電磁気学 A 期末テスト　担当講師: 金澤直也　(2021 年 1 月 27 日 10:35-11:35)

以下の問を解答せよ。解答用紙には導出過程も含めて記述すること。問題に不備があると考える場合は、問題点を記述し、自ら適切に問題設定し解答すること。また断りがない限り、ベクトル量は太字で示してあり、電場 $\boldsymbol{E}$、磁場 $\boldsymbol{B}$、電荷密度 ρ、時間 t、位置 $\boldsymbol{r}$、真空の誘電率 ϵ_0、真空の透磁率 μ_0、光速 c と表されている。マクスウェル方程式 $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}$、$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$、$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$、$\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}+\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$ を用いても良い。

問 1(必須解答)

[1] $\nabla\times[\nabla f(\boldsymbol{r})]=\boldsymbol{0}$ を代数的に示せ。ただし、$f(\boldsymbol{r})$ は任意の位置 $\boldsymbol{r}$ に対するスカラー関数とする。

[2] 原点に磁気双極子 $\boldsymbol{m}$ が置かれているとき、位置 $\boldsymbol{r}$ におけるベクトルポテンシャルは $\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$ と書ける。このベクトルポテンシャルの回転を計算することにより、磁場 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。

問 2

[1] 面電荷密度 σ で帯電した平板がある。この平板から垂直方向に h だけ離れた位置における電場 $\boldsymbol{E}$ を求めよ。ただし、平板は無限に広いと仮定する。

[2] 3 次元空間の直交座標系において、$z\leq 0$ を占める半無限の導体があり、z 軸上の座標 $(0,0,d)$ に点電荷 q が置かれている $(d>0)$。このとき、導体表面での電場 $\boldsymbol{E}$ と誘導電荷の面密度分布 $\sigma(x,y,0)$ を求めよ。

[3] 3 次元空間の直交座標系において、原点を中心とした xy 平面上の半径 a の円に沿って電流 I が流れている。電流の向きは z 軸の正の方向から見て反時計回りとする。このとき、z 軸上の磁場 $\boldsymbol{B}(0,0,z)$ を求めよ。

[4] 無限に長いソレノイド (導線を円筒面にらせん状に一様かつ密に巻いたコイル) に電流 I を流したとき、ソレノイドの内部と外部における磁場 $\boldsymbol{B}$ を求めよ。ただし、単位長さあたりの導線の巻き数を n とする。

問 3

[1] 電荷や電流が存在しない真空中を平面電磁波 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{B}_0\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)$ が伝わるときを考える。平面電磁波の満たす以下の条件の空欄 1 から 5 に当てはまる量を答えよ。

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}_0=\boxed{\ 1\ },\ \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0=\boxed{\ 2\ },\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0=\boxed{\ 3\ },\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0=\boxed{\ 4\ },\ \omega^2=\boxed{\ 5\ }k^2.$$

[2] 電磁場のエネルギー密度 $w_{\rm em}$ は $w_{\rm em}=\frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2+\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2$ と書ける。このとき電磁場のエネルギー密度の時間変化 $\frac{\partial w_{\rm em}}{\partial t}=\boxed{\ 6\ }$ を計算し、空欄 6 に当てはまる量をポインティングベクトル $\boldsymbol{S}=\frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})$、電流密度 $\boldsymbol{j}$、電場 $\boldsymbol{E}$ を用いて書き表せ。