等式 . . . 59
23.4.2 蛇足 . . . 60
23.4.3 蛇足の解答 . . . 60

24 おまけのコーナー 6：ガンマ関数とゼータ関数 62
24.1 三角関数とガンマ関数の無限積表示 . . . 62
24.2 Lerch の公式 . . . 65

25 おまけのコーナー 7：$n$ 次元超球の体積公式 67

26 Jacobi 行列式 69
26.1 2 次元 . . . 70
26.1.1 1 次変換 . . . 70
26.1.2 極変換 . . . 70
26.2 一般次元 . . . 71
26.2.1 円柱座標変換 . . . 71
26.2.2 3 次元極座標変換 . . . 71

27 広義重積分 71

28 Laplace 変換 72
28.1 積分記号下の微分 . . . 72
28.2 Laplace 変換 . . . 72
28.2.1 変換例 . . . 73
28.3 Laplace 変換の便利な性質 . . . 74

29 おまけのコーナー 8：Fourier 変換 74
29.1 Fourier 逆変換のおきもち . . . 75
29.2 $L^2$ における話題 . . . 75
29.3 Dirac のデルタ関数と Fourier 変換 . . . 77

30 線積分 77

30.1 有向曲線 . . . . . . . . . . 77
30.2 微分形式と線積分 . . . . . . . . . . 77
30.3 線積分の性質 . . . . . . . . . . 78
30.4 複数の曲線の合併のとき . . . . . . . . . . 78
30.5 Green の定理 . . . . . . . . . . 79

# 0　教員紹介

S1，S2，A1，A2 の 4 回に分けてシケプリを作り，そのたびに教員紹介をした．S2 で担当教員が斎藤先生から小木曽先生に変更されたので，S1 でのみ行う予定だった教員紹介を再びすることになったわけだ．A セメでシケプリを作成しているときに，せっかくなので A1，A2 でも微積分ではないけど，数学の担当教員を紹介してやろうと思い，こうなった．

## 0.1　S1

教員：斎藤毅

整数論で名をはせる大数学者．4 年に 1 度行われる国際数学者会議で招待講演を行っている．これはオリンピック出場に匹敵する名誉といえよう．岩波文庫から加藤和也 (シカゴ大学教授・東大名誉教授)・黒川信重 (東工大名誉教授) と共著の『数論』(改定前全 3 冊・改定後全 2 冊) が出版されている．これは将来整数論を研究したいと考える人にとっては必須の教科書と言っても過言でない名著である (半分くらいは読んでそう思った)．また，同じく岩波から『フェルマー予想』を出版している．フェルマーの最終定理でも知られるこの予想を (証明含め) 完全に扱った本としては世界初だったのではないかと考えられる．

？？「長い！ 3 行でまとめろ！」
ぼく「さいとうせんせいすごい！」

## 0.2　S2

教員：小木曽啓示

代数幾何の専門家で，カラビ・ヤウ多様体について研究をしている．カラビ・ヤウ多様体を大雑把にいえば，と思ったが，大雑把に言えるほど私は詳しくないし，詳しくても大雑把に言える概念ではなかった．これは高次元のかたちについての学問で，特に超ひも理論で利用されるようだ．この先生，朝倉書店から『代数曲線論』という本を出しているようだ．この本を読んだ数学系の知り合いによると，物理寄りの~~雑な~~ゆるい表記が多いらしい．~~あと誤植のワンダーランドらしい．~~改善の余地が多い本らしい．著者は読んでいない．

## 0.3　A1

教員：下川航也

微積のシケプリだからといって線型代数の教員担当をしないかと思ったか？

どうやら所属は東大ではなく埼玉大学である模様．博士は東大で取得されている．研究分野はトポロジー方面のようだ．特にこれらを生物分野に応用している．昨年出版された論文 *A metal-peptide capsule by multiple ring threading*[*1] の abstract の冒頭は完全に生物系の論文である．近年代数トポロジーと脳科学の関連性が指摘されている[*2]ように，抽象的な数学の分野と生物の分野がリンクしていくことは，これからの「流れ」になるのかもしれない．

## 0.4　A2

教員：清野和彦

*1 https://www.nature.com/articles/s41467-019-13594-4
*2 https://www.technologyreview.jp/s/6971/

なぜわざわざ A セメのシケプリを 2 分割にしたか，賢い読者諸君ならすぐにわかったはずだ．

専門分野は位相幾何学で，特に四次元多様体への群の作用について研究しているそうだ．シンプレクティック幾何学や，ゲージ理論に関する分野なのだと考えられる．数学科ジョークで「幾何学専攻は四次元を見ることができる」というものがあるのだが，この研究分野を見ればわからなくも，ない？~~専門分野わからなかったからって変なシメにしないで……~~

## 0.5　おまけ 1

教員：WILLOX RALPH

せっかくなので下クラの皆さんの教員も紹介する．

博士は物理学で取得している．物理と数学の間に位置する領域で，物理でよく見られる方程式の研究などを行っている．どうやら最近は生物学との関連も調べているようだ．この教授，かなりのプロである．というのも中学物理が理解できずに，大学の物理の教科書で勉強している．詳しくは [5] へ．

## 0.6　おまけ 2

教員：山﨑満

伝説級の鬼教員である．かわいそうに．専門は非線形偏微分方程式関連である．要は物理で登場する方程式をメインとした解析学を研究している．博士を取得したのはフランスのようだ．フランス語の質問をしてみてもいいかもしれない．2 年飛び級している．

# 1 集合と写像

## 1.1 写像について

写像の定義は,「集合 $X$ の各元に対して,集合 $Y$ の元をただ一つ対応させる規則」である.いや,これでしかない.そのため次のようなもの[*3]も写像と呼んでよい.

$$f(x) = \begin{cases} x & (x \text{ が偶数のとき}) \\ 2x & (x \text{ が奇数のとき}) \\ 0 & (x \text{ が整数ではないとき}) \end{cases}$$

## 1.2 単射と全射について

単射をおおざっぱに言うと「違うやつは違うところにいく」という意味である.

厳密に言うと「$f : A \to B$ について,$A$ の元 $x_1$ と $x_2$ が異なるとき,$B$ の元 $f(x_1)$ と $f(x_2)$ も異なる」となる.

単射ではない例を挙げよう.なお以下すべて $f$ は実数から実数への写像とする.

- $f(x) = x^2$
- $f(x) = \sin x$
- さっき例にあげたやつ

単射の例も挙げよう.

- $f(x) = e^x$
- $f(x) = x^3$

全射をおおざっぱに言うと「写像の行き先を見たら,すべてのところに行っていた」という意味である.[*4]

厳密に言うと「$f : A \to B$ について,任意の $B$ の元 $y$ にたいして,$A$ の元 $x$ が存在し,$f(x) = y$ である」となる.

例のごとく全射にならない例を挙げよう.

- $f(x) = e^x$
- $f(x) = \cos x$

全射の例.

- $f(x) = \log x$
- $f(x) = x^3$

この辺の例を実際にグラフとして書いてみたら,より理解が深まるかもしれない.

全射かつ単射のときは全単射となる.全単射の意味は「$f : A \to B$ について,$f$ が全単射のとき,$A$ と $B$ の元は一対一対応する」ことである.

[*3] なお,この写像は 4 月 30 日の数理科学基礎演習の大問 1 の問 3 で私が用いた写像である.問題の概要は,R の部分集合 $A$,$B$ 及び R から R への写像 $f$ であって,$f(A \cap B) \supset f(A) \cap f(B)$ とならないものを挙げよというものである.この写像に対して $A$ を偶数全体の集合,$B$ を素数全体の集合とすれば,問題の求める集合と写像が用意できる.

[*4] むしろわかりにくくなってますよ

# 2　極限

## 2.1　概要

受験数学での極限とは，割と雰囲気でやっていた．せいぜいはさみうちを駆使する程度である．トニカクゲンミツ[*5]が数学者のモットーなので，そんな雰囲気でやるのはダメなのである．

~~とはいえゲンミツにすべきなのは数学者くらいでその他の学部に行く人にとっては……~~

とにかく今点数がほしいという人のための $\varepsilon$-$\delta$ 論法問題必勝法は簡単で，機械的に証明の文を書くことにつきる．中学生のとき，三角形の合同の証明をやるとき，最初はよくわかんなかったから機械的に辺が等しいだとか書いていなかっただろうか？~~邪道？点数来たらなんでもいーんだよ！~~ということで，演習を積もう！一応例題を後述する．

## 2.2　お気持ちでもわかりたい人向け

$f$ が $x = a$ で連続のときを考える．$\varepsilon$-$\delta$ のお気持ち[*6]はこんな感じ．

$f(a)$ が半径 $\varepsilon$ の傘を開いたとき，どんな $\varepsilon$ であっても，$a$ と距離 $\delta$ 以内のところにある $x$ について，$f(x)$ が傘の中に入ってくる．

これに加えて不連続な図の例を見てお気持ちを理解していただきたい．

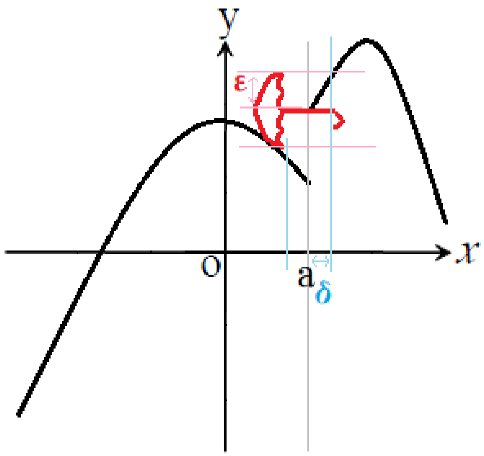


図 1　不連続な例

## 2.3　例題

1. 数列 $\{a_n\}$ を $a_n = a^{\frac{1}{n}}$ で定める．ただし，$a > 1$ とする．このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ であることを示せ．
2. (a) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はそれぞれ $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ を満たす．このとき $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ を示せ．
   (b) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は全問の通りとする．$c_n = \dfrac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1}{n}$ と定めたとき，$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha\beta$ を示せ．

[*5] アニメ化しそう

[*6] このお気持ちは九大の教授から教えてもらったものなので文句は受け付けない

## 2.4　例題の解答

1. i. 解答 1

正の実数 $\varepsilon$ に対して，$N = \left\lfloor \dfrac{1}{\log_a(\varepsilon+1)} \right\rfloor + 1$ とする．$n > N$ のとき，$\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{N} = \dfrac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\log_a(\varepsilon+1)} \right\rfloor + 1} < \dfrac{1}{\frac{1}{\log_a(\varepsilon+1)}} = \log_a(\varepsilon+1)$ である．したがって $a_n = a^{\frac{1}{n}} < a^{\log_a(\varepsilon+1)} = \varepsilon + 1$ であるため，$|a_n - 1| < \varepsilon$ が成立する．以上より，任意の正の数 $\varepsilon$ に対し，$n > N$ ならば $|a_n - 1| < \varepsilon$ となる $N$ がとれる．よって題意は示された．

ii. 解答 2

正の実数 $\varepsilon$ に対して，$N = \left\lfloor \dfrac{a}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ とおく．$n > N$ のとき，$a = \dfrac{a}{\varepsilon}\varepsilon < N\varepsilon < n\varepsilon < (1+\varepsilon)^n$ である．したがって $a_n = a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$ である．以下略．

2. (a) 正の数 $\varepsilon$ をとる．実数 $p, q$ をそれぞれ $\max(\alpha, 1)$，$\max(\beta, 1)$ とおく[*7]．数列 $\{b_n\}$ は $\beta$ に収束するため，ある整数 $N_2$ が存在し，$n > N_2$ で $|b_n - \beta| < \dfrac{\varepsilon}{2\alpha}$ となる．また，$n > N_2$ のとき，$b_n < \beta + \dfrac{\varepsilon}{2\alpha}$ となる．今，$\beta\dfrac{\varepsilon}{2\alpha} < M$ を満たす実数 $M$ を取る．数列 $\{a_n\}$ は $\alpha$ に収束するため，ある整数 $N_1$ が存在し，$n > N_1$ で $|a_n - \alpha| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ となる．ここで $N = \max(N_1, N_2)$ とおく．$n > N$ において，

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - \alpha\beta| &= |a_n b_n - \alpha b_n + \alpha b_n - \alpha\beta| \\
&\leq |b_n||a_n - \alpha| + |\alpha||b_n - \beta| \\
&\leq M|a_n - \alpha| + |\alpha||b_n - \beta| \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M} + \alpha\frac{\varepsilon}{2\alpha} = \varepsilon
\end{aligned}$$

以上より示された．

(b) 正の数 $\varepsilon$ をとる．$M_1 = \max(|\alpha|, 1)$，$M_2 = \max(|\beta|, 1)$ とおく．自然数 $N_1$ で $m > N_1$ のとき $|a_m - \alpha| < \min\left(\dfrac{\varepsilon}{6M_1}, \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{6}}\right)$ となるものが取れる．また自然数 $N_2$ で $m > N_1$ のとき

$$|b_m - \beta| < \min\left(\frac{\varepsilon}{6M_2}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{6}}\right)$$

となるものが取れる．

今，$n > N_1 + N_2$ 及び $n > 2\max(N_1, N_2)$ と取る (これらは後続に現れる $ij$ が矛盾なくとれるようにするためである)．$N_2 < i < n - N_1$，$N_1 < j < n - N_2$ と取り，$k = \max(i, j)$ とする．$\min(n-i+1, n-j+1) = n - k + 1$ となる．$k \leq l \leq n - k + 1$ とすると，

$$|a_l - \alpha| < \min\left(\frac{\varepsilon}{6M_1}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{6}}\right)$$

及び

$$|b_{n-l} - \beta| < \min\left(\frac{\varepsilon}{6M_2}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{6}}\right)$$

である．ゆえに

$$|a_l b_{n-l} - \alpha\beta| < |(a_l - \alpha)(b_{n-l} - \beta)| + |\beta||a_l - \alpha| + |\alpha||b_{n-l} - \beta| < \frac{\varepsilon}{6} + M_1\frac{\varepsilon}{6M_1} + M_2\frac{\varepsilon}{6M_2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

である．

[*7] $\alpha$，$\beta$ が 0 であるときに備えている．

一方で $1 \leq l < k$ とすると，

$$\begin{aligned}|a_l b_{n-l} - \alpha\beta| &< |a_l b_{n-l} - a_l\beta + a_l\beta - \alpha\beta| \\ &< |a_l(b_{n-l} - \beta)| + |\beta||a_l - \alpha| \\ &< \left| a_l \min\left(\frac{\varepsilon}{6M_1}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{6}}\right)\right| + |\beta||a_l - \alpha|\end{aligned}$$

である．これは $n$ によらない定数である．したがって，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_1 b_n - \alpha\beta| + |a_2 b_{n-1} - \alpha\beta| + \cdots + |a_{k-1} b_{n-k+2} - \alpha\beta|}{n} = 0$$

であるから，$n > N_3$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_1 b_n - \alpha\beta| + |a_2 b_{n-1} - \alpha\beta| + \cdots + |a_{k-1} b_{n-k+2} - \alpha\beta|}{n} < \frac{\varepsilon}{4}$$

である．同様にして $n > N_4$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n-k+2} b_{k-1} - \alpha\beta| + \cdots + |a_{n-1} b_2 - \alpha\beta| + |a_n b_1 - \alpha\beta|}{n} < \frac{\varepsilon}{4}$$

である．

今 $n > \max(N_1 + N_2, N_3, N_4)$ とすると，

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{|a_1 b_n - \alpha\beta| + |a_2 b_{n-1} - \alpha\beta| + \cdots + |a_{n-1} b_2 \alpha\beta| + |a_1 b_n - \alpha\beta|}{n} \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{n - 2k + 1}{n}\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

以上より示された．

# 3 微分

特筆すべきことはない．なぜなら試験で解く上では高校時代の計算と何も変わらないので．

Leibniz[*8]測だけは載せておこう．

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

二項定理とだいたい同じだから簡単だ．

# 4 いろんな関数

## 4.1 双曲線関数

三角関数とは，円周上の点を 1 つのパラメタで表現する手法とみなせる．これは $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ とすれば，楕円上の点を 1 つのパラメタで表現する手法とみなせる．同じようなことを二次曲線の仲間こと，双曲線でできないかと考えることは自然である．これが双曲線関数である．

[*8] 数学者であり哲学者である．微分の発明について Newton と争ったことは有名である．哲学では，モナド論についての業績が有名だろうか．なお，(教員が変わっていなければ)A セメスターで開講される現代哲学の授業で彼の思想は学ぶことができる．

$$
\begin{aligned}
\sinh t &= \frac{e^t - e^{-t}}{2} \\
\cosh t &= \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\
\tanh t &= \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}
\end{aligned}
$$

| 三角関数 | 双曲線関数 |
|---|---|
| $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ | $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ |
| $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ | $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$ |
| $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ | $\sinh(x+y) = \cosh x \sinh y + \sinh x \cosh y$ |
| $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ | $\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x$ |
| $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ | $\frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x$ |

## 4.2　逆三角関数

逆関数については高校で既習なので省略する．

ひとつだけ言うことがある．原則として値域は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} &\leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \\
0 &\leq \arccos x \leq \pi \\
-\frac{\pi}{2} &< \arctan x < \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

## 4.3　逆双曲線関数

そもそも双曲線関数は三角関数と異なり，身近な関数で表現できる．これは逆関数でも然りである．

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arsinh} x &= \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\
\operatorname{artanh} x &= \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}
\end{aligned}
$$

arcosh は資料に書いてなかったから書かない．そもそも逆双曲線関数はあまり使わない．なぜなら右辺の関数自体が有用で，わざわざ逆双曲線関数の記号を使う必要性が薄いからである．

## 4.4　微分

逆関数 s の微分を紹介する．なお，計算は自分で行うこと．もしかしたら計算対策プリントに掲載するかもしれない．一応ヒントとして，$\arcsin x$ の~~最初のところだけは~~書いておこう．

$$
\begin{aligned}
y &= \arcsin x \\
\sin y &= x \\
y' \cos y &= 1 \\
y' &= \frac{1}{\cos y} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\arcsin x &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{d}{dx}\arctan x &= \frac{1}{1+x^2} \\
\frac{d}{dx}\operatorname{arsinh} x &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
\frac{d}{dx}\operatorname{artanh} x &= \frac{1}{1-x^2}
\end{aligned}
$$

ちなみに $\operatorname{arsinh} x$ に注目すると，次のような数式が成立する．

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + \mathrm{C}$$

より一般に次のことが示される．

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + \mathrm{C}$$

### 4.4.1　参考問題

次の問題に答えよ．(出典：大学への数学 2019 年 8 月号 学力コンテスト 大問 6[*9])

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$ を計算せよ．
2. $0 \leq x \leq 1$ における曲線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ の凹凸を調べよ．
3. $0.473 < \log \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < 0.485$ であることを示せ．なお，$2.236 < \sqrt{5} < 2.237$ である．

解答まで入力するのは面倒なので，お手元の大数を見ていただきたい．もしくはジュンク堂等に行ってバックナンバーを探していただきたい．

## 5　おまけのコーナー 1：arctan のおもしろ数式

1. $\arctan \dfrac{1}{2} + \arctan \dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$
2. $4\arctan \dfrac{1}{5} - \arctan \dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$　(Machin[*10]の公式)

[*9] 著作権だが，私が投げた問題なのでセーフ，では？ちなみに，自作問題が採用されたとき，15000 円の報酬が出ます．それと掲載される月の大数が送られてきます．

[*10] 17〜18 世紀の数学者・天文学者．この公式は Machin が 1706 年に発見した．Machin はこれを用いて円周率を 100 桁計算したそうだ．

- 1 の証明

  図中の 1 マスは 1×1 の正方形とする．

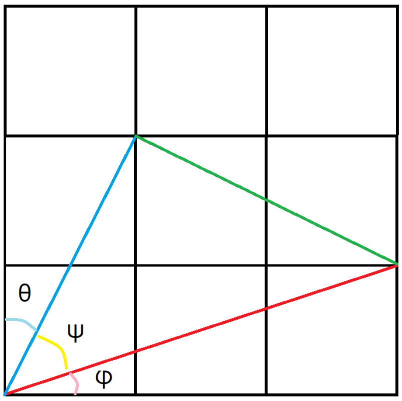


図 2　証明のための図

$\theta = \arctan\dfrac{1}{2}$ 及び $\phi = \arctan\dfrac{1}{3}$ が成立する．今，青線の長さは $\sqrt{5}$ であり，赤線の長さは $\sqrt{10}$ である．さらに緑線の長さは $\sqrt{5}$ である．これより図中の三角形は直角に等辺三角形であり，$\psi = \dfrac{\pi}{4}$ となる．$\theta + \phi + \psi = \dfrac{\pi}{2}$ より $\arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3} = \theta + \phi = \psi = \dfrac{\pi}{4}$

- 2 の証明

  $4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan y = \dfrac{\pi}{4}$ とおく．

$$
\begin{aligned}
y &= \tan\arctan y \\
&= \tan\left(4\arctan\frac{1}{5} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right) - 1}{\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right) + 1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tan 4x &= \frac{2\tan 2x}{1 - \tan^2 2x} \\
&= \frac{2\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}{1 - \left(\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\right)^2} \\
&= \frac{4\tan x - 4\tan^3 x}{1 - 6\tan^2 x + \tan^4 x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right) - 1}{\tan\left(4\arctan\frac{1}{5}\right) + 1} \\
&= \frac{\frac{120}{119} - 1}{\frac{120}{119} + 1} \\
&= \frac{1}{239}
\end{aligned}
$$

となる．

余談だが，$k \arctan \dfrac{1}{x} - \arctan Y = \dfrac{\pi}{4}$ ($k$ と $x$ は正整数，$Y$ は上記のように $k$ と $x$ から計算される有理数) という式を考えたとき，$Y$ が整数の逆数となるケースは限られてくる．$k=2$ のときはペル方程式 (ここでは略) を解くことにより，無数に解が存在することを示せる．$k=4$ のときは $k=2$ における解をさらに考察した上で，Ljunggren の方程式というものを考えることで，上に述べた Machin の公式のケースしか存在しないことが示される．これは非常に興味深いことであり，Machin が 18 世紀にこの公式を発見したことは，もはや「不気味」と言って差し支えないレベルである．世界一美しい数式は Machin の公式と言い切ってもよかろう．なお，$k$ が奇数 (と奇数を素因数に持つ偶数)[*11]のときは解が存在しないらしいが，私は示せていない．

# 6 定積分

特筆すべきことはない．新しく登場した関数が絡む例題を載せておく．

## 6.1 例題

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
3. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2}$
5. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$
6. $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$
7. $\displaystyle\int \arctan x\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

## 6.2 例題の解答

1. $\sqrt{x^2+a^2} = t - x$ とおく。両辺を 2 乗して整理すると、$x = \dfrac{t^2-a^2}{2t}$ となる。よって $\sqrt{x^2+a^2} = t - x = t - \dfrac{t^2-a^2}{2t} = \dfrac{t^2+a^2}{2t}$ となる。また、このとき $dx = \dfrac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt$ であり、

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} &= \int \frac{2t}{t^2+a^2}\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt \\ &= \int \frac{dt}{t} \\ &= \log|t| \\ &= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\end{aligned}$$

2. $x = a\sin t$ とおく。このとき、$dx = a\cos t\,dt$ であり、

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} &= \int \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}} \\ &= \int \frac{\cos t\,dt}{\sqrt{a^2\cos^2 t}} \\ &= \int dt \\ &= t = \arcsin\frac{x}{a}\end{aligned}$$

[*11] 偶数のべき乗のときは上の議論をもうちょっと詳しく見たら示せる．聞きたい人が複数人いたらその話を (未来の私が) まとめるらしいので知りたい人は個別にどうぞ

3.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx &= \int (x)'\sqrt{x^2+a^2}\,dx \\
&= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{x^2+a^2} + \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx - \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx \\
&= x\sqrt{x^2+a^2} + \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| - \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
2\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx &= x\sqrt{x^2+a^2} + \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| \\
\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|\right)
\end{aligned}$$

4. $x = a\tan t$ とおく。このとき、$dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}\,dt$ であり、

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^2+a^2} &= \int \frac{a}{\cos^2 t}\frac{dt}{a^2\tan^2 t + a^2} \\
&= \int \frac{a}{\cos^2 t}\frac{dt}{a^2\tan^2 t + a^2} \\
&= \int \frac{dt}{a} \\
&= \frac{t}{a} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \int (x)'\sqrt{a^2-x^2}\,dx \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \\
&= x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
2\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a} \\
\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\int \arcsin x\,dx &= \int (x)'\arcsin x\,dx \\
&= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\arcsin x - \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

7.

$$
\begin{aligned}
\int \arctan x\,dx &= \int (x)' \arctan x\,dx \\
&= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \\
&= x\arctan x - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)
\end{aligned}
$$

8.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,dx \\
&= \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx \\
&= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\cos x} + \frac{1}{1-\cos x}\right)\sin x\,dx \\
&= \frac{1}{2}(-\log|1+\cos x| + \log|1-\cos x|) \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| \\
&= \frac{1}{2}\log\left|\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right| \\
&= \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|
\end{aligned}
$$

# 7 微分方程式

~~微分方程式解けないのに大学生になったんですか.~~今回必要な微分方程式は単純なパターンのみである．鉄緑会の東大物理を持っている人はそっちでやってほしい．

そもそも微分方程式とは何ぞや？一言でいうと「導関数入りの方程式」である．さっそく実践に移ろう．

## 7.1 変数分離でなんとかなるやつ

今回の試験はたぶんこれしかでない．やったね！変数分離とは，式を整理したら，

$$p(y)y' = q(x)$$

の形になる微分方程式である．これは簡単に解ける．というのも，両辺を $x$ で積分するだけでいいのだ．例を挙げる．

$$
\begin{aligned}
xy + y' &= x \\
y' &= x(1-y)
\end{aligned}
$$

$y=1$ のとき，これは微分方程式を満たす．以下それ以外のときを考える．

$$
\begin{aligned}
\frac{y'}{1-y} &= x \\
\int \frac{y'}{1-y}\,dx &= \int x\,dx \\
-\log|1-y| &= \frac{1}{2}x^2 + \mathrm{C} \quad (\mathrm{C}\text{ は積分定数}) \\
|1-y| &= e^{-\frac{1}{2}x^2 - \mathrm{C}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
1-y &= \pm e^{-\frac{1}{2}x^2-\mathrm{C}} \\
1-y &= \mathrm{A}e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (\mathrm{A} \text{ は } \mathrm{A}=\pm e^{-\mathrm{C}}) \\
y &= 1-\mathrm{A}e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (\mathrm{A} \text{ は } 0 \text{ でない定数})
\end{aligned}
$$

$\mathrm{A}=0$ のとき，$y=1$ でこれも解である．このことから一般解は $y=1-\mathrm{A}e^{-\frac{1}{2}x^2}$(A は任意定数) となる．

この通り，両辺を $x$ で積分するだけでいいのだが，被積分関数の積分が難しかったら解けないしれない．しかし，そんなにひどいものが試験で出ることはないので安心していいよ．

## 7.2　一階斉次線型微分方程式

変数分離で解いておわり．

## 7.3　二階斉次線型微分方程式

受験物理で嫌というほど見たであろう．

$a$，$b$ を実数として，

$$y''+ay'+b=0$$

と表される微分方程式は，$t^2+at+b=0$ の解を $\alpha$，$\beta$ としたとき，以下のようになる[*12]．なお，$C_1$，$C_2$ は任意定数である．

- $\alpha$，$\beta$ が異なる 2 実数解のとき，$y=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{\beta x}$.
- 重解のとき，$y=(C_1+C_2x)e^{\alpha x}$.
- 実数解ではない，すなわち $\alpha,\beta=p\pm q\sqrt{-1}$ のとき，$y=C_1e^{px}\sin qx+C_2e^{px}\cos qx$.

あとは初期条件から $C_1$，$C_2$ を求めれば，その場合の解が得られる．

# 8　偏微分

~~熱力でやったから飛ばすか.~~二変数関数 $z(x,y)$ を $x$ で偏微分するとは，「$y$ を定数と見て，$x$ で微分する」ことである．$y$ での偏微分もまた同じである．記法について注釈 (？) を．偏微分した関数について複数の記法がある．**特に $f_{xy}$ と $f_{yx}$ は間違えやすい[*13]ので注意されたい．**[*14]

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= f_x \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= f_y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= f_{xx} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= f_{xy} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= f_{yx} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= f_{yy}
\end{aligned}
$$

*12 A セメスターの線型代数学で，ベクトル空間の生成系を用いたまともな解法を教わることになる．

*13 このプリントでも途中まで間違えていた．

*14 要は $\dfrac{\partial}{\partial x}$ は右結合なのに対し $()_x$ は左結合ということである．

### 8.1　接平面と勾配

高校時代の微分では，微分係数から接線が求められた．偏微分では曲面の接平面の式を求められる．

$$z = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

簡単である．

明らかに接平面の法線ベクトルは次のようになる．

$$\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$$

また，上記より $-1$ を除いて偏微分係数だけを並べたベクトル

$$\begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

を勾配ベクトルという．二変数関数の増え方の指標となる重要なベクトルだ．このベクトルで「極値」の判定を行う．とはいえ，一変数のときより少し面倒なのだが．

### 8.2　停留点

勾配ベクトルが零ベクトルになるとき，その点を停留点をいう．注意すべきことは，停留点はいつでも極値をとる点でないことだ．これは一変数のときにも $y = x^3$ で見られる．しかし，このケースに加えて，$x$ 方向では極大で，$y$ 方向では極小 (もしくはその逆) というケースが存在する．これを鞍点[*15]という．この辺の判定はこの先詳しくやる．今回はしない．

## 9　Taylor の定理

### 9.1　Taylor の定理

ステートメントは流儀によって違うが，本質的にすべて同じである．私は九州大学の鎌田正良先生から習った方法で記述する[*16]．

$k$ は正の整数とし，関数 $f : (\lambda, \mu) \to \mathbb{R}$ を $(\lambda, \mu)$ で $n+1$ 回微分可能とする．$a, b \in (\lambda, \mu)$ とする．このとき，以下をみたす実数 $\theta \in (0, 1)$ が存在する．

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}((1-\theta)a + \theta b)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

この $k+1$ の項を剰余項と呼ぶ．$((1-\theta)a + \theta b)$ はひとくくりにして，「$\theta$ が存在する」とする代わりに「$\xi \in (a, b)$ が存在する」としても良い．

### 9.2　展開

$b$ を $x$ に置き換えると，

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}((1-\theta)a + \theta x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

[*15] 読み方はよくわからない．「あんてん」で変換できたから多分そう

[*16] 私は九大で仮面していたというわけではない．高校時代，ELCAS(京大でやっていた高大連携事業) の九大 ver に参加していただけである．

となり，左辺の級数を Taylor 級数 (Taylor 展開)[17]と言う．

特に $a=0$ のときを考えると Maclaurin 級数 (Maclaurin 展開) となる．

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

これもまた「$\theta$ が存在する」とする代わりに「$\xi\in(a,b)$ が存在する」としても良い．このとき $\theta x$ が $\xi$ になる．

## 9.3 例題

### 9.3.1 問題

1. 次の関数の Maclaurin 級数を，$x^4$ の項まで求めよ．
   (a) $f(x)=\cosh x$
   (b) $f(x)=\cos^2 x$
   (c) $f(x)=e^x\sin x$
2. ある実数 $\lambda$ に対して，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x-\lambda x^3}{x^5}$ が有限値を取るとき，次の問いに答えよ．
   (a) $\lambda$ の値を求めよ．
   (b) 極限値を求めよ．

### 9.3.2 解答

1. (a) $n\in\mathbb{N}$ に対して，$f^{(2n-1)}(x)=\sinh x$ 及び $f^{(2n)}(x)=\cosh x$ であるため，$f^{(2n-1)}(0)=0$ 及び $f^{(2n)}(0)=1$ である．よって，Maclaurin 展開は，

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots\\&=1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots\end{aligned}$$

よって，$1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$

(b) $f(x)=\cos^2 x$，$f'(x)=-\sin 2x$，$f''(x)=-2\cos 2x$，$f^{(3)}(x)=2^2\sin 2x$，$f^{(4)}(x)=2^3\cos 2x$ となり，$1-x^2+\dfrac{x^4}{3}$

(c) • 解 1

$$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

であり，

$$f''(x)=\sqrt{2}\left(e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+e^x\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)=(\sqrt{2})^2e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$$

となる．以上より $f^{(n)}(x)=(\sqrt{2})^ne^x\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{4}\right)$ と予想される．数学的帰納法から，$n=k$ で成立

[17] ぶっちゃけ Taylor 展開以外の業績を良く知らない．ちなみに前述した Machin の公式の Machin が師匠だったらしい．

を仮定し $n=k+1$ のときを計算すればいい．

$$
\begin{aligned}
f^{(k+1)}(x) &= \left(f^{(k)}\right)' \\
&= \left((\sqrt{2})^k e^x \sin\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)\right)' \\
&= (\sqrt{2})^k \left\{e^x \sin\left(x+\frac{k\pi}{4}\right) + e^x \cos\left(x+\frac{k\pi}{4}\right)\right\} \\
&= (\sqrt{2})^k \left\{\sqrt{2}e^x \sin\left(x+\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right\} \\
&= (\sqrt{2})^{k+1} e^x \sin\left(x+\frac{(k+1)\pi}{4}\right)
\end{aligned}
$$

よって示された．$x=0$ を代入すると，$f(0)=0$，$f'(0)=\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=1$，$f''(0)=2$，$f^{(3)}(0)=(\sqrt{2})^3\dfrac{1}{\sqrt{2}}=2$，$f^{(4)}(0)=0$ である．

以上より，求める多項式は $0+x+\dfrac{2}{2!}x^2+\dfrac{2}{3!}x^3+0=x+x^2+\dfrac{1}{3}x^3$

- 解 2

$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+O(x^5)$ と $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+O(x^5)$ であるため，

$$
\begin{aligned}
e^x \sin x &= \left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+O(x^5)\right)\left(x-\frac{x^3}{3!}+O(x^5)\right) \\
&= x+x^2+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}+O(x^5)-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{6}+O(x^5)+O(x^5) \\
&= x+x^2+\frac{1}{3}x^3+O(x^5)
\end{aligned}
$$

よって，$x+x^2+\dfrac{1}{3}x^3$

- 解 3

$$
\begin{aligned}
e^{(1+i)x} &= 1+(1+i)x+\frac{(1+i)^2}{2!}x^2+\frac{(1+i)^3}{3!}x^3+\frac{(1+i)^4}{4!}x^4+\cdots \\
&= 1+(1+i)x+\frac{2i}{2}x^2+\frac{-2+2i}{6}x^3+\frac{-4}{24}x^4+\cdots \\
&= \left(1+x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4\cdots\right)+i\left(x+x^2+\frac{1}{3}x^3\cdots\right)
\end{aligned}
$$

一方で $e^{(1+i)x}=e^xe^{ix}=e^x(\cos x+i\sin x)$ であるため，実部と虚部を比較して，

$$
\begin{aligned}
e^x\cos x &= 1+x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4\cdots \\
e^x\sin x &= x+x^2+\frac{1}{3}x^3\cdots
\end{aligned}
$$

である．よって求めるものは $x+x^2+\dfrac{1}{3}x^3$ である．

2. この問題は入試問題でも類型を見たことがあったのではなかっただろうか．微分を複数回して大小比較していた三角関数周りの不等式が，実は Maclaurin 展開から簡単に帰結されることを知って驚いた人もいるであろう．

（a）$\tan x$ の Maclaurin 展開より，$\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+O(x^7)$ より，

$$
\begin{aligned}
\frac{\tan x-x-\lambda x^3}{x^5} &= \left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+O(x^7)-x-\lambda x^3\right)\cdot\frac{1}{x^5} \\
&= \left\{\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)x^3+\frac{2}{15}x^5+O(x^7)\right\}\cdot\frac{1}{x^5}
\end{aligned}
$$

であるため，$\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)=0$ となればよい．よって，$\lambda=\frac{1}{3}$ となる．

（b）上の式より，$\frac{2}{15}$ となる．

### 9.4 Taylor 展開の注意点

いつから任意の $C^\infty$ な関数で Taylor 展開ができると錯覚していた……？

グレブナー基底大好き bot さんというおもしろツイッタラーがこのことをツイートしている．是非参照してもらいたい．

https://twitter.com/groebner_basis/status/1234404963108806657

### 9.5 2 変数 Taylor の定理

ステートメントを書くだけ．近傍をこれまで定義したか忘れたので，大意を書くと「距離が $\delta$(かなり小さい正数を想定) 以内」という意味である．

$f(x,y)$ が点 $(a,b)$ の近傍で $C^n$ 級のとき，

$$\begin{aligned} f(a+h,b+k) &= f(a,b)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a,b)+\cdots \\ &\quad +\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(a,b)+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n} f(a+\theta h,b+\theta k) \end{aligned}$$

となる $\theta(0<\theta<1)$ が存在する．

なお，$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(a,b)$ などは，$h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}$ というように，微分をあらわす記号を「括る」ことを意味する[*18]．

### 9.6 逸話

時はロシア革命時のソ連，大学教授をしていた Igor Tamm はある村まで食料調達に行っていた．突然，反社会主義勢力が現れ，ちょっと良い感じの服装をしていた Igor Tamm は捕まってしまった．その集団のボスのもとに連れていかれた Igor Tamm は必至で弁解する．

「俺は共産党なんかには入っていないんだ．大学で数学を教えているんだ」

するとボスは「数学か．それなら当然 Maclaurin の級数を $n$ 項目まで計算したときの剰余項は何だ．わかるだろ？」と言った．銃を突き付けられた Tamm はなんとか答えを書いてボスに渡した．ボスは満足して「これは本物だ．帰っていいぞ」と解放してくれたのだ．

Igor Tamm はその後，1953 年に Pavel Alekseevich Cherenkov と Ilya Mikhailovich Frank と共に Cherenkov 放射の業績でノーベル賞を受賞した．

## 10 おまけのコーナー 2：Maclaurin 展開による近似

Maclaurin 展開は関数の $x=0$ 近傍における多項式近似である．このことを踏まえると円周率の近似計算ができる．

[*18] 微分演算子というお話があるが，ちゃんと議論を展開できるほど解析をしていないから省く．誰か代わりにやって．

## 10.1　$\arctan x$ を用いる

$\arctan x$ の Maclaurin 展開は $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots$ となる．$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ であるから，

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \cdots$$

という級数が求められる．しかし，この級数は収束が恐ろしいほど遅い．$4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} + \cdots\right) = \pi$ に収束するはずである) を計算しよう．100 項目まで計算すると 3.131592035...... となる．1000 項目まで計算すると 3.14059265...... となる．~~舐めてんのかお前.~~100000 項目まで計算すると，3.14158265...... うーんおわりｗ！

遅い理由は簡単で上記の Maclaurin 展開は $x = 0$ 近傍での近似なのに $x = 1$ という外れ値を代入したからである．ということは $x$ に代入する値が小さいと収束が速いのでは？と思うだろう．exactly(イグザクトリー)(そのとおりでございます).

前回のシケ対で紹介した Machin の公式[*19]を使おう．

$$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

これを Maclaurin 展開に適用すると，

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} - \frac{1}{5\cdot 5^5} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} + \cdots\right)$$

である．右辺 4 倍したものを 10 項目まで計算すると 3.1415926535897917...... となる．[*20]

## 10.2　$\arcsin^2 x$ を用いる

実は 2020 年度の京都大学理学部特色入試[*21]第 1 問がまさしくこのトピックである．$F(x) = (\arcsin x)^2$ とすると，これの Maclaurin 展開は，

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2 + \frac{1}{3}x^4 + \frac{8}{45}x^6 + \cdots \\ &= \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2\cdot 2^2}{4!} + \frac{2\cdot 2^2\cdot 4^2}{6!}x^6 + \cdots + \frac{2\cdot 2^2\cdots(2n)^2}{(2n+2)!}x^{2n+2} + \cdots \end{aligned}$$

となる．計算の手法を述べる．$f(x) - \arcsin x$ とおくと，$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ である．$F'(x) = 2f(x)f'(x)$ より，$\sqrt{1-x^2}F'(x) = 2f(x)$ となる．両辺 2 乗して $(1-x^2)\{F'(x)\}^2 = 4\arcsin^2 x = 4F(x)$ となる．さらに両辺を微分すると $-2x\{F'(x)\}^2 + 2(1-x^2)F''(x)F'(x) = 4F'(x)$ と計算される．$F(x)$ が恒等的に 0 ならば，$F(x)$ は定数関数になるが，定義よりこのようにならない．ゆえに上記の式を $2F(x)$ で割ることができ，

$$-xF'(x) + (1-x^2)F(x) = 2$$

が得られる．これの両辺を $n$ 回微分すると，

$$(1-x^2)F^{(n+2)}(x) - 2nxF^{(n+1)} - n(n-1)F^{(n)}(x) - xF^{(n+1)}(x) - nF^{(n)}(x) = 0$$

となる．$x = 0$ を代入して，

$$F^{(n+2)}(0) - n^2F^{(n)}(0) = 0$$

$F(0) = 0$ と $F'(0) = 2\cdot 1\cdot \arcsin 0 = 0$ であるため，Maclaurin 展開の 1 項目と奇数回微分の項は 0 である．$F''(x) = \frac{2}{1-x^2} + 2\arcsin x\frac{-x}{1-x^2}$ より $F''(0) = 2$ である．したがって $F^{(2n)}(0) = 2\cdot 2^2\cdot 4^2\cdot\cdots\cdot(2n-2)^2$ とな

*19 またお前か

*20 おそろしく早い収束，オレでなきゃ見逃しちゃうね．

*21 そういえば昔，京大特色入試に合格した東大生がいたそうですね．

る．これを Maclaurin 展開の式に代入すれば終わりである．が得られる．あとは Maclaurin 展開の式に代入する．なお，この級数は江戸時代中期に和算家の建部賢弘（たけべかたひろ）によって計算された．なお，微積分は利用していない．微積分による計算は彼の発見から 15 年後に Euler によってなされたという．

実際に計算してみる．$x = \dfrac{1}{2}$ を代入すると，$F(x) = \dfrac{\pi^2}{36}$ である．級数を $n$ 項目まで計算したものを $s_n$ とすれば，$\sqrt{36s_n}$ は $\pi$ に収束するはずだ．$n = 10$ のとき 3.141592610...... となる．Machin の公式ほどではないが，早い．なお，特色入試では $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のケースで近似値を計算させていた．

### 10.3　円周率公式

Maclaurin 展開関係ないけど，かの天才数学者 Ramanujan[*22]が見つけた円周率公式を紹介しておく．

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{99^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!\,(1103+26390n)}{(4^n 99^n n!\,)^4}$$

$$\frac{4}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(4n)!\,(1123+21460n)}{882^{2n+1}(4^n n!\,)^4}$$

は？[*23]

## 11　全微分

### 11.1　Landau の記号

これまで見てきたかもしれない Landau[*24]の記号は $x \to 0$ や $x \to \infty$ のものしかなかったのではないか．~~見てない？そう……~~．いまから一般的な領域での Landau の記号を考えていく．まず簡単なケースの復習をする．

$x \to 0$ で関数 $f(x)$ が $o(g(x))$ となることは，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$ となることである．これを $\varepsilon$-$\delta$ を用いて表現すると，$|x| < \delta$ ならば $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon$ である $\delta > 0$ が存在することである．これは 0 の近傍で $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ が限りなく 0 に近づくということだ．近傍を「開集合」であることを鑑みれば，Landau の記号の括弧の中を開集合として定義をすることができる．

さて，$o(|x-a|)$ を定義する．$f(x)$ が $o(|x-a|)$ であることとは，$\displaystyle\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{|x-a|}\right| = 0$ となることである．これを定義することがどう嬉しいのだろうか．これは $f$ の $x = a$ での微分係数をみればわかる．なおここで $f'(a) = p$ とおく．

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \text{ が存在する}\\
\iff &\text{ある実数 } p \text{ に対して,} \frac{f(x)-f(a)-p(x-a)}{x-a} = 0\\
\iff &\text{ある実数 } p \text{ に対して,} f(x)-(f(a)+p(x-a)) = o(|x-a|)
\end{aligned}$$

なにはともあれ Landau の記号は積極的に利用してほしい．Taylor 展開の表記も簡単になる．

### 11.2　全微分

Landau の記号を用いて全微分を記述すると思ったか．バカめ．~~ばかって言うほうがばかなのよ！~~ Landau の記号は授業で取り扱ったから書いたにすぎないのだ．ここでは公式的に全微分の問題で使いそうな式を紹介する．

[*22] Ramanujan の人生をえがいた映画『奇跡がくれた数式』は面白いので見よう！

[*23] https://keisan.casio.jp/exec/system/1259062282

[*24] 物理の教科書を書いている Landau とは別の人物である．とはいえこの Landau も教科書を書いている．

$f(x,y)$ が点 $(a,b)$ で全微分可能である．
$$\iff \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-(f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b))}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0$$

解き方指南としては，これまでの二変数関数の極限のように，ある方向からの極限がおかしくなることで，全微分可能でないことを示すことを覚えておいてほしい．

あと一応式をひとつ紹介する．$f(x,y)$ が点 $(a,b)$ で全微分可能のとき，

$$df\,(a,b) = f_x(a,b)\,dx + f_y(a,b)\,dy$$

を $f(x,y)$ の $(a,b)$ での全微分という．この表示は後々微分形式というパートで似たものを見かけることになるであろう．微分形式については,筆者は対して勉強をしていないため書かない．~~教養学部から抽象代数の授業をすべきだと思いませんか？~~

### 11.3　C ナンタラ級

どこに書くべきかよくわかんなかったからここに載せる．定義を羅列する．

- $C^0$ 級：連続関数
- $C^r$ 級関数：$r$ 回微分 (偏微分) ができて，$r$ 階導関数 (偏導関数) が連続
- $C^\infty$ 級関数：何回でも微分可能

今後数学を勉強すると，解析関数というクラスを $C^\Omega$ と表記する場面と出くわす．それは今後のお楽しみということで．

重要な定理を述べる．

$f(x,y)$ が $C^2$ 級ならば，$f_{xy} = f_{yx}$ である．

これをより一般に言うと，$C^r$ 級な関数については，$r$ 回までの偏導関数は偏微分するときの変数の順番によらないということとなる．

どちらかというと $C^r$ 級の $r$ がよくわかっていない状態で，微分の順番を不用意に入れ替えてはならないことが重要である．

## 12　chain rule

高校時代ここで 3 回挫折した[*25]ので本当に嫌いです[*26]．

chain rule は合成関数の微分のことである．本質的な理解をしたいならば，本を読んでほしい．ここではカンペとして公式を書く．

### 12.1　1 変数に関する chain rule

$z = f(x)$ は微分可能とする．$x$ が 1 変数のときは単なる合成関数の微分である．$x$ が 2 変数の場合が問題となる．

$x = x(u,v)$ は (ある区間で) 偏微分可能であるとする．このとき，

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{dz}{dx}\frac{\partial x}{\partial u}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{dz}{dx}\frac{\partial x}{\partial v}$$

[*25] 本当に数学科志望ですか？
[*26] この男，これにより数検 1 級から撤退している．勉強していたの代数学だったし仕方ないね．

なお，3 変数以上の場合も同様に項を増やせば良い．

## 12.2　2 変数に関する chain rule

$z=f(x,y)$ が全微分可能であるとする．このとき，$x$，$y$ の変数に応じて chain rule を書く．

### 12.2.1　$x$，$y$ が 1 変数関数

$x=x(t)$ と $y=y(t)$ が (ある区間で) 微分可能であるとする．このとき，

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

### 12.2.2　$x$，$y$ が 2 変数関数

$x=x(u,v)$ と $y=y(u,v)$ が (ある区間で) 偏微分可能であるとする．このとき，

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

なお，3 変数以上の場合も同様に項を増やせば良い．

## 12.3　接ベクトル

授業でやったから試験に出るんだろうね．これの本質は chain rule の応用例として旨味[*27]なだけで section とる必要あったのかコレガワカラナイ．

パラメタ $t$ であらわされる空間内の曲線

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

の $t=t_0$ における接ベクトルは，

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

特に，$x$，$y$ が $x=a+pt$，$y=b+qt$ というような $t$ の一次関数で，$z=f(x,y)$ と表されるとき，$t=0$ での接ベクトルは，chain rule の適用により

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ pf_x(a,b)+qf_y(a,b) \end{pmatrix}$$

となる．内容すっからかんなのに縦に長くなってしまった．

## 12.4　例題

腕の運動をしてもらう．

[*27] うまあじ と読むそうですね．

### 12.4.1　問題

1. $z = f(x, y)$ が全微分可能で，$x = x(t)$，$y = y(t)$ が微分可能であるとき，

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}$$

を示せ．

2. 次の関数 $f(x, y, z)$ について，$\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ を求めよ．
   (a) $f(x, y, z) = \log\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$
   (b) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

### 12.4.2　解答

1.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} \\
&= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} \\
&= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}
\end{aligned}$$

2. (a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

であり，これは変数 $y$，$z$ でも成立する．次に，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2 + z^2) - 4x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

であり，同様に $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2x^2 - 2y^2 + 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{2x^2 + 2y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$ となる．したがって，

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\
&= \frac{-2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{2x^2 - 2y^2 + 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{2x^2 + 2y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\
&= \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\
&= \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2}
\end{aligned}$$

(b)　i. 解 1

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - x \cdot \dfrac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\
&= \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}
\end{aligned}$$

同様に，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{-x^2+2y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \dfrac{-x^2-y^2+2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$ となる．よって，

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

ii. 解 2

$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とおく．このとき，$f(r) = \dfrac{1}{r}$ となる．また，$\dfrac{df}{dr} = -\dfrac{1}{r^2}$，$\dfrac{d^2 f}{dr^2} = \dfrac{2}{r^3}$ である．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} \\
&= \frac{df}{dr}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\
&= \frac{df}{dr}\frac{x}{r} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{df}{dr}\frac{x}{r}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\frac{df}{dr}\cdot\frac{x}{r} + \frac{df}{dr}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) \\
&= \frac{df}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{x}{r} + \frac{df}{dr}\frac{r - x\frac{x}{r}}{r^2} \\
&= \frac{d^2 f}{dr^2}\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \frac{df}{dr}\frac{r^2-x^3}{r^3}
\end{aligned}$$

$y$，$z$ についても，上記の変数を変えたものが成立する．すなわち，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{d^2 f}{dr^2}\left(\frac{y}{r}\right)^2 + \frac{df}{dr}\frac{r^2-y^3}{r^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{d^2 f}{dr^2}\left(\frac{z}{r}\right)^2 + \frac{df}{dr}\frac{r^2-z^3}{r^3}
\end{aligned}$$

である．

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\
&= \frac{d^2 f}{dr^2}\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2} + \frac{df}{dr}\frac{3r^2-(x^2+y^2+z^2)}{r^3} \\
&= \frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df}{dr} \\
&= \frac{2}{r^3} - \frac{2}{r}\frac{1}{r^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

以上より解答が出た．このように，偏微分の計算においては，簡単な関数 2 つの合成関数とみなし chain rule を適応することで，簡単に計算できることがある．

## 13　2 変数関数の極大・極小

ここは最大の要所である．公式的に覚えてテストで得点しよう！[*28]

[*28] こう言っているが，筆者は数学科志望だそうだ．

## 13.1 概要

点 $(a,b)$ において関数 $z=f(x,y)$($C^2$ 級とする) が

- 極大である.
  $\Longleftrightarrow$ ある正数 $\delta$ を取ったとき,$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ となる $(x,y)$ において,$f(x,y)<f(a,b)$ である.
- 極小である.
  $\Longleftrightarrow$ ある正数 $\delta$ を取ったとき,$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta$ となる $(x,y)$ において,$f(x,y)>f(a,b)$ である.

なお,この定義を用いるのは最終手段となる.基本的に次に紹介する判別方法でできる分は調べる.[*29]

まず $\Delta(a,b)$ を $\Delta(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-\{f_{xy}(a,b)\}^2$ とおく.

点 $(a,b)$ が $C^2$ 級関数 $f(x,y)$ について $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ をみたすとき,「点 $(a,b)$ は関数 $f(x,y)$ の停留点である」という.

**極大極小判定法**

$(a,b)$ は関数 $f(x,y)$ の停留点であるとする.

- $\Delta(a,b)>0$,$f_{xx}(a,b)<0$ ならば,$f(x,y)$ は $(a,b)$ で極大である.
- $\Delta(a,b)>0$,$f_{xx}(a,b)>0$ ならば,$f(x,y)$ は $(a,b)$ で極小である.
- $\Delta(a,b)<0$ ならば,$f(x,y)$ は $(a,b)$ で極値を取らない (鞍点である).
- $\Delta(a,b)=0$ ならば,これ以上はわからないため,定義に応じて判定を行う.

## 13.2 例題

### 13.2.1 問題

1. 次の関数の極大値と極小値を求めよ.極値がない場合は「極値なし」と答えよ.
   (a) $f(x,y)=x^2-xy+y^2-2x+2y$
   (b) $f(x,y)=x^3+3xy+y^3$
   (c) $f(x,y)=x^4-4xy+y^4$
   (d) $f(x,y)=x^2y^2-x^2-y^3$
2. 関数 $F(x,y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ が極小値をとれば,その値は関数 $F(x,y)$ の最小値であり,極大値をとれば,その値は関数 $F(x,y)$ の最大値であることを示せ.ただし,$a\neq 0$,$b\neq 0$ とする.

### 13.2.2 解答

1. (a) $f_x(x,y)=2x-y-2$,$f_y(x,y)=2y-x+2$ である.連立方程式

$$\begin{cases} 2x-y-2=0 \\ -x+2y+2=0 \end{cases}$$

を解くと,$(x,y)=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$

$f_{xx}(x,y)=2$, $f_{yy}(x,y)=2$, $f_{xy}(x,y)=1$ である.$\Delta(x,y)=4-1>0$ である.これより,$\Delta\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)>0$ である.また,$f_{xx}\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)=2>0$ なので $\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ は極小値をとる.このとき,$f\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{3}$

[*29] 上記でいちいち不等式を書いたが,これを一言「近傍」と言ってしまっても良かった.しかし,実際に計算するときはこうやることになるため書いた.また,人によっては近傍の不等式が異なることがあるが,上記の不等式での議論に帰着できるため,気にしなくてよい.

である．

$\underline{\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)\text{ のとき極小値 }-\frac{4}{3}}$

（b）$f_x(x,y)=3x^2+3y$，$f_y(x,y)=3x+3y^2$ である．$f_x=0$，$f_y=0$ を解くと，$(x,y)=(0,0),(-1,-1)$ である．

$f_{xx}(x,y)=6x$，$f_{yy}(x,y)=6y$，$f_{xy}(x,y)=3$ であるから，$\Delta(x,y)=f_{xx}f_{yy}-\{f_{xy}\}^2=36xy-9$ となる．$\Delta(0,0)=-9$ より，$(0,0)$ では極値をとらない．$\Delta(-1,-1)=27>0$，$f_{xx}(-1,-1)=-6<0$ ゆえに $(-1,-1)$ は極大値をとる．$f(-1,-1)=-1+3-1=1$ である．

$\underline{(-1,-1)\text{ のとき極大値 }1}$

（c）$f(x,y)=x^4-4xy+y^4$ より、$f_x(x,y)=4x^3-4y$，$f_y(x,y)=-4x+4y^3$ である．$f_x=0$，$f_y=0$ を解くと，$(x,y)=(0,0),(1,1),(-1,-1)$ である．

$f_{xx}(x,y)=12x^2$，$f_{yy}(x,y)=12y^2$，$f_{xy}(x,y)=-4$ であるから，$\Delta(x,y)=144x^2y^2-16=16(9x^2y^2-1)$ となる．

$\Delta(0,0)=-16<0$ より，$(0,0)$ では極値をとらない．

$\Delta(1,1)=128>0$，$f_{xx}(1,1)=12>0$ であるゆえに $(1,1)$ は極小値を取る．$f(1,1)=-2$ より極小値は $-2$ である．

$\Delta(-1,-1)=128>0$，$f_{xx}(-1,-1)=12>0$ であるゆえに $(-1,-1)$ は極小値を取る．$f(-1,-1)=-2$ より極小値は $-2$ である．

$\underline{(1,1)\text{，}(-1,-1)\text{ のとき極小値 }-2}$

（d）$f_x(x,y)=2xy^2-2x=2x(y^2-1)$，$f_y(x,y)=2yx^2-3y^2=y(2x^2-3y)$ である．

$f_x=0$ となるのは，$x=0$ のとき，または $y=\pm1$ のときである．

$x=0$ のとき，$f_y=-3y^3$ であるので，この下で $f_y=0$ の解は $y=0$ となる．

$y=1$ のとき，$f_y=2x^2-3$ であるので，この下で $f_y=0$ の解は $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$

$y=-1$ のとき，$f_y=-(2x^2+3)<0$ であるので，このとき解はない．

上記をまとめると，極値をとる候補は $(0,0),\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2},1\right)$ である．

$f_{xx}(x,y)=2(y^2-1)$，$f_{yy}(x,y)=2x^2-6y$，$f_{xy}(x,y)=4xy$ である．これより，$\Delta(x,y)=4(y^2-1)(x^2-3y)-16x^2y^2$ となる．

$\Delta(0,0)=0$ となる．これだけでは極値をとるのかわからない．そのため，平面 $x=0$ でも曲面も断面を考える．このとき，$f(0,y)=-y^3$ であるため，この平面上の曲線は $y=0$ で極値をとらない．ゆえに，$(0,0)$ で極値をとることはない．

$\Delta\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{2},1\right)=4(1-1)\left(\frac{3}{2}-3\right)-16\cdot\frac{3}{2}\cdot1=-24<0$ であるため，この点では極値をとらない．

<u>極値なし</u>

2.（解）関数 $F(x,y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ について[*30]，$F_x=2(ax+hy+g)$，$F_y(x,y)=2(hx+by+f)$，$F_{xx}(x,y)=2a$，$F_{yy}(x,y)=2b$，$F_{xy}(x,y)=2h$ である．これより，$\Delta(x,y)=4(ab-h^2)$ である．

さて，極値をとる点を $(x_0,y_0)$ とすると，その点は次の連立方程式をみたす．

$$\begin{cases}ax_0+hy_0+g=0\\hx_0+by_0+f=0\end{cases}\tag{2}$$

(i) $h^2-ab\neq0$ のとき．

連立方程式を解いて，$(x_0,y_0)=\left(\frac{bg-hf}{h^2-ab},\frac{af-hg}{h^2-ab}\right)$ となる．この点で極値をとることを考える．$\Delta(x_0,y_0)=ab-h^2\geq0$ のときに極値になりうる．条件である $h^2-ab\neq0$ とあわせて，$ab-h^2>0$

[*30] やさしいので解きやすいように係数をいじっている．具体的には $2g$ などがそう．

をみたすことがわかる．$F_{xx}(x,y)=2a$ より，$a>0$ のとき $(x_0,y_0)$ で極小値をとり，$a<0$ のとき $(x_0,y_0)$ で極大値をとる．
今，2 個の 0 ではない実数 $p,q$ を任意にとる．Taylor の定理をあてはめて，

$$\begin{aligned}
&F(x_0+p,y_0+q)-F(x_0,y_0)\\
&=pF_x(x_0,y_0)+qF_((x_0,y_0)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left\{p^2F_{xx}(x_0+\theta p,y_0+\theta q)+2pqF_{xy}(x_0+\theta p,y_0+\theta q)+q^2F_{yy}(x_0+\theta p,y_0+\theta q)\right\}\\
&=\frac{1}{2}(p^2\cdot 2a+2pq\cdot 2h+q^2\cdot 2b)\\
&=ap^2+2hpq+bq^2\\
&=a\left(p+\frac{h}{a}q\right)^2+\frac{ab-h^2}{a}q^2\\
&=a\left(\left(p+\frac{h}{a}q\right)^2+\frac{ab-h^2}{a^2}q^2\right)
\end{aligned}$$

なお $0<\theta<1$ である．また，式変形の途中で，$F_x(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)=0$ 及び，$F_{xx}$，$F_{xy}$，$F_{yy}$ が定数関数[*31]であることを用いた．
このとき，極値をとる条件から，$ab-h^2>0$ であるため．

$$\left(p+\frac{h}{a}q\right)^2+\frac{ab-h^2}{a^2}q^2\geq\frac{ab-h^2}{a^2}q^2>0$$

となる．ゆえに，

$$\left(p+\frac{h}{a}q\right)^2+\frac{ab-h^2}{a^2}q^2>0$$

である．これより以下が成立する．

- $a>0$ のとき，$F(x_0,y_0)$ は極小値をとるが，$\dfrac{ab-h^2}{a}>0$ であるから，$F(x_0+p,y_0+q)-F(x_0,y_0)>0$ となる．$p,q$ のとり方は任意なので，$F(x_0,y_0)$ は最小値をとることがわかる．
- $a<0$ のとき，$F(x_0,y_0)$ は極大値をとるが，$\dfrac{ab-h^2}{a}<0$ であるから，$F(x_0+p,y_0+q)-F(x_0,y_0)<0$ となる．$p,q$ のとり方は任意なので，$F(x_0,y_0)$ は最大値をとることがわかる．

(ii) $h^2-ab=0$ のとき．
問題の条件より，$a,b\neq 0$ であるため，$h\neq 0$ となる．このとき，$ab=h^2>0$ より，$a,b>0$ もしくは $a,b<0$ となる．連立方程式に $h=\pm\sqrt{ab}$(以下複合同順とする) を代入すると，

$$\begin{cases}ax_0\pm\sqrt{ab}y_0+g=0\\ \pm\sqrt{ab}x_0+by_0+f=0\end{cases}$$

2 つ目の式を変形すると，$\pm\sqrt{\dfrac{b}{a}}\left(ax_0+\pm\sqrt{ab}y_0\pm\sqrt{\dfrac{a}{b}}f\right)=0$ となる．これより，$\pm\sqrt{\dfrac{a}{b}}f\neq g$ のとき，連立方程式をみたす $(x_0,y_0)$ は存在しないため，そもそも極値をとらない．
$\pm\sqrt{\dfrac{a}{b}}f=g$ のとき，$ax_0+hy_0+g=0$ をみたす点 $(x_0,y_0)$ すべてで連立方程式は成立する．今からこの場合において，任意の点で極値をとることがないと示す．

[*31] これより $\theta$ が消えるのがうま味．

今，2 個の実数 $p, q$ を任意にとる．Taylor の定理をあてはめて，

$$\begin{aligned}
&F(x_0+p, y_0+q) - F(x_0, y_0)\\
&= pF_x(x_0, y_0) + qF_y(x_0, y_0)\\
&\quad + \frac{1}{2}\left\{p^2F_{xx}(x_0+\theta p, y_0+\theta q) + 2pqF_{xy}(x_0+\theta p, y_0+\theta q) + q^2F_{yy}(x_0+\theta p, y_0+\theta q)\right\}\\
&= \frac{1}{2}(p^2\cdot 2a + 2pq\cdot 2h + q^2\cdot 2b)\\
&= ap^2 + 2hpq + bq^2\\
&= a\left(p + \frac{h}{a}q\right)^2
\end{aligned}$$

今，$p = -\dfrac{h}{a}q$ というように $p$，$q$ をとれば，$F(x_0+p, y_0+q) - F(x_0, y_0) = 0$ となる．したがって，この条件のもとで極値をとる点自体が存在しない．

以上で証明終了．

***

(別解) 極値をもつ条件の $ab - h^2 \neq 0$ という形を見てお気づきの方も多いだろうが，これは「行列

$$A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$$

は正則行列」という条件と同値である．$A$ は (2) の書き換え

$$A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}$$

として出現するだけでなく，二次形式[*32]

$$F(x,y) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) + c, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}$$

に現れる．ここで，$(\cdot,\cdot)$ は $\mathbb{R}^2$ の標準内積である．対角化することで $xy$ のように 2 文字が掛かっている項を消せるので，変換後の座標で極値判定を行ってからもとの座標に戻せばよい．

*Proof.*

$$A = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix}$$

とすると

$$F(x,y) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) + c, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}$$

であり，$A$ は実対称行列ゆえ直交行列 $P$ が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} =: D$$

を満たす．$\lambda_1, \lambda_2$ は $A$ の固有値である．$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = P^{-1}\boldsymbol{x}$,　$\boldsymbol{b}P^{-1} = \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix}$ とおくと

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}) + c\\
&= (\boldsymbol{y}, D\boldsymbol{y}) + 2(\boldsymbol{b}P^{-1}, \boldsymbol{y}) + c\\
&= \lambda_1 s^2 + \lambda_2 t^2 + 2js + 2kt + c =: G(s,t)
\end{aligned}$$

[*32] この辺の言葉は線型代数でそのうち出てくるのでここでは説明しない．

となり

$$
G_s(s,t)=2(\lambda_1 s+j),\quad G_t(s,t)=2(\lambda_2 t+k),
$$
$$
G_{ss}(s,t)=2\lambda_1,\quad G_{tt}(s,t)=2\lambda_2,\quad \Delta(s,t)=4\lambda_1\lambda_2\quad (\text{下 3 つは定数関数})
$$

である．

(i) $\lambda_1=0\lor\lambda_2=0$ のとき
　$s,t$ のうち少なくとも 1 つの変数に関して一次関数であるから極小値や極大値をもたない．

(ii) $\lambda_1\neq 0\land\lambda_2\neq 0$ のとき
　停留点は $(s,t)=\left(-\dfrac{j}{\lambda_1},-\dfrac{k}{\lambda_2}\right)=:(s_0,t_0)$ で，これを用いると

$$
G(s,t)=\lambda_1(s-s_0)^2+\lambda_2(t-t_0)^2+(\text{定数})
$$

　と書ける．よって
　(a) $\lambda_1>0\land\lambda_2>0$ のとき
　　$(s_0,t_0)$ で極小値，さらに最小値
　(b) $\lambda_1<0\land\lambda_2<0$ のとき
　　$(s_0,t_0)$ で極大値，さらに最大値
　をとる．それ以外のとき極値をとらない．

$$
\begin{aligned}
\lambda_1\neq 0\land\lambda_2\neq 0 &\iff A\text{ は固有値として }0\text{ をもたない}\\
&\iff \det(A-0\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})\neq 0\\
&\iff \det A\neq 0 && (\iff A\text{ は正則行列})\\
&\iff ab-h^2\neq 0
\end{aligned}
$$

である．$(s_0,t_0)$ は，$xy$ 平面の点としては $(x_0,y_0)^\top\coloneqq P(s_0,t_0)^\top$ にあたる．したがって，$ab-h^2\neq 0$ のとき $F(x,y)$ は極値をもち，極小値 (resp. 極大値) をとる点があればその点で最小値 (resp. 極大値) をとる．□

# 14　陰関数定理

## 14.1　特異点

$f(x,y)$ を $C^1$ 級関数とする．曲線 $C$ は $f(x,y)=0$ (陰関数) で与えられる曲線とする．「$(a,b)$ が $C$ の特異点である」とは，$f(a,b)=0$ かつ $f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ が成立するような点 $(a,b)$ のことである．

わかりやすく言うと下図 $y^2=x^3+x^2$ など[*33]のように曲線が交錯してしまう点のことである．

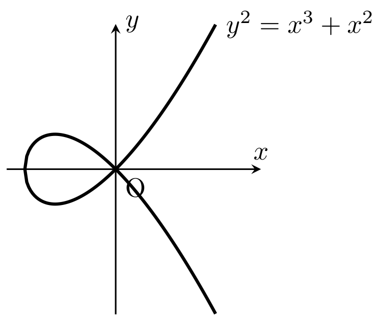


図 3　特異点をもつ曲線の例

[*33] 所謂楕円曲線である．今回楕円曲線には触れない．

特異点解消といえば，日本を代表する数学者広中平祐先生[*34]の研究テーマだ．しかし，ここでは触れないでおく．

## 14.2 陰関数定理

すごく大雑把にいうと，$F(x,y)=0$ という関数がある条件をみたすとき，$y=f(x)$ と書き換えられるということだ．まじめにいうと次のようになる．

陰関数定理 1

$(x_0,y_0)$ の近傍で $C^1$ 級の二変数関数 $F(x,y)$ について，$F(x_0,y_0)=0$ かつ $F_y(x_0,y_0)\neq 0$ とする．このとき $C^1$ 級関数 $y=f(x)$ が存在して，$(x_0,y_0)$ の近傍で $F(x,y)=0 \iff y=f(x)$ が成立する．

$x$ と $y$ について逆に見てもよい．

陰関数定理 2

$(x_0,y_0)$ の近傍で $C^1$ 級の二変数関数 $F(x,y)$ について，$F(x_0,y_0)=0$ かつ $F_x(x_0,y_0)\neq 0$ とする．このとき $C^1$ 級関数 $x=f(y)$ が存在して，$(x_0,y_0)$ の近傍で $F(x,y)=0 \iff x=f(y)$ が成立する．

これを応用して次のような接線公式が示される (ここで示すとは言っていない)．

$F(x,y)$ を $C^1$ 級関数とし，$F(a,b)=0$,「$F_x(a,b)\neq 0$ または $F_y(a,b)\neq 0$」とする．このとき，曲線 $F(x,y)=0$ の点 $(a,b)$ での接線は，$F_x(a,b)(x-a)+F_y(a,b)(y-b)=0$ で与えられる．

高校時代に円や楕円，双曲線の接線公式を通して，似たようなものを「再発見」していた人もいるだろう．それが正当化されたのだ．

# 15 Lagrange の未定乗数法

## 15.1 定理

Lagrange の未定乗数法は，$x$，$y$ が方程式を通して制約があるとき，関数 $f(x,y)$ の極値を調べる方法である．

Lagrange の未定乗数法

関数 $f(x,y)$ 及び $g(x,y)$ は $C^1$ 級とする．点 $(x,y)$ は，$g(x,y)=0$ をみたすものとする．関数 $f(x,y)$ が点 $(a,b)$ において広義の意味で極値を取るとき，$(a,b)$ は以下をみたす．

$$\begin{cases} g(a,b)=0 \\ g_x(a,b)f_y(a,b)-g_y(a,b)f_x(a,b)=0 \end{cases}$$

広義の極大・極小は前述べた極大・極小の定義における $<(>)$ を $\leq(\geq)$ に置き換えたものである．具体例から言えば，$x=0$ における $y=x^3$ も含めて考えていることとなる．また，あくまでも広義極値を取る必要条件であり，必要十分条件ではないことに気を付けてほしい．

## 15.2 例

$f(x,y)=x+y$，$g(x,y)=x^2+y^2-1$ として Lagrange の未定乗数法を当てはめる．

$$\begin{aligned} g_x(a,b)f_y(a,b)-g_y(a,b)f_x(a,b) &= 2a\cdot 1-2b\cdot 1 \\ &= 2(a-b) \end{aligned}$$

[*34] 実は会ったことがある．すごいだろー

連立方程式は,

$$\begin{cases} a^2+b^2-1=0 \\ a-b=0 \end{cases}$$

となり，これを解くと[*35] $(a,b)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ となる．後は代入するだけ (省略)．高校時代に解いた通りだ．

# 16　おまけのコーナー 3：開集合・連続・極限

せっかくなので数学系や理論物理系で必須となる「位相空間論」のさわりをやろうと思う．~~これいる？~~理数に行きそうな人も理物に行きそうな人もいるから多少はね？

## 16.1　実数について

### 16.1.1　実数における絶対値と収束

実数の構成をゲンミツにやりたいところだが，さすがに長すぎるので割愛．詳しくは来年解析でやるんじゃないかな．

実数の絶対値 $|a|$ を次のように定める．

$$|a|=\begin{cases} a & (a\geq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

さて，2 実数 $x$，$y$ に対して，写像 $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+=\{x\mid x\geq 0\}$ を $d(x,y)=|x-y|$ と定める．このとき，$d$ は以下 3 つの性質を持つ．

- $\mathbb{R}$ の元 $x$，$y$ に対して，$d(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$
- $\mathbb{R}$ の元 $x$，$y$ に対して，$d(x,y)=d(y,x)$
- $\mathbb{R}$ の元 $x$，$y$，$z$ に対して，$d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$

これを 2 実数 $x$，$y$ の距離という．正数 $\varepsilon$ に対して，$\varepsilon$ 近傍を $U(a;\varepsilon)=\{x\mid d(x,a)<\varepsilon\}$ と定める．

これを用いれば，数列 $\{a_n\}$ が $a$ に収束することは,「任意の正数 $\varepsilon$ に対して，$n>n_0\Rightarrow x_n\in U(a;\varepsilon)$ をみたす自然数 $n_0$ が存在すること」と書き直せる．

### 16.1.2　開集合の書き直し

まず，$\varepsilon$ 近傍を用いて新たなことばをいくつか定める．抽象的なので，後から例を載せる．そこから見るのもいいかもしれない．以下 $A$ は $\mathbb{R}$ の部分集合である．

| | | |
|---|---|---|
| $x$ は $A$ の内点である． | $\Longleftrightarrow$ | $U(x;\delta)\subset A$ をみたす正数 $\delta$ が存在する． |
| $x$ は $A$ の外点である． | $\Longleftrightarrow$ | $U(x;\delta)\subset\mathbb{R}\setminus A$ をみたす正数 $\delta$ が存在する． |
| $x$ は $A$ の境界点である． | $\Longleftrightarrow$ | 任意の $\varepsilon$ に対して，$U(x;\varepsilon)\cap A\neq\phi$ 及び $U(x;\varepsilon)\cap\mathbb{R}\setminus A\neq\phi$ が成り立つ． |
| $x$ は $A$ の触点である． | $\Longleftrightarrow$ | 任意の $\varepsilon$ に対して，$U(x;\varepsilon)\cap A\neq\phi$ が成り立つ． |
| $x$ は $A$ の集積点である． | $\Longleftrightarrow$ | $x$ は $A\setminus\{x\}$ の触点である． |
| $x$ は $A$ の孤立点である． | $\Longleftrightarrow$ | $U(x;\delta)\cap A=\{x\}$ をみたす正数 $\delta$ が存在する． |

これだけで理解したならば，相当である．例を挙げよう．

[*35] 計算過程を飛ばしているが計算できないということではない．ちゃんと紙に書いたもん．

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 4\}$ とする．
   - $A$ の内点全体の集合は $\{x \mid -2 < x < 4\}$ である．
   - $A$ の外点全体の集合は $\{x \mid x < -2, 4 < x\}$ である．
   - $A$ の境界点は $x = -2, 4$ である．
   - $A$ の触点全体の集合は $\{x \mid -2 \leq x \leq 4\}$ である．
   - $A$ の集積点は存在しない (別の例を待て).
   - $A$ の孤立点は存在しない．
2. $B = \left\{x \,\middle|\, x = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\right\}$ とする．
   - 内点は存在しない．
   - 外点全体の集合は $\left\{x \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{Z}, x \neq \dfrac{1}{n}\right\}$ である．
   - 境界点全体の集合は $\left\{x \,\middle|\, x = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\right\}$ である．
   - 触点全体の集合は $\left\{x \,\middle|\, x = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{0\}$ である．
   - 集積点は $x = 0$ である．
   - 孤立点は整数 $n$ を用いて $x = \dfrac{1}{n}$ となる点である．

このうちほとんどは直観的に明らかですぐ証明できるだろう．しかし，いくつかは証明を載せたいものがあるので書く．

- $B$ の触点についての証明
  $x \in B$ については, $U(x;\varepsilon) \cap B$ は明らかに $x$ を含むことから触点である．次に 0 が触点であることを示す．正数 $\varepsilon$ を任意にとったとき, $\varepsilon > \dfrac{1}{n_0}$ となる正の整数 $n_0$ が存在する．そのため, $U(0;\varepsilon) \cap B = \left\{x \,\middle|\, x = \dfrac{1}{n}, |n| \geq n_0\right\}$ となる．ゆえに触点である．上記を除く点が触点でないことは $\varepsilon$ をきわめて小さくとれば，明らかである．
- $B$ の集積点についての証明
  $B$ は定義上 0 を含まない．よって $B \setminus \{0\} = B$ であり，触点の証明から，0 は $B \setminus \{0\}$ の触点である．

ここから煩雑な言葉を読み解いていこう．

1 つめの例からわかることから述べる．内点とは「開集合の要素」である．また触点は「閉集合の要素」である．境界点はまさに不等式の端であった．ここから内点・触点を用いて開集合・閉集合を定義できそうに思うだろう．それはもう少し後に．

2 つめの例から何がわかるのだろうか．まず，離散的な集合で内点を考えようがないことがわかる．また，孤立点とは読んで字のごとく~~理 3~~ 離散している点のことだ．さらに興味深いことがある．それは触点全体の集合に 0 が紛れ込んでいることだ．また，集積点が紛れ込んだ 0 となっていることも面白い．さて，ここで数列 $a_n = \dfrac{1}{n}$ というものを考える．$\{a_n\}$ の極限は 0 である．しかし 0 はどのような $n$ をもってしても $a_n = 0$ とならない．これが集積点の「答え」だ．

$B$ という集合で先ほどの数列 $\{a_n\}$ を考えると，この数列の収束先は $B$ に含まれていないのだ！これを踏まえると，触点を集めることは，元の集合に，その集合から作られる数列の収束先を追加することだといえる．ここで追加された点が集積点なのだ．

さてここからは開集合・閉集合をこうした言葉で書き直す．$\mathbb{R}$ の部分集合 $A$ が開集合とは，$A$ の内点全体の集合が $A$ に一致する集合と定義する．

ここで $\mathbb{R}$ のすべての開集合の集合を $\mathcal{O}$ とする．このとき，以下が成立する．

- 有限個の開集合の共通部分は開集合である．
- 任意個 (無限個でも可能) の開集合の和集合は開集合である．
- $\phi$ と $\mathbb{R}$ は開集合である．

「有限個の開集合の共通部分は開集合である」ことに関して，無限個では不備が起こるのかと疑問に思う方もいるだろう．実際に例を挙げると，$I_n = \left(-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$ としたとき，$\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\}$ となるが，$\{0\}$ は開集合ではない．最後の性質はやや不気味に感じるかもしれない．私自身，初めて勉強したとき $\mathbb{R}$ ならともかく，$\phi$ は開集合なのかと思った．そもそも $\phi$ には内点自体が存在しないため，これの内点全体の集合が $\phi$ になってしまい，開集合だと示される．

$\mathbb{R}$ の部分集合 $F$ が閉集合とは，$F$ の補集合 $A \setminus F$ が閉集合である集合と定義する．ここで $\mathbb{R}$ のすべての閉集合の集合を $\mathcal{A}$ とする．このとき，以下が成立する．

- 任意個 (無限個でも可能) の閉集合の共通部分は閉集合である．
- 有限個の閉集合の和集合は閉集合である．
- $\phi$ と $\mathbb{R}$ は閉集合である．

「有限個の閉集合の和集合は閉集合である」であるが，$F_n = \left[\dfrac{1}{n}, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$ としたとき，$\bigcup F_n = (0, 1)$ となることから，無限個ではダメだとわかる．また，$\phi$ と $\mathbb{R}$ は開かつ閉な集合である．

またこの定義から，$F$ が閉集合である必要十分条件は $F$ の触点全体の集合が $F$ になることだと示すことができる．

#### 16.1.3　連続関数の書き直し

そもそも関数 $f$ が $x = a$ で連続であることの定義は何であったか確認しよう．「任意の正数 $\varepsilon$ に対して正数 $\delta$ で「$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$」をみたすものが存在する．」であった．これは $f(a)$ の $\varepsilon$ 近傍をとったとき，ある $\delta$ が存在し $a$ の $\delta$ 近傍に含まれる $x$ に対して，$f(x)$ が $f(a)$ の $\varepsilon$ 近傍に含まれることと書き直せる．$A, B \subset \mathbb{R}$ とし，$f : A \to B$ に対して，

$$f(U(a;\delta) \cap A) \subset U(f(a);\varepsilon) \cap B$$

ということだ．

ここでよく見ると，$U(a;\delta)$，$U(f(a);\varepsilon)$ が開集合である．この事実を踏まえてさらに書き直す．

関数 $f : A \to B$ が点 $a \in \mathbb{R}$ で連続であることは，$f(a)$ を含む任意の開集合 $U$ について，$f^{-1}(U \cap B) = O \cap A$ をみたす $a$ を含んだ開集合 $O$ が存在することである．

## 16.2　距離空間

$\varepsilon$-$\delta$ 論法を思い出してみよう．関数 $f$ が $x = a$ で連続であることは，絶対値が数同士の距離であることを思えば，「なんでもいいから実数 $\varepsilon$ を取ると，実数 $\delta$ で，$a$ から距離 $\delta$ 未満の点 $x$ であれば，$f(a)$ と $f(x)$ の距離が $\varepsilon$ になる」と言える．この $|x - a| < \delta$ という領域に「意味」を見出そう．これが位相空間論の基礎，距離空間の気持ちである．

#### 16.2.1　定義

集合 $X$ の元 $x$，$y$ に対して，実数 $d(x, y)$ を定める写像 $d : X \times X \to \mathbb{R}^+ = \{x \mid x \geq 0\}$ が以下 3 条件をみたすとき，$d$ を距離関数という．

- $X$ の元 $x$，$y$ に対して，$d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
- $X$ の元 $x$，$y$ に対して，$d(x, y) = d(y, x)$
- $X$ の元 $x$，$y$，$z$ に対して，$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

距離関数 $d$ を持つ集合を距離空間，$d(x, y)$ を $x$ と $y$ の距離と呼ぶ．今後 $(X, d)$ と書いた場合，集合 $X$ に距離 $d$ を導入した距離空間を意味する．

以下例．

1. 実数集合 $\mathbb{R}$ の元 $a$，$b$ に対して，$d$ を $d(a, b) = |a - b|$ と定めたならば，これは距離となる．
2. $xy$ 平面上の点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$，$\mathrm{B}(x_2, y_2)$ に対して，$d$ を $d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ と定めたならば，こ

れは距離となる．

3. $\mathbb{R}^n$ 点 $\mathrm{P}(p_1, p_2, \cdots, p_n)$，$\mathrm{Q}(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ に対して，$d$ を $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \cdots (p_n - q_n)^2}$ と定めたならば，これは距離である．特にこの距離空間を $n$ 次元ユークリッド空間と呼ぶ．
4. $\mathbb{R}^n$ 点 $\mathrm{P}(p_1, p_2, \cdots, p_n)$，$\mathrm{Q}(q_1, q_2, \cdots, q_n)$ に対して，$d$ を $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \max\{|p_i - q_i|\}$ と定めたならば，これは距離である．
5. 整数 $k$，素数 $p$ に対して $\mathrm{ord}_p(k)$ を「$k$ が $p$ で割り切れる回数」と定める．このとき 2 整数 $m$，$n$ に対して，$d$ を $d(n, m) = p^{-\mathrm{ord}_p(n-m)}$ と定めたならば，これは距離である．この距離は $p$ 進距離と呼ばれる．興味のある人は [15] を読んでほしい．駒場図書館にもおいてある．

### 16.2.2 開集合等の書き直し

実は前にやった実数での開集合の書き直しと全く同じことができる．連続関数も然り．さて，この距離の概念を導入することで何が嬉しいのだろうか．それは単純で，実数以外の集合で，実数のような収束性の議論が出来るようになるのだ．例えば，関数の集合に距離を導入することで関数列の収束を深く見ることができる．ただし，書く量をこれ以上増やしたくないため省略する．

## 16.3 一般の位相空間

より一般に位相空間というものを定義しよう．前回実数から距離という性質だけを取り出し，一般化をした．今回は開集合という性質だけを取り出す．

集合 $X$ が位相空間であるとは，$X$ の部分集合の族 $\mathcal{O}(X)$ で，次の性質をみたすものが用意された集合である．

- 有限個の $\mathcal{O}(X)$ に属する集合の共通部分は $\mathcal{O}(X)$ に属する．
- 任意個 (無限個でも可能) の $\mathcal{O}(X)$ に属する集合の和集合は $\mathcal{O}(X)$ に属する．
- $\phi$ と $\mathbb{R}$ は $\mathcal{O}(X)$ に属する．

集合 $X$ に $\mathcal{O}(X)$ を定めることを「$X$ に位相を定める」という．また $(X, \mathcal{O}(X))$ を位相空間という．$\mathcal{O}(X)$ の定義が開集合のみたす性質そのままだとすぐに気付くだろう．このようなこともあり，$\mathcal{O}(X)$ を開集合系，その元を開集合という．また，上記の条件を開集合の公理をいうこともある．

また，閉集合は実数のとき同様に補集合が開集合になることで定義される．こうして定義された閉集合の族 $\mathcal{F}(X)$ が

- 任意個 (無限個でも可能) の $\mathcal{F}(X)$ に属する集合の共通部分は $\mathcal{F}(X)$ に属する．
- 有限個の $\mathcal{F}(X)$ に属する集合の和集合は $\mathcal{F}(X)$ に属する．
- $\phi$ と $\mathbb{R}$ は $\mathcal{F}(X)$ に属する．

ということ (閉集合の公理という) をみたす．ここから，開集合の公理をみたす集合族の代わりに，閉集合の公理をみたす集合族を導入して $X$ に位相を定めることもできる．

$\varepsilon$ 近傍に相当するものも定義される．$X$ の部分集合 $U$ が点 $x$ の近傍であるとは，$x \in O \subset U$ をみたす開集合 $O$ が存在することである．特に $U$ が開集合のとき，これを開近傍という．$x$ の近傍全体の集合を $\mathcal{N}_x$ と表し，これを近傍系をいう．これは次の性質を持つ．

- $U \in \mathcal{N}_x$ ならば $x \in U$
- $U \in \mathcal{N}_x$ かつ $U \subset V$ ならば $V \in \mathcal{N}_x$
- $V \in \mathcal{N}_x$ かつ $W \in \mathcal{N}_x$ ならば $V \cap W \in \mathcal{N}_x$
- $U \in \mathcal{N}_x$ ならば，次をみたす $x$ の近傍 $W$ が存在する．
    1. $W \subset U$
    2. $y \in W \to U \in \mathcal{N}_y$

これにはあまり立ち入らないことにする．なお，$X$ の各点 $x$ に近傍系 $\mathcal{N}_x$ を定められたとき，そこから開集合系 $\mathcal{O}(X)$ を定めることができる．すなわち，各点の近傍系からも位相を定めることができる．

### 16.3.1 ここまで一般化して何がいいんですか？

整数 $n$ に対して，$n$ の倍数を $n\mathbb{Z}$ と書く．$p$ を素数とし，$X$ を $p\mathbb{Z}$ をすべて集めた集合，すなわち「素数の倍数の集合」の集合とする．$E \subset \mathbb{Z}$ に対して，$V(E)$ を $V(E) = \{p\mathbb{Z} \mid E \subset p\mathbb{Z}, p \text{ は素数 }\}$ と定める．例えば，$V(30\mathbb{Z}) = \{2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}\}$ である．このとき以下が成立する．

- $V(\{0\}) = X, V(\mathbb{Z}) = \phi$
- $(E_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ を $\mathbb{Z}$ の部分集合族とする．このとき，

$$V\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V(E_n)$$

- $n, m \in \mathbb{Z}$ としたとき，$V(n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z}) = V(n\mathbb{Z}) \cup V(m\mathbb{Z})$

証明

- 任意の倍数は 0 を含むため，$V(0) = \{p\mathbb{Z} \mid p \text{ は素数 }\} = X$ である．また，整数全体を含む $p\mathbb{Z}$ は存在しないため，$V(\mathbb{Z}) = \phi$ である．
- $p\mathbb{Z} \in V\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n\right) \Longleftrightarrow \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n \subset p\mathbb{Z}$ より，任意の $n$ に対して $E_n \subset p\mathbb{Z}$ であり，$p\mathbb{Z} \in V(E_n)$ となる．よって $p\mathbb{Z} \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V(E_n)$ となる．すなわち，$p\mathbb{Z} \in V\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n\right) \Rightarrow p\mathbb{Z} \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V(E_n)$，$V\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n\right) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V(E_n)$ である．次に，$p\mathbb{Z} \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V(E_n) \Longleftrightarrow$ 任意の $n \in \mathbb{Z}$ について，$E_n \subset p\mathbb{Z}$ であるため，$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n \subset p\mathbb{Z}$ であり，$p\mathbb{Z} \in V\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n\right)$ となる．これより，$p\mathbb{Z} \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V(E_n) \Leftarrow p\mathbb{Z} \in V\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n\right)$ となって，$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V(E_n) \subset V\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n\right)$ である．以上より，$V\left(\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} E_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V(E_n)$ である．
- 省略

上記から，$X$，すなわち素数の倍数の集合に，位相を定めることができる．もともと $X$ は離散的な集合であるのに，連続性を導入する位相が定まるのだ．

これを一般化してみる．以下は可換環論を前提知識とするため，わかる人向け．$A$ を可換環として，$X$ を $A$ の素イデアルの集合とする．$A$ の部分集合に対して，$V(E)$ を $E$ を含んでいる $A$ のすべての素イデアルの集合とする．このとき，以下が成立する．

- $\mathfrak{a}$ が $E$ によって生成されるイデアルのとき，$V(E) = V(\mathfrak{a}) = V(r(\mathfrak{a})$ が成立する．
- $V(0) = X, V(A) = \phi$
- $(E_i)_{i\in I}$ を $A$ の部分集合族とする．このとき，

$$V\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) = \bigcap_{i\in I} V(E_i)$$

- $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ を $A$ のイデアルとしたとき，$V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$

こうして位相を定められた．また $X$ を $A$ のスペクトラムといい，$\mathrm{Spec}(A)$ と表す．

この後，環 $A$ が多項式環のケースを考えれば，Zariski 位相というものが得られ，代数幾何の話になる．是非とも勉強してほしい．[*36]

[*36] サボったわけではない．

# 17 級数の収束

## 17.1 introduction

これまでに関数を Maclaurin 展開するなどして無限級数を見てきた．例えば，前回のシケプリでは $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots$ を紹介し，円周率に収束する無限級数を紹介した．しかし，実際に収束するかどうかに触れてはいない．ここでは収束するか否かを厳密に見ていきたい．

## 17.2 数列の収束

無限級数の収束に入る前に，数列の収束について復習及び捕捉を行う．特に $\limsup$ と $\liminf$ について確認をする．

(実数) 数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が (実数)$\alpha$ に収束するとは，任意に正数 $\varepsilon$ を取ったとき，ある自然数 $N$ が存在し，$n > N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成立することである．このとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ と表記する．

これで基本的な数列は対応できるのだが，無限級数を考えるとき，無限大で振動する数列を係数とする級数などを考えることがあり，通常の収束では道具として不足することがある．そのため，広い収束を考えることにする．

下に有界な数列 $\{a_n\}$(ただし $\inf a_n = b$ とおく) について，数列 $S_m$ を $\sup\{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots\}$ と定める．このとき，$S_0 \geq S_1 \geq \cdots \geq S_m \geq \cdots \geq b$ が成立する．これより $\lim_{m\to\infty} S_m = \inf_{m\to\infty} S_m = \alpha$ が定まる．これを $\limsup_{n\to\infty} a_n$ と書き，数列 $\{a_n\}$ の上極限という．

上に有界な数列 $\{a_n\}$(ただし $\sup a_n = c$ とおく) について，数列 $s_m$ を $\inf\{a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots\}$ と定める．このとき，$S_0 \leq S_1 \leq \cdots \leq S_m \leq \cdots \leq c$ が成立する．これより $\lim_{m\to\infty} s_m = \sup_{m\to\infty} s_m = \beta$ が定まる．これを $\liminf_{n\to\infty} a_n$ と書き，数列 $\{a_n\}$ の下極限という．

***

具体的なイメージとして，wikipedia に非常に良い図があったため引用する．

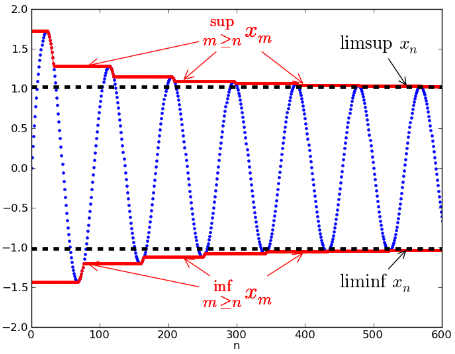


図 4 limsup/liminf

引用元：https://ja.wikipedia.org/wiki/%E4%B8%8A%E6%A5%B5%E9%99%90%E3%81%A8%E4%B8%8B%E6%A5%B5%E9%99%90#/media/%E3%83%95%E3%82%A1%E3%82%A4%E3%83%AB:Lim_sup_example_5.png

***

極限のとき同様に，同値な言いかえがあるのでそれも紹介する．

実数 $\alpha$ と数列 $\{a_n\}$ に対して，$\alpha = \limsup_{n\to\infty} a_n$ である．
$\iff \forall\varepsilon > 0$ に対し，

1. $a_n \geq \alpha + \varepsilon$ となる $n$ は有限個
2. $a_n > \alpha - \varepsilon$ となる $n$ は無限個

## 17.3　級数の収束

級数の収束の定義を挙げておく．

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束するとは，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m} a_n$ が有限の値として存在することで，その値を収束値という．$S_m = \displaystyle\sum_{n=0}^{m} a_n$ と表される数列について，収束の定義を適応しているようなものである．

また，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ が収束するとき，絶対収束するという．

絶対収束したとき，かならず収束するため，絶対収束のほうが「強い」収束である．

***

なお先に謝罪をしておくが，無限級数のスタートを $n = 0$ にするときもあれば，$n = 1$ にしていることもある．初項が異なっても大勢に影響はないが，$\sum$ の中の式が微妙に変わることがあり，紛らわしいかもしれない．もうしわけない．

## 17.4　収束半径

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対して，収束半径 $r$ とは，$|x| < r$ のとき級数が収束し $|x| > r$ のとき級数が発散する[*37]ような実数である．ただし，任意の $|x|$ で収束する場合は収束半径 $\infty$ とする．これは授業中与えられた定義とは異なるが，同値な定義となる．覚えておきたい収束半径の求め方は 3 つある．

### 17.4.1　定義から

$|x| < r$ での収束を示し，$|x| > r$ でも発散を示す．当たり前で素朴であるが，案外効く．

### 17.4.2　d'Alembert の判定法

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ が存在すれば，それが収束半径である．

おそらくこの d'Alembert[*38]の判定法が最も簡潔かつ有用であろう．例えば，$\arctan x = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5 - \cdots$ の場合は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(2n+1)}{(-1)^{n+1}(2n+3)}\right| = 1$ であるため，収束半径は 1 だとわかる．

[*37] 収束をスルー w！
[*38] フランス語を勉強すると，これをダランベールと読むのだと容易にわかる．

### 17.4.3　Cauchy-Hadamard の冪根判定法

$\dfrac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ が成立する．

おそらくこの Cauchy-Hadamard[*39][*40]の冪根判定法が最も強い計算方法であろう．対数を取って計算をするといいかもしれない．例えば arctan の場合は，

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \log |a_n|^{\frac{1}{n}} &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\log |(-1)^n(2n+1)|}{n} \\ &= 0\end{aligned}$$

であるため，

$$\frac{1}{r} = e^0 = 1$$

となり，$r = 1$ である．

## 17.5　収束することの計算

収束半径には落とし穴がある．それは $|x| = r$ のときに収束するかどうか教えてくれないことである．自分で計算しないといけない．また，上の計算方法に挙げたうち，定義から収束半径を求める方法は，収束判定を実際に計算しないといけない．こういうわけで級数が収束することの示し方を覚えておきたいのだ．

### 17.5.1　交代級数の収束判定

交代級数とは，

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

というように項の正負が交互に入れ替わる無限級数である．

基本的に，交代級数が収束しても，その絶対級数は収束するとは限らない．例えば，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$ が成立するが，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ は発散する．

交代級数の収束については，Leibniz による次の定理がある．

数列 $\{a_n\}$ が単調減少で 0 に収束するならば級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ は収束する．

数列が単調増加なケースは，各項に $-1$ を掛けて考えればいい．以下のように言ってもよい．

数列 $\{a_n\}$ が単調増加で 0 に収束するならば級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ は収束する．

***

[*39] フランス語を勉強すると，これをアダマールと読むのだと容易にわかる．

[*40] ドレフュス事件のドレフュスは，義理の兄にあたるらしい．

最後に，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\log 2$ の証明をしておこう．

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\right)-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}\\
&=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\
&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\\
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\\
&=\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\log 2
\end{aligned}
$$

### 17.5.2　優級数法

ここで紹介する方法は優級数法などと呼ばれる．無限級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ に対して，$|a_n|<b_n$ が成立するとき，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ を優級数と呼ぶ．$a_n$ のほうは劣級数と呼ぶ．優級数が収束するとき，劣級数は (絶対) 収束する．

なお，優級数を見つけずとも無限級数の収束値が実際に計算できたならば，収束するとしていいため，センスのある計算を求めるもの良い．これは後述する arctan のところ (subsubsection 17.5.4) をみてほしい．

### 17.5.3　Cauchy の収束判定法

数列の収束に関する判定法の 1 つに Cauchy の判定法がある．この概念は Cauchy 列という重要な概念に拡張される．

**Cauchy の収束判定法**

数列 $\{a_n\}$ に対し，以下は同値である．

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ は実数に収束する．
- 任意の正数 $\varepsilon$ について，ある自然数 $N$ が存在し，$l\geq m>N$ なる任意の正数 $l$, $m$ に対して，$|a_l-a_m|<\varepsilon$ をみたす．

### 17.5.4　arctan 的な話

$\arctan x$ の Maclaurin 展開の収束半径は 1 であると既に述べた．ここで前に紹介した

$$1-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}+\cdots=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$

を思い出してみよう．これは収束半径のちょうど「ふち」にあたる級数だ．これの収束を示そう．もちろん優級数や Cauchy の判定法を~~用いる~~用いない．~~いや話の流れ的に使う流れじゃ~~

***

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x \, dx$ とおく．

$$
\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \left( \tan^{2n} x \right) dx \\
&= \frac{1}{2n+1} - I_n
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} (I_k + I_{k+1}) \\
&= (-1)^{n-1} I_n + I_0 \\
&= (-1)^{n-1} I_n + \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

となる．任意の正整数 $n$ に対して，$\tan^{2n} x \geq 0$ であるため，$I_n \geq 0$ である．また漸化式より，$\frac{1}{2n+1} - I_n = I_{n+1} \geq 0$ である．これより，$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}$ である．したがって $\lim_{n \to \infty} I_n = 0$ である．ゆえに，

$$
\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \lim_{n \to \infty} (-1)^{n-1} I_n + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}
$$

以上より示された．

## 17.6　項別微分・積分

### 17.6.1　項別微分・積分とは

関数 $f(x)$ が無限級数であらわされるとき，その微積分は，ある条件下で非常に簡潔に行うことができる．詳しくは次のようになる．

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ と書けるとして，この無限級数を収束半径を $r$ とする．このとき $|x| < r$ において $f(x)$ の微分・積分は，$f(x)$ の級数の各項を微分・積分した無限級数となる．
すなわち，以下が成立する．

$$
\begin{aligned}
\int_0^x f(t) \, dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \\
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}
\end{aligned}
$$

### 17.6.2　項別微分・積分と収束半径

普通に生きていれば，ある関数の級数を項別微分・積分したとき，新たにできた無限級数の収束の挙動が気になるものである．うれしいことに，項別微分・積分後の級数の収束半径は，元の級数の収束半径と一致する．

### 17.6.3　arctan 的な話 2

項別積分の考えを用いて，$\arctan x$ の級数展開を求めてみよう．

$f(x) = \arctan x$ とおく．周知の通り，$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ である．等比級数の和の公式を考えると，$|x| < 1$ において，

$$
\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}
$$

となる．$|x|<1$ においてこれを項別積分すると，

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

となり，求めたいものが得られた．

### 17.7 無限級数の積

無限級数の積の収束は割と単純である．

無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$，$\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ が共に絶対収束をするとき，$\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} A_k B_{n-k}\right)$ が成立し，これは絶対収束する．

## 18 おまけのコーナー 4：Riemann の再配列定理

1.5.1 で $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \log 2$ と言ったな．あれは嘘だ[*41]．

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2(2k-1)} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4k} \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} + \frac{1}{4k}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2(2k-1)} \frac{1}{4k}\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{1}{2} \log 2
\end{aligned}$$

あ……ありのまま今起こったことを話すぜ！「おれは，$\log 2$ に収束する級数を計算していたと思ったら，いつのまにか $\frac{1}{2}\log 2$ になっていた」な……何を言っているのかわからねーと思うが，おれも何をしたのかわからなかった……[*42]

Riemann の再配列定理

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するが，絶対収束しない無限級数とする．このとき，任意の実数 $N$ に関して，適当に置換 $\sigma$ を取れば，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = N$ とできる．

すなわち，絶対収束をしない無限級数は，うまく並び替えることで，級数和を好きなように変えることができるのだ．一方で，絶対収束する無限級数は，並び替えても収束先は変わらない．これを踏まえれば，無限級数を取り扱う上で，慎重にならなければならないとわかるであろう．これら定理の証明はせきゅーん氏のブログ http://integers.hatenablog.com/entry/2016/08/25/025342 を参照していただきたい．

~~なお，上記のトリックを用いることで，$1=2$ が証明される．~~

[*41] うわぁーーーーー!!
[*42] ジョジョ三部はめいさく

# 19 関数列の収束

区間 $I \subset \mathbb{R}^n$ を定義域にする関数列 $f_0(x)$，$f_1(x)$，$\cdots$，$f_n(x)$，$\cdots$ を $\{f_n(x)\}$ と書き，関数列という．この関数列についての収束を考えていく．以下，関数列 $\{f_n(x)\}$ は常に区間 $I$ を定義域とする．

## 19.1 各点収束と一様収束

関数列の収束として，まずは各点収束を紹介する．

**各点収束**

$\forall c \in I$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(c)$ が収束するとき，関数列 $\{f_n(x)\}$ は各点収束するという．また，このとき $c \in I$ に対し $f(c) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(c)$ を対応させる関数 $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ができる．

例えば，$I = [0,1]$ とし，$h_n(x) = x^n$ とする．このとき，

$$h(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

に各点収束する．このとき連続性が失われている．各点収束はやや条件が強すぎるのだ．少し条件を強くした一様収束[*43]という概念を紹介する．

**一様収束**

関数列 $\{f_n(x)\}$ が次の条件を満たすとき，関数列 $\{f_n(x)\}$ は関数 $f(x)$ に一様収束するという．

条件：任意の正数 $\varepsilon$ に対して，ある正整数 $N$ が存在し，$n > N$ ならば $\forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

明らかに一様収束 $\Rightarrow$ 各点収束である．それでは逆はどうであろうか．これについて話す前に，一様収束についての命題を 1 つ紹介しておこう．

関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に一様収束する

$\Longleftrightarrow$ 任意の正数 $\varepsilon$ に対して，ある正整数 $N$ が存在し，$n > N$ ならば $\forall x \in I \quad \displaystyle\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

sup さえ考えればよいため，一様収束の議論が簡潔になる．特に，前に例に挙げた関数列 $\{h_n(x)\}$ が，一様収束しないことを示すうえでは有用だ．実際に使ってみると，$\displaystyle\sup_{x\in I} |h_n(x) - h(x)| = \sup_{0\leq x<1} x^n = 1$[*44] となるため，正数 $\varepsilon$ を $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ とすると，条件を満たさない．これより $\{h_n(x)\}$ は一様収束しない．

### 19.1.1 Cauchy の収束判定法

関数列においても Cauchy の収束判定法が存在する．

[*43] 樋口一様収束ｗ！

[*44] ここで $x = 1$ のケースを除外したが，これは $x = 1$ のときだけ $|h_n(x) - h(x)| = |h_n(x) - 1|$ となる．これは 0 になることから，取り除いても結果の値は変わらない．さらに場合分けを書く手間も省ける．

**Cauchy の収束判定法**

関数列 $\{f_n(x)\}$ に対し，以下は同値である．

- 関数列 $\{f_n(x)\}$ は一様収束する．
- 任意の正数 $\varepsilon$ について，ある自然数 $N$ が存在し，$l \geq m > N$ なる任意の正数 $l$，$m$ に対して，$\sup_{x \in I} |f_l(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ をみたす．

## 19.2 微積分と極限の交換

$I$ を有界区間とし，$c \in I$ とする．また次の条件を満たすとする．

- $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に一様収束する．
- $\forall n \ f_n(x)$ は $I$ 上連続である．

このとき，次が成立する．

- $f(x)$ は $I$ 上連続である．
- 積分と極限を交換[a]できる．すなわち $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \int_c^x f_n(t)\,dt = \int_c^x f(t)\,dt$

[a]物理屋の伝統芸能 w！

次に項別積分のようなものを紹介する．

$I$ を有界区間とし，$c \in I$ とする．$\{g_m(x)\}$ を $I$ 上連続な関数列とする．このとき，以下が成立する．

1. $\displaystyle \sum_{m=0}^{\infty} g_m(x)$ が $I$ 上一様収束ならば，$\forall x \in I \quad \displaystyle \int_c^x \sum_{m=0}^{\infty} g_m(x)\,dt = \sum_{m=0}^{\infty} \int_c^x g_m(x)\,dt$ が成立する．
2. 次の 2 条件を満たすとする．
   - $\forall m \ g_m(x)$ は $I$ 上 $C^1$ 級の関数
   - $\displaystyle \sum_{m=0}^{\infty} g_m(x)$ が $I$ 上一様収束ならば，$\displaystyle \sum_{m=0}^{\infty} g'_m(x)$ は $I$ 上一様収束

   このとき，$\displaystyle \sum_{m=0}^{\infty} g_m(x)$ は $I$ 上 $C^1$ 級で，$\displaystyle \left( \sum_{m=0}^{\infty} g_m(x) \right)' = \sum_{m=0}^{\infty} g'_m(x)$ となる．

このように一様収束する関数には非常に良い性質がある．

## 19.3 冪級数関連の話題

$\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ の収束半径を $r > 0$ とする．このとき，$0 < s < r$ となる実数に対し，$\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ は $|x - a| \leq s$ で一様収束する．

この話題は単体では微妙と感じるかもしれないが，これまでに述べた一様収束する関数の積分可能性・微分可能性を踏まえれば，項別微分・積分が，点 $a$ を中心とする冪級数でも成立していることがわかるだろう．

### 19.4 Abel の定理

Abel[*45][*46]の定理[*47]は有用である．割と自明に感じる事実であるが，やはり定理として正当化されるのはうれしい．

Abel の定理

冪級数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を $r > 0$ とする．このとき以下が成立する．

1. $f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ が収束する．$\Rightarrow$ $f(x)$ は $-r < x \leq r$ で連続である．
2. $f(-r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-r)^n$ が収束する．$\Rightarrow$ $f(x)$ は $-r \leq x < r$ で連続である．

#### 19.4.1 arctan 的な話 3

$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ を用いて $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ を示そう．まず，交代級数の収束判定より，$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ は収束する．ここで「arctan 的な話 2」(subsubsection 17.6.3) で $|x| < 1$ における $\arctan x$ の級数表示を示した．$|x| < 1$ のときに収束する級数表示が，$x = 1$ でも収束するため，Abel の定理を当てはめると，$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n-1}$ が $-1 < x \leq 1$ で成立することがわかる．ここに $x = 1$ を代入して値を比較すると，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ であるとわかる．

## 20 おまけのコーナー 5：Fourier 級数展開

関数の級数といえば，Fourier 級数が有名である．Fourier 級数展開とは，すべての (周期) 関数は波の合成で書けるという考えの元導入されたと言えよう[*48]．実際に例を見てみよう．

実は $-\pi < x < \pi$(及びその区間を $2\pi n$ ズラしたもの) で，

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$$

となる．実際に図を見てほしい．

### 20.1 関数を Fourier 級数展開する

実際に与えられた (周期) 関数を Fourier 展開してみよう．元の三角関数を周期に倣って，Fourier 級数展開する関数の周期の範囲は $-\pi < x < \pi$ とする (なお，$0 < x < 2\pi$ という範囲にもできるし，変数変換することで任意の有界な実数周期にできる)．まず，

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

[*45] 別にフランス語を選択していなくても，アーベルと読める．

[*46] 最強の数学者の 1 人．すごい．ノルウェーの紙幣に肖像が使われていたこともある．彼の名を冠するアーベル賞は，(選考方法・賞金的な意味で) ノーベル賞の数学版である．

[*47] Abel の定理といえば，「5 次以上の代数方程式には，代数的な解 (四則と冪根によって書かれる解) が存在しない」という定理を思い出す人も多いだろうが，これとはまた別の Abel の定理である．

[*48] 以下の例を見ればわかるが，直線的を無数の波の合成で書けてしまうことになる．これはやや違和感を感じるものである．というのも，自然にあるものは大概，というか例外なくまるみを帯びているのに，直線が (自然にある) 波を合わせた形として書けてしまうのだ．しかし，この違和感に対しては，無限という人工的な概念を導入して初めて直線になっているためそう変なことでもないと返せる．だが，無限は本当に人工的なものなのだろうか？うーむ，これについては初めの問い自体の感触が良くない気がする．

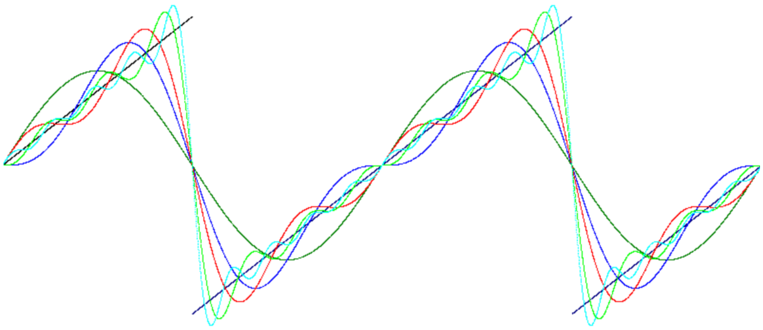

図 5　緑 : $n=1$，青 : 2，赤 : 3，黄緑 : 5，水色 : 9

と表記できると仮定する (どのような関数で表記可能かどうかは後述する)．ここから，高校時代何回も計算したであろう，ある積分公式を用いて，$a_n$ と $b_n$ を特定できる．

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \pi & (m = n) \end{cases}$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0$$

これは何が素晴らしいかというと，積分 1 つで元の関数から Fourier 級数が計算でき，逆に Fourier 級数を集めて元の関数を復元[*49]できてしまうのだ．

これらを用いると，

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

と計算される．実際に $f(x) = x$ のときの級数展開を求めてみよう．

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \, dx = 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = 0 \;\; (\because \text{偶関数} \times \text{奇関数}) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ x(-\frac{1}{n} \cos nx) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n} \{ (-1)\pi \cos n\pi - (-1)(-\pi) \cos n\pi \} \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

[*49] 一応念押しすると，復元するには条件がある．

さて，得られた Fourier 級数展開[*50]に値を代入すれば，おもしろい級数が得られる．$f(x)=x$ に $x=1$ を代入し両辺を 2 で割ると，

$$\frac{\sin 1}{1}-\frac{\sin 2}{2}+\frac{\sin 3}{3}-\cdots=\frac{1}{2}$$

となる．前述した $f(x)=x$ の他にも，$f(x)=x(\pi-x)(\pi+x)$ とすれば，

$$x(\pi-x)(\pi+x)=12\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n^3}$$

であり，これに $x=1$ を代入することで，

$$\frac{\sin 1}{1^3}-\frac{\sin 2}{2^3}+\frac{\sin 3}{3^3}-\cdots=\frac{\pi^2-1}{12}$$

が成立する．

### 20.1.1　級数展開を作ってみる

$$\frac{\sin 1}{1^k}-\frac{\sin 2}{2^k}+\frac{\sin 3}{3^k}-\cdots$$

を一般に計算して……みたいのだが，今回は $k=5$ のときを求めてみる．~~べ，別に一般の場合を計算できなかったわ k~~

$k$ を奇数として，

$$B_k=\int_{-\pi}^{\pi}x^k\sin nx\,dx$$

とおいて計算してみる．

$$\begin{aligned}
B_k&=\int_{-\pi}^{\pi}x^k\sin nx\,dx\\
&=\left[\frac{-\cos nx}{n}x^k\right]_{\pi}^{\pi}+\frac{k}{n}\int_{-\pi}^{\pi}x^{k-1}\cos nx\\
&=-\frac{2(-1)^n}{n}\pi^k+\frac{k}{n}\left[\frac{\sin nx}{n}x^{k-1}\right]_{\pi}^{\pi}-\frac{k(k-1)}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi}x^{k-2}\sin nx\,dx\\
&=-\frac{2(-1)^n}{n}\pi^k-\frac{k(k-1)}{n^2}B_{k-2}\\
&=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\pi^k+\frac{2(-1)^{n+2}k(k-1)}{n^3}\pi^{k-2}+\ldots+\frac{2(-1)^{n+K}k(k-1)\ldots(k-(k-2))}{n^k}\pi^1\\
&=\frac{2(-1)^n}{n}\sum_{m=0}^{K}\frac{{}_k\mathrm{P}_{2m}}{n^{2m}}\pi^{k-2m}(-1)^m
\end{aligned}$$

なお，$k=2K+1$ とおいている．

$$\begin{aligned}
B_5&=\frac{2(-1)^n}{n}\left\{\frac{{}_5\mathrm{P}_0}{n^0}\pi^5-\frac{{}_5\mathrm{P}_2}{n^2}\pi^3+\frac{{}_5\mathrm{P}_4}{n^4}\pi^1\right\}\\
B_3&=\frac{2(-1)^n}{n}\left\{\frac{{}_3\mathrm{P}_0}{n^0}\pi^3-\frac{{}_3\mathrm{P}_2}{n^2}\pi^1\right\}\\
B_1&=\frac{2(-1)^n}{n}\frac{{}_1\mathrm{P}_0}{n^0}\pi^1
\end{aligned}$$

これらは順に $x^5$，$x^3$，$x$ の Fourier 級数展開に対応する．上記から，分母が自然数の 5 乗になるように上手く消す．こうすると，$f(x)=6x^5-20\pi^2x^3+14\pi^4x$ と計算できる．

[*50] 余談だが，大学への数学 2002 年 5 月号の学力コンテストには，この Fourier 級数展開 (厳密には，$f(x)=x$ とこの $f(x)$ の Fourier 級数展開が一致すること) を高校数学で証明する問題が出題されている．

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1440\cdot\sin nx}{n^5}=6x^5-20\pi^2x^3+14\pi^4x$$

となる．これに $x=1$ を代入すると，

$$\frac{\sin 1}{1^5}-\frac{\sin 2}{2^5}+\frac{\sin 3}{3^5}-\cdots=\frac{3-10\pi^2+7\pi^4}{720}$$

が得られる．

## 20.2 Fourier 級数展開と微積分

関数 $f(x)$ が $-\pi<x<\pi$ で

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$$

と書けるとき，$f(x)$ を微分・積分したものの Fourier 級数展開がどうなるのか見てみよう．なおここでは $f(x)$ を微分・積分したものを Fourier 級数展開したとき，その級数が元の関数と一致するかどうかどうかは考えないものとする[*51]．まず，

$$f'(x)=a'_0+\sum_{n=1}^{\infty}a'_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b'_n\sin nx$$

と書けるとしよう．

$$\begin{aligned}
a'_0&=\int_{-\pi}^{\pi}f'(t)\,dt\\
&=f(\pi)-f(-\pi)\\
&=0\\
a'_n&=\int_{-\pi}^{\pi}f'(t)\cos nt\,dt\\
&=[f(x)\cos nx]_{-\pi}^{\pi}+n\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin nt\,dt\\
&=nb_n\\
b'_n&=\int_{-\pi}^{\pi}f'(t)\sin nt\,dt\\
&=[f(x)\sin nx]_{-\pi}^{\pi}-n\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt\\
&=-na_n
\end{aligned}$$

となり，上記をまとめると，

$$\begin{aligned}
f'(x)&=a'_0+\sum_{n=1}^{\infty}a'_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}b'_n\sin nx\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}nb_n\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}-na_n\sin nx\\
&=(a_0)'+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx)'+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n\sin nx)'
\end{aligned}$$

[*51] この辺を昔の筆者は感覚で勉強したので，厳密な説明がうまくできなかったりする．それでいいのか？

となる．嬉しいことに元の関数の Fourier 級数展開の項別微分になっているのだ．同様の計算を積分した関数でも行うと，元の関数の Fourier 級数展開の項別積分になっていることがわかる．~~TeX 打ちめんどいから省く．~~これは読者への演習問題とする[*52]．

実は，このことはそう変なことでもない．Fourier 級数展開でおいしいものは，収束先が元の関数と一致する関数である．しっかりと言えば，Fourier 級数展開という関数列が元の関数に一様収束するような関数がおいしい．既に学んだ通り，関数による級数が一様収束するとき (と少々の条件が満たされるとき)，極限と微分・積分は交換できるものである．こうしてみると，性質が良い Fourier 級数展開に関しては，項別微分・積分の成立にも納得がいくであろう．

## 20.3 Fourier 級数展開の別表示

Fourier 級数展開を sin，cos で表現することは，波の合成と見る上では明解であろうが，関数の表示としては 1 つのシグマでまとまっていないため，非常　嬉しいとは言い切れない．ここでおなじみの等式 $e^{it} = \cos t + i \sin t$ を用いると，

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2}$$

と書き換えられる．こうしてみると Fourier 級数展開とは，

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$$

と書けることがわかる．なお $\hat{f}(n)$ は $a_n$ のような係数である．表記が分かりにくいかもしれないが許してほしい．またこの時，

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\, dt$$

が成立する．

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imt} e^{-int}\, dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 2\pi & (m = n) \end{cases}$$

を考えれば明らかである．また，この表記においても微分・積分がうまくいく．$f(x)$ に対して，$\widehat{f'}(n) = in\hat{f}(n)$ となる．

***

非常におもしろいことに，$\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は，ある種の関数を集め線型空間とみなしたとき (精密には $L^2(\mathbb{T})$ と書かれる．これは大雑把に述べると，絶対値を 2 乗したものを定義域全体で積分したとき，有限の値を取るような関数の集まりである．) の基底になる．さらに直交基底にもなる．ある種の関数を集め線型空間とみなしたものでは，Fourier 級数展開の手法によって，$\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を用いてその元を表記できることから，完全性をも満たす．詳しくは Parseval の等式 ($\|f\|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(n)\right|^2$) というものが根拠となる．

表現論という分野がある．これは，群[*53]を線型写像をして結びつける写像を用意し，群を線型代数的に解釈しようという分野である．トーラス $\mathbb{T}$ という集合を考えよう．これは実数 $r$，$r'$ に関して，ある整数 $n$ を用いて $r - r' = 2n\pi$ なるものを同一視した集合である．いわば　mod $2\pi$ をした集合である．これは加法について群を成す．さて，複素数

[*52] 「良心的な」数学書は得てして細かい計算や議論を「読者の演習問題」とする．古事記にもそう書いてある．

[*53] 群とは，結合則を満たす演算を 1 つ有し，その演算に関する単位元を含む集合である．例えば，実数は加法に関して群となる．

のうち逆数を有するものの集合 (すなわち 0 を除いた複素数全体)$\mathbb{C}^\times$ は線型空間になる．ここで，$\mathbb{T}$ から $\mathbb{C}^\times$ への表現を考える．このとき，実現可能な表現は，おもしろいことに，必ず $e^{int}$ という形になる．

上記 2 つの事実は，密接に関係しているようだ．このようなモチベーションで，Fourier 級数は興味深い研究対象になる．なお，これらを結ぶ関係性は Peter-Weyl の定理というもので書きくだされるらしい[*54]．

## 20.4　どのような関数が Fourier 級数展開できるのか

「どのような関数が Fourier 級数展開できるのか」という表現よりは，「どのような関数であれば，Fourier 級数展開が元の関数と一致するのか」という表現が良いだろう．前回のシケプリで Maclaurin 展開において，必ずしも級数が元の関数と一致するとは限らない様子を見たであろう．これを踏まえればこうした問いが湧くことも自然だ[*55]．

厳密に言うと，$f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ が常に成立するとは限らないのだ．とはいえ，これまでに挙げてきた関数では上記の等式が成り立ってくれるので，不安に思わないでほしい．

割と厳密なことを話すので，きちんと道具を用意する．

## 20.5　関数空間 $L^2$

重要な関数のあつまり $L^2$ を紹介する．実は以下で述べる積分は全て Lebesgue 積分なのだが，ここでは $L^2$ と Fourier 変換について，お気持ちを伝えたいので詳しくは入らない．[*56]

### 20.5.1　測度論の言葉紹介

一応に Lebesgue 積分で用いる言葉を~~雑に~~簡単に紹介する．

集合 $X$ の完全加法族 $\Sigma$ とは，$X$ の冪集合の部分集合であって，集合に作用する次の 2 つの「演算」について閉じているものを指す．

- ある集合 $A$ について，その補集合を取る．
- ある集合族 $\{A_i\}$ について，その和集合を取る．

すなわち，$\Sigma$ に含まれる集合から上記の 2 つの方法で新たに集合を作っても，それが $\Sigma$ に含まれるとき，それを完全加法族という．

完全加法族 $\Sigma$ 上の測度 $\mu$ とは，完全加法族の上で定義され非負実数値をとる写像であって，次の条件を満たすものである．

- $\mu(\phi) = 0$
- $\forall i, j \in I$，$A_i \cap A_j = \phi$ としたとき，$\mu\left(\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} \mu(A_i)$

これらについて，完全加法族を「$\mathbb{R}^2$ の部分集合全体」，測度を「与えられた集合の面積を返す関数」という例を考えると分かりやすいだろう．測度はより一般の集合で面積を測ろうという考えを持つ．上記を合わせた組 $(X, \Sigma, \mu)$ を測度空間と呼び，特に $\Sigma$ の元を可測集合と呼ぶ．

$f$ が可測な関数であるとは，任意の実数 $a$ において，集合 $\{x \mid f(x) > a\}$，$\{x \mid f(x) < a\}$ が可測集合であるものを指す．こうした関数が Lebesgue 積分の被積分関数となる．可測関数の定義が，ある実数以上 (以下) を取る領域によって定義されたわけだが，これまでの積分は縦に切った短冊を足し合わせていたのに対して，Lebesgue 積分は横に切った短冊を足し合わせるイメージを持つようにすれば，納得の行く定義になっているのではなかろうか．

[*54] まだ勉強が達してないからよくわかんない

[*55] そう思わなかったら，数理科学基礎もう 1 周してきてください．いや冗談だけど．

[*56] 詳しく入るとシケプリのページが 20 ページは増える．

かくして言葉は整った．Lebesgue 積分は次のように表記される．可測集合 $S$ 上で可測関数 $f$ の測度 $\mu$ による Lebesgue 積分を次のように書く．

$$\int_S f\,d\mu$$

なお，以下断りなしに $S$ や $d\mu$ などを用いた場合，その記号は上記の文脈で定義されたものを指す．が，あまり難しく考える必要はなく，$S$ は積分範囲，$d\mu$ は $dx$ のようなものと思ってほしい．

またこの積分のさらに詳しい計算方法などは述べない．ここでは大雑把により広い範囲で積分を行うツールがあることを紹介するだけに留める．

### 20.5.2 二乗可積分

可測な関数 $f$ が二乗可積分であるとは，

$$\int_S |f|^2\,d\mu < +\infty$$

であることを意味する．これらの集合を $L^2(S)$，定義域が前後の文脈で明らかなときなどは単に $L^2$ と表記する．証明は省くが，$L^2$ はベクトル空間になる．

二乗可積分な関数について，

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_S |f|^2\,d\mu\right)^{\frac{1}{2}}$$

をノルムとし定義する．

$L^2$ に対して，以下のように内積を定める．

$$\langle f, g\rangle = \int_S f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

これより

$$\|f\|_{L^2} = (\langle f, f\rangle)^{\frac{1}{2}}$$

となる．

### 20.5.3 証明及び Bessel の不等式

さて，関数 $f(x)$ に対して，$S_n(f,t)$ を，

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(n)e^{ikt}$$

と定義する．

内積の記号を用いると，

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e^{ikt}\rangle e^{ikt}$$

となる．

なんと $f(x)$ が連続関数でさえあれば，Fourier 級数展開は元の関数に一様収束する．(こうしてみると，関数 $f(x)$ が微分可能であれば，微積分と級数和を入れ替えていいとわかるだろう．) さて実際に示してみよう．

$$
\begin{aligned}
|f(x)-S_n(f,x)| &= \left|\sum_{|k|>n}\hat{f}(k)e^{ikx}\right| \\
&\leq \left|\sum_{|k|>n}\hat{f}(k)\right| \\
&\leq \sum_{|k|>n}\left|\hat{f}(k)\right|
\end{aligned}
$$

ここにおいて，$\displaystyle\sum_{|k|>n}\left|\hat{f}(k)\right|$ は，$t$ と独立で 0 に収束する数列を成す．したがって，正数 $\varepsilon$ を取ったとき，十分大きな $n$ に対し，

$$
|f(x)-S_n(f,x)| \leq \left|\sum_{|k|>n}\hat{f}(k)\right| < \varepsilon
$$

とでき，一様収束することがわかる．なお，$\displaystyle\sum_{|k|>n}\hat{f}(k)$ が実数値を取ること (無限大でないこと) は，次の式より従う．

**Bessel の不等式**

関数 $f(x)$ が $-\pi \leq x \leq \pi$ 上で連続関数であるとき，

$$
\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(n)\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt
$$

実際，

$$
\begin{aligned}
&\left\|f-\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{ikt}\right\|^2 \\
=&\langle f-\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{ikt}, f-\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{ikt}\rangle \\
=&\langle f-\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{ikt}, f\rangle-\sum_{j=-n}^{n}\overline{\hat{f}(j)}\langle f-\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{ikt}, e^{ijt}\rangle \\
=&\langle f,f\rangle-\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)\langle e^{ikt},f\rangle-\sum_{j=-n}^{n}\overline{\hat{f}(j)}\langle f,e^{ijt}\rangle+\sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}\overline{\hat{f}(j)}\hat{f}(k)\langle e^{ikt},e^{ijt}\rangle \\
=&\langle f,f\rangle-\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)\overline{\hat{f}(k)}-\sum_{j=-n}^{n}\overline{\hat{f}(j)}\hat{f}(j)+\sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=-n}^{n}\overline{\hat{f}(j)}\hat{f}(k) \\
=&\|f\|^2-\sum_{k=-n}^{n}\left|\hat{f}(k)\right|^2
\end{aligned}
$$

で，今 $\left\|f-\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{ikt}\right\|^2 \geq 0$ であるため，不等式が従う．

こうして，$\displaystyle\sum_{|k|>n}\left|\hat{f}(k)\right| < \sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|\hat{f}(n)\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,dt < \infty$ が従う．

# 21　一様連続

一様連続

$I$ を (有界とは限らない) 区間とする．$f(x)$ は $I$ を定義域とする．以下の条件を満たすとき，$f(x)$ は $I$ 上一様連続という．
条件 : 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在し，$|x - y| < \delta$ かつ $x$，$y \in I$ ならば，$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ となる．

例えば，$f(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ 上一様連続ではない．このように定義域が有界ではないとき，一様連続でない関数は多々見られる．しかし，有界区間で絞ると，有界区間 $I$ 上連続関数はすべて $I$ 上一様連続となる．

# 22　広義積分

積分区間が無限大になったり，積分区間内で関数が発散するとき，どのように考えると良いだろうか．それは $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n$ と考えたことを思い出すと，$\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$ と考えれば良い．同様に，$\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{b} f(x)\,dx$ と考えれば良い．上記の式が収束 (発散) するとき，広義積分は収束 (発散) するという．

また，$\dfrac{1}{x-1}$ は $x = 1$ で定義されないが，これを $x = 1$ が積分区間に含まれるように積分したいときも，無限大同様に考える．$f(x)$ は $x = a$ で定義されないとする．このとき，広義積分を次のように定める．

$$\int_b^a f(x)\,dx = \lim_{t\to a}\int_b^t f(x)\,dx$$

## 22.1　広義積分の収束判定

### 22.1.1　Cauchy 型

広義積分の収束について述べるため，Cauchy 列のような考えを関数の収束で行う．

$[a, \infty)$ で定義された関数 $f(x)$ に対し，以下は同値である．

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ は収束する．
- 任意の $\varepsilon$ に対して，ある正数 $B$ があり，任意の $y \geq x > B$ について $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ となる．

有界な区間でも同様に考えることができる．

$[a, b)$ で定義された関数 $f(x)$ に対し，以下は同値である．

- $\displaystyle\lim_{x\to b-0} f(x)$ は収束する．
- 任意の $\varepsilon$ に対して，ある正数 $\delta$ があり，任意の $b - \delta < x \leq y < b$ について $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ となる．

これを広義積分に応用する．

$[a,\infty)$ で定義された関数 $f(x)$ に対し，以下は同値である．

- 広義積分 $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx \left(=\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx\right)$ は収束する．
- 任意の $\varepsilon$ に対して，ある正数 $B$ があり，任意の $v \geq u > B$ について $\displaystyle\left|\int_u^v f(x)\,dx\right| < \varepsilon$ となる．

同様に有限区間でも同じことが従う．

$[a,b)$ で定義された関数 $f(x)$ に対し，以下は同値である．

- 広義積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は収束する．
- 任意の $\varepsilon$ に対して，ある正数 $\delta$ があり，任意の $b-\delta < u \leq v < b$ について $\displaystyle\left|\int_u^v f(x)\,dx\right| < \varepsilon$ となる．

#### 22.1.2 優級数法

$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ は $[a,\infty)$ で連続とする．このとき以下が成立する．

1. $|f(x)| \leq g(x)$ かつ $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ は収束する．$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$，$\displaystyle\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ はともに収束する．
2. 絶対収束する広義積分は，収束する．
3. $0 \leq h(x) \leq f(x)$ かつ $\displaystyle\int_a^\infty h(x)\,dx$ は発散する．$\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ は発散する．

有界区間 $[a,b)$ の場合も，$\infty$ を $b$ にすれば成立する．

# 23 ガンマ関数

## 23.1 ガンマ関数

数学とは一般化の学問と言っても過言ではないと言っても言い過ぎではない[*57]．数学者は階乗も一般化しようと試みた．[*58]その結果がガンマ関数である．

ガンマ関数は，正数 $x>0$ に対しては以下のように定義される．

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

ガンマ関数の性質を述べる．

1. ガンマ関数の広義積分は,$\forall x>0$ に対して収束する．また，このとき $\Gamma(x)>0$ となる．
2. $\Gamma(1)=1$，自然数 $n$ に対して $\Gamma(n)=(n-1)!$ を満たす．
3. $s>0$ のとき，$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ となる．(これらが階乗の拡張たる所以である．)
4. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$
5. $\log\Gamma(x)$ は下に凸である．

またこれらの性質を満たす関数は必ずガンマ関数になる．

[*57]過言ではないと言っても言い過ぎではないと言っても過言ではないと言っても言い過ぎではないと言っても
[*58]階乗だけにビックリｗ！

## 23.2　ベータ関数

ベータ関数は正数 $p>0$，$q>0$ に対して以下のように定義される．

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

ベータ関数の性質を述べる．

1. $p>0$，$q>0$ で $B(p,q)=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ は収束し，$B(p,q)>0$ となる．
2. $B(p,q)=B(q,p)$ を満たす．
3. $B(p,q)=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\theta\cos^{2q-1}\theta\,d\theta$
4. $\log B(p,q)$ は $p>0$ についても $q>0$ についても下に凸である．

ガンマ関数とベータ関数は以下の等式で繋がっている．

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

## 23.3　Wallis の公式と Stirling の公式

ガンマ関数を用いて証明される公式に Wallis の公式と Stirling の公式がある．これを紹介する．

Wallis の公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\sqrt{\pi}$$

Stirling の公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}=\sqrt{\pi}$$

## 23.4　Hölder の不等式

### 23.4.1　Hölder の不等式

$\log\Gamma(s)$(変数は $s$)，$\log B(p,q)$(変数は $p$，$q$ どちらか 1 つ) は下に凸となる．

関数 $G(s)$ が，前のほうで述べたガンマ関数の性質を満たし，$\log G(s)$ が下に凸になるとき，$G(s)$ はガンマ関数になる．こうした視点では，(log) ガンマ関数の凸性は重要である．この凸性を示すのに Hölder の不等式が用いられる．この証明以外にも，使える局面が多い不等式なので，知っていて損はないだろう．

**Hölder の不等式 (関数)**

$p$，$q$ を，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満たす定数とする．$f(x)$，$g(x)$ を区間 $I$ 上で定義された正の値を取る連続関数とする．また，$\displaystyle\int_I f(x)^p\,dx$，$\displaystyle\int_I g(x)^p\,dx$ は収束するとする．このとき，

$$\int_I f(x)g(x)\,dx\le\left(\int_I f(x)^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_I g(x)^q\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

を満たす．

見て瞬時に察したであろうが，$p=q=2$ のとき，Cauchy-Schwarz の不等式の特殊な形となる．

Cauchy-Schwarz の不等式と聞くと，級数の形を想起することが多いかもしれない．級数の場合について，次も成立する．

Hölder の不等式 (級数)

$p$，$q$ を，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ を満たす定数とする．$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ はどちらも正の実数による数列とする．このとき，

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n \leq (a_1{}^p+a_2{}^p+\cdots+a_n{}^p)^{\frac{1}{p}}(b_1{}^q+b_2{}^q+\cdots+b_n{}^q)^{\frac{1}{q}}$$

を満たす．なお，等号成立条件は

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

のときである．

さらに拡張すると，

Hölder の不等式 (級数・改)

数列 $\{w_i\}_{k=1,\cdots,m}$ は，$\displaystyle\sum_{i=1}^{m} w_i=1$ を満たすとする．$\{a_{ij}\}_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ は正の実数からなる数列とする．このとき，

$$\begin{aligned}&(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1n})^{w_1}(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2n})^{w_2}\cdots(a_{m1}+a_{m2}+\cdots+a_{mn})^{w_m}\\ &\geq a_{11}^{w_1}a_{21}^{w_2}\cdots a_{m1}^{w_m}+a_{12}^{w_1}a_{22}^{w_2}\cdots a_{m2}^{w_m}+a_{1n}^{w_1}a_{2n}^{w_2}\cdots a_{mn}^{w_m}\end{aligned}$$

を満たす．なお，等号成立条件は $(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})$ を $\mathbb{R}^m$ のベクトルと見たとき，$n$ 本のベクトルがすべて平行であるときである．すなわち，任意の $p$，$q$ ($p$ と $q$ は 1 以上 $n$ 以下の整数) について，ある実数 $\gamma_{pq}$ が存在し，

$$(a_{1p},a_{2p},\cdots,a_{mp})=(\gamma_{pq}a_{1q},\gamma_{pq}a_{2q},\cdots,\gamma_{pq}a_{mq})$$

となるときである．

が成立する．

### 23.4.2　蛇足

せっかくなので高校時代に作った不等式の問題を載せておく．なお，Hölder の不等式を用いなくても解ける．

$a$，$b$，$c$ は正の実数とする．このとき以下の不等式が成立することを示せ．

$$(a^5+2a^3+2a^2+1)(b^5+2b^3+2b^2+1)(c^5+2c^3+2c^2+1)\geq 27abc(abc+1)^3$$

ついでに関数方程式の問題も載せる．わはは．

実数値に対して定義され, 実数値をとる関数 $f(x)$ であって, 任意の実数 $x$，$y$ に対して，

$$xf(f(x)+y)+y=\{f(x)\}^2+f(xy+f(y))$$

が成立するものを全て求めよ．

数オリ本選レベルよりちょっと簡単くらいのノリで作った．が，高校のとき予選通過したことないので保証はしない．なお，作問の際 [21] を参考にした．

### 23.4.3　蛇足の解答

1. $x\geq 0$ とすると，$(x+1)(x-1)^4\geq 0$ であり，$(x+1)(x-1)^4=x^5-3x^4+2x^3+2x^2-3x+1$ となる．よって，$x^5+2x^3+2x^2+1\geq 3x(x^3+1)$ となる．等号成立は $(x+1)(x-1)^4=0$ のとき，すなわち $x=1$ のとき

である．よって，

$$(a^5+2a^3+2a^2+1)(b^5+2b^3+2b^2+1)(c^5+2c^3+2c^2+1) \geq 27abc(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)$$

となる．等号成立条件は，$a=b=c=1$ である．

（a）Cauchy-Schwarz の不等式を用いる方法

Cauchy-Schwarz の不等式より

$$(a^3+1)(b^3+1) \geq (a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}+1)^2$$
$$(c^3+1)(abc+1) \geq (c^{\frac{3}{2}}(abc)^{\frac{1}{2}}+1)^2$$

となる．それぞれ等号成立条件は，各々 $\dfrac{a}{b}=1$，$\dfrac{c^3}{abc}=\dfrac{c^2}{ab}=1$ のときである．再び Cauchy-Schwarz の不等式を用いると，

$$(a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}+1)(c^{\frac{3}{2}}(abc)^{\frac{1}{2}}+1) \geq (a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{3}{4}}c^{\frac{3}{4}}(abc)^{\frac{1}{4}}+1)^2=(abc+1)^2$$

となる．このとき等号成立条件は $\dfrac{a^3b^3}{c^3(abc)}=1$ となる．3 つの等号成立条件と $a,b,c>0$ から，等号成立条件はまとめて $a=b=c$ となる．さて，上記 2 つの不等式を組み合わせることで，

$$(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)(abc+1) \geq (abc+1)^4$$

すなわち

$$(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1) \geq (abc+1)^3$$

が成立する．等号成立条件は $a=b=c$ である．

（b）Hölder の不等式を用いる方法

Hölder の不等式より

$$(a^3+1)^{\frac{1}{3}}(b^3+1)^{\frac{1}{3}}(c^3+1)^{\frac{1}{3}} \geq (abc+1)$$

であるため，辺々を 3 乗すると，

$$(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1) \geq (abc+1)^3$$

等号成立条件は，$(a^3,b^3,c^3)$，$(1,1,1)$ が並行であることなので，$a=b=c$ である．

以上をまとめると，

$$\begin{aligned}&(a^5+2a^3+2a^2+1)(b^5+2b^3+2b^2+1)(c^5+2c^3+2c^2+1)\\ &\geq 27abc(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)\\ &\geq 27abc(abc+1)^3\end{aligned}$$

が示される．等号成立は $a=b=c=1$ のときである．

2.

$$xf(f(x)+y)+y=\{f(x)\}^2+f(xy+f(y)) \tag{0}$$

(0) に $x=0$ を代入することで，

$$y=\{f(0)\}^2+f(f(y)) \tag{1}$$

となり，$y$ を任意に動かすことで，$f$ が全射であることがわかる．今 $f(c)=0$ となる実数 $c$ をとる．

(0) に $x=0$，$y=0$ を代入することで，

$$0=\{f(0)\}^2+f(f(0)) \tag{2}$$

となる．一方 (0) に $x=c$，$y=0$ を代入することで，

$$cf(0)=f(f(0)) \tag{3}$$

となる．(2) と (3) より $cf(0)=\{f(0)\}^2$ が成立する．これにより $f(0)=0,-c$ とわかる．

- $f(0)=0$ のとき
  (0) に $y=0$ を代入すると，
  $$xf(f(x))=\{f(x)\}^2+f(f(0))=\{f(x)\}^2$$
  (1) に $f(0)=0$ を適用することで，$x=f(f(x))$ が成立するため，
  $$x^2=\{f(x)\}^2$$
  となり，$f(x)=\pm x$ となる．実際，両者共に (0) を満たす．
- $f(0)=-c$ のとき
  (0) に $x=0$，$y=c$ を代入すると，
  $$c=c^2-c$$
  となる．$c=0$ のとき，$f(0)=0$ となり既に議論が済んでいる．
  $c=2$ であるときを考える．(0) に $y=0$ を代入すると，
  $$xf(f(x))=\{f(x)\}^2+f(f(0))=\{f(x)\}^2+f(-2) \tag{4}$$
  である．これに $x=0$ を代入することで，
  $$0=4+f(-2)$$
  となり，(4) は
  $$xf(f(x))=\{f(x)\}^2-4 \tag{5}$$
  となる．(0) に $x=0$ を代入すると，
  $$y=\{-2\}^2+f(f(y))=4+f(f(y))$$
  であり，この式の $y$ を $x$ におきかえ，両辺に $x$ を掛けると，
  $$x^2=4x+xf(f(x)) \tag{6}$$
  (5) と (6) より，$\{f(x)\}^2=x^2-4x+4$ が従う．よって，$f(x)=\pm(x-2)$ であるが，$f(x)=-x+2$ は $f(0)=-2$ を満たさないので不適である．一方で $f(x)=x-2$ は (0) を満たす．

以上より，求めるものは $f(x)=x,-x,x-2$ である．

## 24　おまけのコーナー 6：ガンマ関数とゼータ関数

今回はガンマ関数と三角関数，ゼータ関数の関連性を述べる．

### 24.1　三角関数とガンマ関数の無限積表示

$\sin x$ は $x=n\pi$ で 0 になる．今関数 $f(x)=x-a$ は $x=a$ で 0 になることを踏まえると，

$$\sin x=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

という式が成立することは察せられるだろう (実際成立する)．この関係式に $x = \dfrac{\pi}{2}$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{2} &= \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)\\
&= \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)(2n-1)}{(2n)^2}\\
&= \frac{\pi}{2}\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{(2n+1)(2n-1)}{(2n)^2}\\
&= \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2(2n+1)\\
&= \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 2\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{n}{n}
\end{aligned}
$$

上の式を整理すると，次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 n &= \frac{1}{\pi}\\
\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} &= \sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

こうして $\sin x$ の無限積表示から Wallis の公式が得られた．他にも $\sin x$ の無限積表示から次のように有名公式を求めることができる．

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
\sin x &= x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\\
&= x-\left(\frac{1}{1^2\pi^2}+\frac{1}{2^2\pi^2}+\cdots+\frac{1}{n^2\pi^2}+\cdots\right)x^3+\cdots
\end{aligned}
$$

上記の式の $x^3$ の係数を比較すると，

$$
\frac{1}{6} = \frac{1}{1^2\pi^2}+\frac{1}{2^2\pi^2}+\cdots+\frac{1}{n^2\pi^2}+\cdots
$$

であって，

$$
\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots
$$

が従う．

次にガンマ関数の無限積について述べよう．なお以下の式変形で広義積分の変形が可能であることの証明は省く．

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{\left(-\frac{n}{t}\right)(-t)} t^{x-1}\,dt\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n} t^{x-1}\,dt\\
&= \lim_{n\to\infty}\int_0^{1}(1-s)^n n^{x-1}s^{x-1}nds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} n^x \int_0^1 (1-s)^n s^{x-1} ds \\
&= \lim_{n\to\infty} n^x B(n+1, x) \\
&= \lim_{n\to\infty} n^x \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(x)}{\Gamma(x+n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} n^x \frac{n!\,\Gamma(x)}{(x+n)(x+n-1)\cdots(x+1)x\Gamma(x)} \\
&= \lim_{n\to\infty} n^x n! \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k}
\end{aligned}
$$

こうしてガンマ関数の無限積表示が得られた．[*59]ガンマ関数はこの他にも無限積表示が存在する．準備として Euler の定数を紹介する．受験問題で，自然数の逆数和が，$y = \dfrac{1}{x}$ の積分を考えることで，log により評価できることを見たことがあるだろう．実は自然数の逆数和は極限において対数関数と「等しい」のだ．このことを暗示するものが Euler の定数である．

$$
\lim_{n\to\infty} \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right)
$$

は収束し，その値を $\gamma$ とおく．これを Euler の定数という．[*60]

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(x)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^x n!} \prod_{k=0}^{n} (x+k) \\
&= \lim_{n\to\infty} x n^{-x} \prod_{k=1}^{n} \frac{x+k}{k} \\
&= x n^{-x} \prod_{s=1}^{n} e^{\frac{x}{s}} \prod_{k=1}^{n} \frac{x+k}{k} e^{-\frac{x}{k}}
\end{aligned}
$$

であり，上の式の一部分を取り出して計算する．

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} n^{-x} \prod_{s=1}^{n} e^{\frac{x}{s}} &= \lim_{n\to\infty} n^{-x} e^{x\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{-x} e^{x\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n + \log n\right)} \\
&= e^{\gamma x} \lim_{n\to\infty} n^{-x} e^{x \log n} \\
&= e^{\gamma x} \lim_{n\to\infty} n^{-x} n^{x} \\
&= e^{\gamma x}
\end{aligned}
$$

こうして得られたものを代入すると，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\Gamma(x)} &= x n^{-x} \prod_{s=1}^{n} e^{\frac{x}{s}} \prod_{k=1}^{n} \frac{x+k}{k} e^{-\frac{x}{k}} \\
&= x e^{\gamma x} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{x+k}{k} e^{-\frac{x}{k}} \\
&= x e^{\gamma x} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}
\end{aligned}
$$

[*59] これを Gauss の表示という．
[*60] なおこの定数，わからないことだらけである．無理数かどうかですら示されていない．

となる．こうしてガンマ関数の無限積表示

$$\Gamma(x) = x^{-1}e^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{k}\right)^{-1}e^{\frac{x}{k}}$$

が得られた．[*61]

$\sin x$ と $\Gamma(x)$，2 つの無限積表示を組み合わせてみると，

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(1-x) &= \Gamma(x)\{(-x)\Gamma(-x)\}\\ &= \left(x^{-1}e^{-\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}e^{\frac{x}{n}}\right)\left((-x)(-x)^{-1}e^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-1}e^{-\frac{x}{n}}\right)\\ &= x^{-1}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{-1}\\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi x)}\end{aligned}$$

というおもしろい式が得られる．特に $x=\dfrac{1}{2}$ を代入すると，

$$\begin{aligned}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 &= \pi\\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

が得られる．

## 24.2　Lerch の公式

実はゼータ関数とガンマ関数は Lerch[*62]の公式によって繋がっている．

今回登場するゼータ関数は，Hurwitz[*63]のゼータ関数と呼ばれるものである．

実数 $s>1$，$x>0$(実は実部が上の条件を満たす複素数でも良い) に対し，Hurwitz ゼータは次のように定義される．

$$\zeta(s,x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^s}$$

特に $x=0$ であるものが有名な Riemann のゼータ関数である．

この Hurwitz ゼータとガンマ関数を結びつけるのが以下に述べる Lerch の公式である．

**Lerch の公式**

$$\exp\left(\left.\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\right|_{s=0}\right) = \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}$$

実際に証明してみよう．

まず $f(x) = \left.\dfrac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\right|_{s=0} - \log\Gamma(x)$ とおく．

今この式を 2 回微分すると，

$$f''(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left.\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\right|_{s=0} - \frac{d^2}{dx^2}\log\Gamma(x)$$

*61 これを Weierstrass の表示という．

*62 フランス語を勉強してもこれはレルヒと読めない．

*63 フルヴィッツと読む．

である．ここでそれぞれの式を計算していく．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\zeta(s,x) &= -s\sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-s-1} \\
&= -s\zeta(s+1,x) \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\zeta(s,x) &= s(s+1)\sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-s-2} \\
&= s(s+1)\zeta(s+2,x)
\end{aligned}$$

これの式を $s$ で微分して ($C^3$ 級は仮定していい)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\bigg|_{s=0} &= (2s+1)\zeta(s+2,x) + s(s+1)\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s+2,x)\bigg|_{s=0} \\
&= \zeta(2,x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-2}
\end{aligned}$$

となる．一方，

$$\begin{aligned}
-\log\Gamma(x) &= \log x + \gamma x + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right\} \\
-\frac{d}{dx}\log\Gamma(x) &= \frac{1}{x} + \gamma + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}\right) \\
-\frac{d^2}{dx^2}\log\Gamma(x) &= -\frac{1}{x^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^2} \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}(n+x)^{-2}
\end{aligned}$$

となる．こうして $f''(x) = 0$ とわかる．こうして $f(x) = ax + b$ と表記されることがわかる．次に $f(x+1) = f(x)$ を示す．これが示されたら，$a = 0$ が従う．

$$\begin{aligned}
\zeta(s,x+1) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+x+1)^{-s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(n+x)^{-s} \\
&= \zeta(s,x) - x^{-s}
\end{aligned}$$

であるため，

$$\begin{aligned}
f(x+1) &= \frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x+1)\bigg|_{s=0} - \log\Gamma(x+1) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left(\zeta(s,x) - x^{-s}\right)\bigg|_{s=0} - \log\left(x\Gamma(x)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\bigg|_{s=0} + x^{-s}\log x\bigg|_{s=0} - \log\Gamma(x) - \log x \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\bigg|_{s=0} - \log\Gamma(x) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

こうして $f(x)$ は定数になることが分かった．最後に $x = \dfrac{1}{2}$ を代入して定数を確定させる．

$$
\begin{aligned}
\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{-s} \\
&= 2^s \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)^{-s} \\
&= 2^s \left\{\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - \sum_{n=1}^{\infty}(2n)^{-s}\right\} \\
&= 2^s(1-2^{-s})\zeta(s) \\
&= (2^s-1)\zeta(s)
\end{aligned}
$$

であるため，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right)\Bigg|_{s=0} &= \frac{\partial}{\partial s}(2^s-1)\zeta(s)\Bigg|_{s=0} \\
&= 2^s \log 2\zeta(s) + (2^s-1)\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s)\Bigg|_{s=0} \\
&= \log 2\zeta(0) \\
&= -\frac{1}{2}\log 2
\end{aligned}
$$

ここで $\zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$ という式を用いた．これは複素関数論に登場する解析接続という手法を用いることで示すことができるが，ここでは説明をしない．

ガンマ関数については既に計算した通り，$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\log\sqrt{\pi}$ である．こうして，

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log\pi \\
&= -\frac{1}{2}\log(2\pi)
\end{aligned}
$$

が成立し，

$$
\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\Bigg|_{s=0} - \log\Gamma(x) = -\frac{1}{2}\log(2\pi)
$$

となる．

すなわち，

$$
\exp\left(\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\Bigg|_{s=0}\right) = \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}
$$

が示された．

実は Hurwitz ゼータを多変数に拡張することができ，こうして拡張した多重 Hurwitz ゼータから Lerch の公式を「遡る」ことで，多重ガンマ関数というものが定義される．詳しくは参考文献 [20] を参照してほしい．

## 25 おまけのコーナー 7 : $n$ 次元超球の体積公式

半径は $r$ とする．円の面積は $\pi r^2$ で球の体積は $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ である．初めてこの公式を習ったとき，$r$ の指数が 1 つ増えるのはわかるが，係数の変化には驚いたのではないか．実は $n$ 次元の超球の体積はガンマ関数を用いて書くことができる．この公式を見れば，球の体積で $\dfrac{4}{3}$ という数が出てくることも，なんら不思議ではないと思えるだろう．

**$n$ 次元超球の体積公式**

$n$ 次元超球 : $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=r^2$ の体積 $V_n$ は,

$$V_n=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}r^n$$

で表される.

証明には重積分の計算が必要になる．なお，以下の式では 1 行目から 2 行目の間に $x_i=rx_i'$ という変換をしているのだが，いちいち $x_i'$ と入力するのが面倒であったため，$x_i$ のまま式を続けている.[*64]

$$\begin{aligned}
V_n&=\int\cdots\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=r^2}dx_1\,dx_2\cdots dx_{n-1}\,dx_n\\
&=r^n\int\cdots\int_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1}dx_1\,dx_2\cdots dx_{n-1}\,dx_n\\
&=r^n\int_{-1}^{1}dx_1\int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}}dx_2\cdots\int_{-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_{n-2}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_{n-2}^2}}dx_{n-1}\int_{-\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_{n-2}^2-x_{n-1}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\cdots-x_{n-2}^2-x_{n-1}^2}}dx_n
\end{aligned}$$

見やすくするために，$s_i=x_1^2+x_2^2+\cdots x_i^2$ とおく．更に，各 $i>2$ に対して $x_i=\sqrt{1-s_{i-1}}y_i$ とおく．このとき，$s_{i-1}$ は $x_i$ と独立であるため，$dx_i=\sqrt{1-s_{i-1}}\,dy_i$ となる．これらを式に代入していく.

$$\begin{aligned}
V_n&=r^n\int_{-1}^{1}dx_1\int_{-\sqrt{1-s_1}}^{\sqrt{1-s_1}}dx_2\cdots\int_{-\sqrt{1-s_{n-2}}}^{\sqrt{1-s_{n-2}}}dx_{n-1}\int_{-\sqrt{1-s_{n-1}}}^{\sqrt{1-s_{n-1}}}dx_n\\
&=r^n\int_{-1}^{1}dx_1\int_{-\sqrt{1-s_1}}^{\sqrt{1-s_1}}dx_2\cdots\int_{-\sqrt{1-s_{n-2}}}^{\sqrt{1-s_{n-2}}}dx_{n-1}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-s_{n-1}}\,dy_n\\
&=r^n\int_{-1}^{1}dx_1\int_{-\sqrt{1-s_1}}^{\sqrt{1-s_1}}dx_2\cdots\int_{-\sqrt{1-s_{n-2}}}^{\sqrt{1-s_{n-2}}}\sqrt{1-s_{n-1}}\,dx_{n-1}\int_{-1}^{1}dy_n\\
&=r^n\int_{-1}^{1}dx_1\int_{-\sqrt{1-s_1}}^{\sqrt{1-s_1}}dx_2\cdots\int_{-\sqrt{1-s_{n-2}}}^{\sqrt{1-s_{n-2}}}\sqrt{1-s_{n-2}-x_{n-1}^2}\,dx_{n-1}\int_{-1}^{1}dy_n\\
&=r^n\int_{-1}^{1}dx_1\int_{-\sqrt{1-s_1}}^{\sqrt{1-s_1}}dx_2\cdots\int_{-\sqrt{1-s_{n-2}}}^{\sqrt{1-s_{n-2}}}\sqrt{1-s_{n-2}-(1-s_{n-2})y_{n-1}^2}\,dx_{n-1}\int_{-1}^{1}dy_n\\
&=r^n\int_{-1}^{1}dx_1\int_{-\sqrt{1-s_1}}^{\sqrt{1-s_1}}dx_2\cdots\int_{-\sqrt{1-s_{n-2}}}^{\sqrt{1-s_{n-2}}}\sqrt{1-s_{n-2}}\sqrt{1-y_{n-1}^2}\,dx_{n-1}\int_{-1}^{1}dy_n\\
&=r^n\int_{-1}^{1}dx_1\int_{-\sqrt{1-s_1}}^{\sqrt{1-s_1}}dx_2\cdots\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-s_{n-2}})^2\sqrt{1-y_{n-1}^2}\,dy_{n-1}\int_{-1}^{1}dy_n
\end{aligned}$$

上記で行った変形を繰り返すと，元々 $\displaystyle\int_{-\sqrt{1-s_{i-1}}}^{\sqrt{1-s_{i-1}}}dx_i$ であった箇所は置換によって，$\displaystyle\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-y_i^2})^{n-i}\,dy_i$ となる．こうして,

$$V_n=r^n\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-y_1^2}\right)^{n-1}dy_1\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-y_2^2}\right)^{n-2}dy_2\cdots\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y_{n-1}^2}\,dy_{n-1}\int_{-1}^{1}dy_n$$

となる．ここで各 $i$ について $y_i=\sin\theta_i$ と置換する．これにより，$dy_i=\cos\theta_i\,d\theta_i$，$\sqrt{1-y_i^2}=\cos\theta_i$ となり，積分

[*64] 俺を許してよ～

区間は $[-1,1]$ から $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ となる．これを代入すると，

$$
\begin{aligned}
V_n &= r^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta_1\,d\theta_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta_2\,d\theta_2 \cdots \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta_{n-1}\,d\theta_{n-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta_n\,d\theta_n \\
&= 2^n r^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta_1\,d\theta_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta_2\,d\theta_2 \cdots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta_{n-1}\,d\theta_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta_n\,d\theta_n
\end{aligned}
$$

となる．これに Wallis 積分の公式を導入する．

- $n$ が偶数のとき

$$
\begin{aligned}
V_n &= 2^n r^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta_1\,d\theta_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta_2\,d\theta_2 \cdots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta_{n-1}\,d\theta_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta_n\,d\theta_n \\
&= 2^n r^n \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(n-2)!!}{(n-1)!!}\cdot\frac{(n-3)!!}{(n-2)!!}\frac{\pi}{2}\cdots\frac{1!!}{2!!}\frac{\pi}{2}\cdot 1 \\
&= 2^n r^n \frac{1}{n!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \\
&= 2^{\frac{n}{2}} r^n \frac{1}{n!!}\pi^{\frac{n}{2}} \\
&= \frac{2\cdot 2\cdots 2}{2\cdot\frac{n}{2}\cdot 2\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\cdots\cdot 2} r^n \pi^{\frac{n}{2}} \\
&= \left(\frac{n}{2}\right)^{-1}\pi^{\frac{n}{2}} r^n \\
&= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} r^n
\end{aligned}
$$

- $n$ が奇数のとき

$$
\begin{aligned}
V_n &= 2^n r^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta_1\,d\theta_1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta_2\,d\theta_2 \cdots \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta_{n-1}\,d\theta_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta_n\,d\theta_n \\
&= 2^n r^n \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{(n-2)!!}{(n-1)!!}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(n-3)!!}{(n-2)!!}\cdots\frac{1!!}{2!!}\frac{\pi}{2}\cdot 1 \\
&= 2^n r^n \frac{1}{n!!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \\
&= \frac{2\cdot 2\cdots 2}{2\cdot\frac{n}{2}\cdot 2\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\cdots\cdot 2\cdot\pi^{\frac{1}{2}}} r^n \pi^{\frac{n}{2}} \\
&= \left(\frac{n}{2}\cdot\frac{n-2}{2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\pi^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\pi^{\frac{n}{2}} r^n \\
&= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} r^n
\end{aligned}
$$

以上より求めるべき式が得られた．

## 26 Jacobi 行列式

重積分の可能性のお話などはちゃんと厳密にしたほうが良いが，これはあくまでも試験中に持ち込むかもしれない紙なので，書かない．線型性などは通常の積分と一緒なので，重積分特有感のあるトピックである Jacobi 行列式[*65][*66]をメモする．

[*65] じゃこび行列式ｗ！
[*66] ヤコビと読む．

## 26.1　2 次元

重積分をするときも変数変換をしたくなることはあるだろう．変数変換をするとき，ただ変数を変えるだけでなく，例えば $t=\sin x$ としたときに $dt=\cos x\,dx$ とするような「調整」が必要となる．1 変数のときはただ微分をするだけであったが，2 変数となると少々計算が複雑になる．

2 変数 $x$，$y$ による積分を行う際，各変数を $u$，$v$ で置換するとき，補正として以下の行列の**行列式の絶対値**を掛ける．

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

この行列式を Jacobi 行列式という．以下 $J$ と表記する[*67]．

結局符号は気にしなくて良くなるため，多少場所が入れ替わっても計算上問題はない．つまり上の行列式の $u$ と $v$ を逆にしても耐えるということになる．

こうした変数変換の補正ができるためには条件がある．試験で問題になることはおそらくないであろうが，念のため書いておく．

変数変換を，$uv$ 平面の領域 $E$ から $xy$ 平面の領域 $D$ への写像 $f$ と見る．このとき以下の 3 条件が成立するとき，上記で述べた Jacobi 行列式による変数変換ができる．

1. $f$ は $C^1$ 級である．
2. $f$ は全射になる．
3. 適当に面積が 0 になる閉部分集合 $N$ を取り除けば，$E\setminus N$ 上で $f$ は単射になる．

せっかくなので具体例を書く．

### 26.1.1　1 次変換

$x=au+bv$，$y=cu+dv$[*68] と変換するとき，

$$\begin{aligned} |J| &= \left|\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right| \\ &= |ad-bc| \end{aligned}$$

となる．

### 26.1.2　極変換

$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta\,(r\geq 0)$ と変換するとき，

$$\begin{aligned} |J| &= \left|\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\right| \end{aligned}$$

[*67] 改訂前は行列のことを $J$ としていたが，この場合 $||J||$ というやり難い表記をすることになって大変煩わしいので変更した．
[*68] Cu さん!?

$$= r$$

となる．

変換可能な条件その 3 はこのようなケースについて効力を持つ．極座標変換において，$r = 0$ の点は全て $x = 0$, $y = 0$ に移されてしまう．しかしここを取り除けば，その他の点で $f$ は単射になる．

## 26.2　一般次元

一般に $n$ 変数の積分の変換でも同じことができる．特に 3 次元において例を挙げる．例えば 3 次元のとき，変数 $(x, y, z)$ を $(u, v, w)$ に変換するときには以下のようになる．

$$|J| = \left|\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}\right|$$

### 26.2.1　円柱座標変換

$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，$z = z\,(r \geq 0)$ と変換する．このとき，

$$\begin{aligned} |J| &= \left|\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right| \\ &= r \end{aligned}$$

### 26.2.2　3 次元極座標変換

$x = r\sin\theta\cos\phi$，$y = r\sin\theta\sin\phi$，$z = r\cos\theta\,(r \geq 0$，$0 \leq \theta \leq \pi$，$0 \leq \phi \leq 2\pi)$ と変換する．このとき，

$$\begin{aligned} |J| &= \left|\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \phi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\det\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}\right| \\ &= r^2\sin^3\theta\sin^2\phi + r^2\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^3\theta\cos^2\phi \\ &= r^2\sin^3\theta + r^2\sin\theta\cos^2\theta \\ &= r^2\sin\theta \end{aligned}$$

# 27　広義重積分

試験を解く上では広義重積分可能な関数しか出ないため，ここに条件は書かない．

広義積分を行う際は，積分区間 $D$ に対して，領域の列 $D_n$ を用意する．この領域は「面積確定」という条件が必要で，基本的には連続な曲線・直線で囲まれた領域と解釈して問題ない．領域列は $D_n \subset D_{n+1}$ のような包含関係を課し

ても良い．(広義積分可能とは，こうした領域の列の取り方によらず，積分が収束することであるため，$\lim_{n\to\infty} D_n = D$ なるようにすればどのようなものでも問題はないが，包含関係が一番簡単であろう．)$D_n$ での重積分 $I_n$ が求められるため，$\lim_{n\to\infty} I_n$ を計算すれば良い．

# 28　Laplace 変換

## 28.1　積分記号下の微分

まず有限の区間での定積分のケースから述べよう．

$R = \{(x,t) \mid a \leq x \leq b, c < t < d\}$ とする．$f(x,t)$ は $R$ 上の連続関数であって $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ が存在し，$R$ 上で連続とする．このとき，

$$S(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

は $t$ で微分可能で，

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} f(x,t)\,dx$$

が成立する．

また広義積分でも同様のことが成立する．

$\Omega = \{(x,s) \mid x \geq 0, s \geq 0\}$ とする．$f(x,s)$ は $\Omega$ 上連続で以下を満たすとする．

- 広義積分 $F(s) = \displaystyle\int_0^\infty f(x,s)\,ds$ は $s > 0$ で (各点) 収束する．
- $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ が存在し，$\Omega$ 上連続．
- 広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} f(x,s)\,dx$ は $s$ に関し，広義一様に収束する．

このとき，

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_0^\infty f(x,s)\,dx = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} f(x,t)\,dx$$

が成立する．

答案で書くとき，有限区間のときは書くことが少ないが，広義積分のときは少々腕を動かす必要がある．

## 28.2　Laplace 変換

Laplace 変換

$f(x)$ は $x \geq 0$ で連続かつ有界で広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ は収束するとする．このとき，

$$L(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$$

とすると，$L(s)$ は $s \geq 0$ は一様収束する．この関数 $L(s)$ を $f(x)$ の Laplace 変換という．

以下，関数 $f$ の Laplace 変換[*69] を $\mathcal{L}[f]$ と表記する．

*69「ラプラスの悪魔」のラプラスである．

この変換は工学的にも有用な変換である．数学的には，線型性があるなどの良い性質を持つ変換だ．

### 28.2.1 変換例

数学的性質は後に回し，ここでは変換例をいくつか挙げる．簡単すぎるものは途中式を書かない．~~めんどくさいから．~~読者のことを思って演習問題とする．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[1] &= \int_0^\infty e^{-st}\,dt \\
&= \frac{1}{s} \\
\mathcal{L}[x] &= \int_0^\infty te^{-st}\,dt \\
&= \frac{1}{s^2} \\
\mathcal{L}[\delta(x)] &= \int_0^\infty \delta(t)e^{-st}\,dt \\
&= e^0 = 1 \\
\mathcal{L}[x^a] &= \int_0^\infty t^a e^{-st}\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{s^a}(st)^a e^{-st}\,dt \\
&= \int_0^\infty \frac{s}{s^{a+1}}(st)^{(a+1)-1} e^{-st}\,dt \\
&= \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}} \\
\mathcal{L}[e^{-ax}] &= \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}\,dt \\
&= \frac{1}{s+a} \\
\mathcal{L}[\sin x] &= \int_0^\infty e^{-st}\sin t\,dt \\
&= \frac{1}{s^2+1} \\
\mathcal{L}[\cos x] &= \int_0^\infty e^{-st}\cos t\,dt \\
&= \frac{s}{s^2+1}
\end{aligned}
$$

$a$ は定数である．$\delta(x)$ は Dirac[*70]のデルタ関数である．Dirac のデルタ関数は，既に電磁気学で学んだが，任意の連続関数 $f$ に対して，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0)$$

を満たす関数である．(積分範囲的に怪しくない？という意見は正しいが，ここでは触らないでおく．)

Laplace 変換した関数を微分することは，上記で述べた積分記号下の微分公式を当てはめることができ，非常に簡単

[*70] 20 世紀最高の物理学者の一人と言っても過言ではない．喋らないことで有名で，職場で 1 時間に 1 単語話すことを 1Dirac と定義された．有名になることが好きではなかったようで，ノーベル賞が決まったとき，辞退を考えたらしい．

に計算できる．寧ろこの手法で微分した関数の形が非常に簡単になることもある．

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s) &= \frac{d}{ds}\int_{\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt \\
&= \int_{\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} f(t)e^{-st}\,dt \\
&= \int_{\infty}^{\infty} -tf(t)e^{-st}\,dt
\end{aligned}
$$

となる．

## 28.3 Laplace 変換の便利な性質

いくつか便利な性質を挙げる．これらの証明はやるだけなので読者の演習問題とする．

Laplace 変換には線型性がある．すなわち，$a$，$b$ を定数，$f$，$g$ を関数として，

$$\mathcal{L}[af+bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g]$$

が成立する．

$$\mathcal{L}[f(ax)](s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}[f(x)]\left(\frac{s}{a}\right)$$

関数 $f$ を微分及び積分した関数を Laplace 変換してみよう．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'(x)](s) &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt} f(t)e^{-st}\,dt \\
&= \left[f(t)e^{-st}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-s)f(t)e^{-st}\,dt \\
&= s\mathcal{L}[f(x)](s) - f(0) \\
\mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right](s) &= \int_0^{\infty}\left(\int_0^t f(u)\,du\right)e^{-st}\,dt \\
&= \left[\left(\int_0^t f(u)\,du\right)\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{1}{s}f(t)e^{-st}\,dt \\
&= \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(x)](s)
\end{aligned}
$$

# 29 おまけのコーナー 8 : Fourier 変換

手持ちの本に Laplace 変換を詳しく解説している本がなかったため，計算して正しかったことだけ述べる．申し訳ない．詫びおまけコーナーとして Fourier 変換を扱う．

まず Fourier 変換の定義を述べる．(どのような関数が Fourier 変換できるかどうかはさておき) 実数で定義された関数 $f(x)$ の Fourier 変換とは，

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\,dx$$

この定義がどのように効いてくるのか見ていこう．

## 29.1 Fourier 逆変換のおきもち

さて，Fourier 級数展開の話は既にした．

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$$
$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$$

は $-\pi \leq t \leq \pi$ という範囲で積分をしているが，これは一般の区間 $-L \leq t \leq L$ で考えることができる．このとき，

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{\frac{in\pi x}{L}}$$
$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{\frac{in\pi t}{L}}\,dt$$

とできる．これらを合わせると，

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(t)e^{\frac{in\pi t}{L}}\,dt\right\}e^{\frac{in\pi x}{L}} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{\xi\in\frac{\pi}{L}\mathbb{Z}}\frac{\pi}{L}\left(\int_{-L}^{L} f(t)e^{-i\xi t}\,dt\right)e^{i\xi x} \end{aligned}$$

とできる．ここで形式的に $L \to \infty$ とすれば (区分求積的に考え)，

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi)e^{i\xi x}d\xi$$

となる．こうしたイメージは実際に成立し，Fourier 逆変換が考えられる．

$\xi$ の関数 $h(\xi)$ について，逆 Fourier 変換は以下のように定めることができる．

$$\mathcal{F}^{-1}h(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)e^{i\xi x}d\xi$$

(もちろんこの積分ができるかどうかの厳密な議論は必要であるが，ここでは省略する．)

***

なお，より広く $\mathbb{R}^n$ で定義される関数でも．Fourier 変換を考えることはできる．ここでは深入りしない．

## 29.2 $L^2$ における話題

関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ に対して，

$$f^*(x) = \overline{f(-x)}$$

とおく．また，$\mathbb{R}$ の関数の畳み込み $*$ を

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy$$

と定義する．こうすると，

$$
\begin{aligned}
(f * g^*)(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx \\
(f * f^*)(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx
\end{aligned}
$$

となり，これはまさに $L^2$ の内積・ノルムとなる．このように $L^2$ には，畳み込みを内積として考えることで，内積空間の構造が挿入される．[*71][*72]

さて，Fourier 変換の話に戻ろう．$f^*$ の Fourier 変換は，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f^*)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)e^{-ix\xi}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)}e^{-ix\xi}\,dx \\
&= \overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{ix\xi}\,dx} \\
&= \overline{\mathcal{F}f(\xi)}
\end{aligned}
$$

となる．また，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)e^{-ix\xi}\,dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy\right\}e^{-ix\xi}\,dx \qquad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)g(y)e^{-iz\xi}e^{-iy\xi}\,dz\,dy \\
&= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}g(\xi)
\end{aligned}
$$

なお途中で $x - y = z$ とおいた．Fourier 逆変換とこれを合わせると，

$$
\begin{aligned}
(f * f^*)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f * f^*)(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi}\mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}f^*(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}f^*(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi
\end{aligned}
$$

であり，これに $x = 0$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
(f * f^*)(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(\xi)\mathcal{F}f^*(\xi)\,d\xi \\
&= \|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2
\end{aligned}
$$

一方で既に述べたように $(f * f^*)(0) = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ であるため，Plancherel の公式

$$
\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|\mathcal{F}f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2
$$

が成立する．なんと Fourier 変換はノルムを変えない，すなわち $L^2$ におけるユニタリ変換[*73]になるのだ．

[*71] 余談だが，畳み込みを積，通常の和を和として考えれば，関数による集合に環の構造が挿入される．

[*72] さらに厳密に言えば，ただ二乗可積分であるだけでは微妙に甘い．というのも，$\int_S |f|^2\,d\mu = 0$ であるとは，ほとんどいたるところ (これのような用語がある) で $f = 0$ であるだけでしかない (イメージとしては，$S = \mathbb{R}$ として $x = 1$ だけ $f(1) = 3$ のような関数も，二乗して積分したら 0 になる)．そのため，ほとんどいたるところで 0 な関数と，恒等的に 0 な関数を同一視した集合を考えていることになる．

[*73] 昔ユニタリさんという数学者がいるのだと思っていた．ユニタリを英語で書くと unitary であるから当たり前なのだが，当時の私は unitary という単語を知らなかったのである．

### 29.3 Dirac のデルタ関数と Fourier 変換

デルタ関数に Fourier 変換を施そう．

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\delta)(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)e^{-itx}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-itx}\Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

となる．これに対して逆 Fourier 変換を施すことにより，

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\,dt$$

という表示が得られる．

## 30 線積分

~~俺は線積分をそんなに勉強していないのに何で扱うだァーッ~~[*74]

### 30.1 有向曲線

$$\begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{cases} \qquad (a \le t \le b)$$

というように表現された点 $(\alpha(t), \beta(t))$ は曲線を動く．この曲線の始点と終点を区別し，向きつけが成された曲線を有向曲線[*75]と呼ぶ．特に始点と終点が一致するものは閉曲線と呼ばれる．曲線を定める関数 $\alpha(t)$，$\beta(t)$ が $C^r$ 級のとき，これを $C^r$ 級有向曲線と呼ぶ．

基本的に有向曲線は $C$ で書かれる．また，ある有向曲線 $C$ に対して，終点から始点に逆に向かう有向曲線を $-C$ と書くことがある．

### 30.2 微分形式と線積分

連続関数 $f(x,y)$，$g(x,y)$ に対して，$f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ を微分形式という．各関数 $f, g$ が $C^r$ 級のとき，$C^r$ 級微分形式という．

微分形式

$$\omega = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$$

と

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad (a \le t \le b)$$

なる $C^1$ 級有向曲線について，

$$\int_C \omega = \int_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \int_a^b \left( f(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt} + g(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt} \right) dt$$

を微分形式 $\omega$ の (有向) 曲線 $C$ に沿った線積分という．

---

*74 ジョジョは読みましたか？

*75 友好的な有向曲線 w！

### 30.3　線積分の性質

線積分の値は曲線の種類と向きにのみ依存し，パラメタ $t$ の取り方には依らない．例えば，曲線 $C$ を原点中心の円の上半分としたとき，その曲線に沿った関数を

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

としても，

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \sqrt{2t - t^2} \end{cases} \qquad (0 \leq t \leq 2)$$

としても $C$ に沿った線積分の値は変わらない．

向きを気にする理由の 1 つになるが，以下が成立する．

$$\int_{-C} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = -\int_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$$

### 30.4　複数の曲線の合併のとき

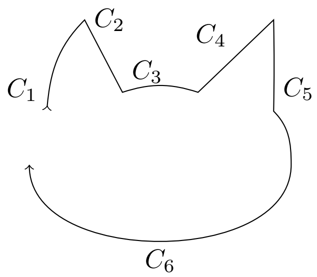


図 6　連結な曲線の例

~~ねこですよろしくおねがいします．~~[*76]上の図のように有限個の $C^1$ 級有向曲線が，$C_i$ の終点が $C_{i+1}$ の始点になるようにくっついている (連結という) ものを「区分的に $C^1$ 級の曲線」という．また，$C^1$ 級曲線 $\{C_i\}_{i=1,2,\cdots,n}$ から成る区分的に $C^1$ 級の曲線 $C$ の線積分は，

$$\int_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$$

で定める．

さらに上の図[*77]のように，曲線が連結でない場合，これらの曲線をまとめて $C$ とおくとき，$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ というように表記する．

一般的に $n$ 個の独立した $C^1$ 級有向曲線の和集合 $C$ は $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$ と書く．$C$ 線積分は，

$$\int_C f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = \sum_{i=1}^{n} \int_{C_i} f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$$

で定める．

*76 SCP-40-JP
*77 これじゃあ SCP-40-JP というよりは SCP-1374-JP だ．

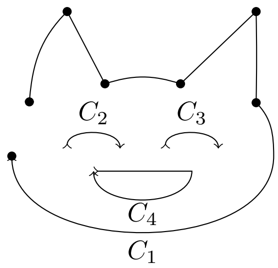


図 7 連結でない曲線の例

## 30.5 Green の定理

ある条件を満たす領域 (とは言っても極めて単純なもの) 上の重積分が線積分で表され，これを Green の定理という．これは計算のとき非常に有用である．

**Green の定理**

$\Omega$ を，適切に有限個の領域に分解した際，各領域が有限個の滑らかな曲線・直線で囲われたものになる領域とする[a]．こうした領域は，$\Omega$ の境界 $\partial\Omega$ に，領域内部が左にあるように進む向きを付ける．
$P(x,y)$，$Q(x,y)$ を $\Omega$ を含む開集合上の $C^1$ 級関数とする．このとき，

$$\int_{\partial\Omega} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

が成立する．

[a] 区分的に滑らかな曲線群に囲まれた面積確定な領域であるとも表現できる．が，下図に示すような一部が曲線に囲われるようにくり抜かれた領域について，どう言及するのが well-defined になるのか考えると，こうした定義が無難と言える．

定理を満たす $\Omega$(分割込み) とその向きの例として下図を挙げる．

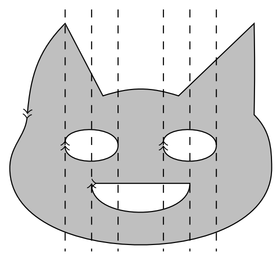

図 8 Green の定理の要件を満たすような領域の図

## 参考文献

[1] 下川 航也，http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/KoyaShimokawa.html.
[2] MIT Technology Review，代数的位相幾何学脳科学に革命を起こす，https://www.technologyreview.jp/s/6971/.
[3] INTEGERS，リーマンの再配列定理，http://integers.hatenablog.com/entry/2016/08/25/025342.
[4] 東京大学大学院数理科学研究科・理学部数学科，https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/teacher/kiyono.html.

[5] 東京大学，[Features] 永遠に初心者の心で自然現象を追究し数学の領域を拡げたい。｜ UTOKYO VOICES 089，https://www.u-tokyo.ac.jp/focus/ja/features/voices089.html.

[6] TV でた蔵，ゆかりの老舗料亭で伝説の天才同級生が登場！，https://datazoo.jp/n/%E3%82%86%E3%81%8B%E3%82%8A%E3%81%AE%E8%80%81%E8%88%97%E6%96%99%E4%BA%AD%E3%81%A7%E4%BC%9D%E8%AA%AC%E3%81%AE%E5%A4%A9%E6%89%8D%E5%90%8C%E7%B4%9A%E7%94%9F%E3%81%8C%E7%99%BB%E5%A0%B4%EF%BC%81/16704980.

[7] 鎌田正良，集合と位相 (現代数学ゼミナール)，近代科学社，1989.

[8] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald，*Introduction to commutative algebra*，Addison-Wesley，1969.（邦訳：Atiyah-MacDonald 可換代数入門，新妻弘訳，共立出版，2006.）

[9] 俣野博，微分と積分 3(岩波講座 現代数学への入門)，岩波書店，1996.（再版：俣野博，現代解析学への誘い (現代数学への入門)，岩波書店，2004.）

[10] 高橋陽一郎，微分と積分 2 (岩波講座 現代数学への入門 2)，岩波書店，1995.

[11] 俣野博，微分と積分 3 (岩波講座 現代数学への入門 3)，岩波書店，1996.

[12] 伊藤清三，ルベーグ積分入門 (数学選書 4)，裳華房，1963.

[13] ウラジミル・イワノビッチ・スミルノフ，翻訳監修 彌永昌吉・菅原正夫・三村征雄・河田敬義・福原満洲雄・吉田耕作，スミルノフ高等数学教程 3，共立出版，1958.

[14] ウラジミル・イワノビッチ・スミルノフ，翻訳監修 彌永昌吉・菅原正夫・三村征雄・河田敬義・福原満洲雄・吉田耕作，スミルノフ高等数学教程 11，共立出版，1962.

[15] 加藤和也・黒川信重・斎藤毅，数論 1(岩波講座 現代数学の基礎)，岩波書店，1996.（再版：加藤和也・黒川信重・斎藤毅，数論 I ー Fermat の夢と類体論，岩波書店，2005.）

[16] 大石進一，フーリエ解析 (理工系の数学入門コース 6)，岩波書店，1989.

[17] 高橋陽一郎，実関数と Fourier 解析 1(岩波講座 現代数学の基礎 1)，岩波書店，1996.

[18] 高橋陽一郎，実関数と Fourier 解析 2(岩波講座 現代数学の基礎 2)，岩波書店，1998.

[19] 小林俊行・大島利雄，Lie 群と Lie 環 1(岩波講座 現代数学の基礎 12)，岩波書店，1999.

[20] 黒川重信，現代三角関数論，岩波書店，2013.

[21] 小林一章 監修，獲得金メダル！国際数学オリンピック—メダリストが教える解き方と技，朝倉書店，2011.

[22] 中村力，数学検定 1 級準拠テキスト　微分積分，森北出版，2016.

[23] CASIO，ke!san 生活や実務に役立つサイト，https://keisan.casio.jp/.

[24] グレブナー基底大好き bot，twitter.com/groebner_basis.