微分積分学②（理科 I 類 2, 4, 5, 8 組）期末試験問題

担当教員：大場　清

2021 年 1 月 26 日 5 限（17:15-18:45）

解答用紙: 1 冊（A4 版両面 3 枚），計算用紙：1 枚

注意：教科書・参考書・ノート等の持ち込みは不可です．解答用紙に氏名・学生証番号，問題の答えを書いて提出して下さい．また，答案は，どのように考えたかの筋道がわかるように書いてください．

問題 1 $\mathbb{R}^2$ を定義域とした次の関数を考える．

$$f(x,y) = x^3 + x^2 + xy^2 - x$$

(1) 関数 $f(x,y)$ のすべての停留点を求め，そのそれぞれが極大点，極小点，鞍点であるか，あるいはそのどれでもないかを判定せよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ の定義域を次の集合 D に制限したときの最大値と最小値を求めよ．

$$D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leqq 4\,\}$$

問題 2 (1) 次の反復積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \left(\int_y^{\sqrt{\pi}} y^2 \sin(x^2)\,dx \right) dy$$

(2) $V = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x-2)^2 + (y-1)^2 \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq xy\,\}$ と表される立体 V の体積を求めよ．

問題 3 次に答えよ．

(1) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ について，

(a) 収束半径 r を求め，収束冪級数であることを確認せよ．

(b) 関数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\quad(-r < x < r)$ を，高校までに習った関数を用いて表せ．

(2) $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ とし，任意の自然数 n に対し $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ が成り立つとして数列 $\{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ を定めると，冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径 r は 0 ではない．このことは認めることとする．

(a) 関数 $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\quad(-r < x < r)$ を，x の有理関数（分数関数）として表せ．

(b) 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径 r を，「ダランベールの公式」により求めよ．