数理科学 I　1 章 多変数 (2 変数) の微分法 のまとめと問題

§1.1. 陰関数定理

定理 1.1.1, 1.1.1'. 陰関数定理

命題 1.1.2. 接線の方程式

例 1.1.3. レムニスケート．$a > 0$ を定数する．

$$C = \{f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0\}$$

の概形を図示せよ．

1. C と各座標軸との交点を求める．
2. f の偏微分を調べる．特に C 上で $f_x = 0, f_y = 0$ となる点を調べる．
3. C の陰関数の増減を調べる．

(3'. 命題 1.1.2 などにより接線を調べる．特に接線が各座標軸と平行になる点を調べる.)

4. 図にまとめる．C の対称性, 各座標軸と平行な直線との交点の個数などに注意する．

問題. 例 1.1.3 に従って以下で定義された曲線の概形を図示せよ．

(1) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. デカルトの葉線, $x = \frac{3t}{1+t^3}, y = \frac{3t^2}{1+t^3}$ とパラメーター表示される．

(2) $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ $(a > b > 0, a^2 \neq 2b^2)$.

問題. 次の式によって定められる x の陰関数 y についてその微分 y', y'' を求めよ．

(1) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. $(y' = -\frac{x^2-ay}{y^2-ax}, y'' = -\frac{2(x^4y-3ax^2y^2+xy^4+a^3xy)}{(y^2-ax)^3})$

(2) $y = e^{x+y}$. $(y' = \frac{y}{1-y}, y'' = \frac{y}{(1-y)^3})$

問題. 次の式によって定められる x の陰関数 y の極値を求めよ．($y' = 0$ となるときの y'' の符号を調べる...)

(1) $x^2 + 2xy + 2y^2 = 1$.　($x = -1$ で最大値 $y = 1$, $x = 1$ で最小値 $y = -1$)

(2) $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$ $(a > 0)$. ($x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ で最大値 $y = \frac{1}{2\sqrt{2}}a$, 最小値 $y = -\frac{1}{2\sqrt{2}}a$)

a

§1.2. 逆関数定理

定理 1.2.1. 逆関数定理

定理 1.2.2. 陰関数定理, その 2 多変数

問題. 次の式によって定められる x, y の陰関数 z の極値を求めよ．($z_x = z_y = 0$ となる点におけるヘッセ行列式 $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2$, および z_{xx} などの符号を調べる.)

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz = 2$.

$((x, y) = (1, 1)$ で極大値 1, $(x, y) = (-1, -1)$ で極小値 $-1)$

§1.3. 条件付き最大・最小問題

定理 1.3.2. ラグランジュの未定乗数法

例 1.3.3. $x^4+y^4=1$ のもとで $f(x,y)=x^3+2y^3$ は最大値 $f(1/\sqrt[4]{17},2/\sqrt[4]{17})=\sqrt[4]{17}$, 最小値 $f(-1/\sqrt[4]{17},-2/\sqrt[4]{17})=-\sqrt[4]{17}$.

定理 1.3.4. ラグランジュの未定乗数法, 多変数 $D\subset\mathbb{R}^n$ を有界な閉領域, $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$. $f(x),\varphi(x)$ を D 上の C^1 級関数とする. $\lambda\in\mathbb{R}$ をパラメーター (未知変数) として $F(x,\lambda)=f(x)+\lambda\varphi(x)$ とおく. 条件 $\varphi(x)=0$ の下で $f(x)$ の最大・最小を与える D の点は次の (i)–(iii) のいずれかである.

(i) D の境界上の点で $\varphi(x)=0$ をみたす.

(ii) $S=\{x\in D;\ \varphi(x)=0\}$ の特異点, つまり $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(x)=0\ (1\leq\forall\, i\leq n)$ となる $x\in S$.

(iii) $x=(x_1,\ldots,x_n),\lambda$ を未知変数とする連立方程式 $F_{x_1}(x)=0,\ldots,F_{x_n}(x)=0,\varphi(x)=0$ の解を与える点.

例 1.3.5. 体積が一定の直方体のうち, その表面積が最小となるのは立方体である.

問題. 条件 $x^2+y^2=1$ のもとで次の関数の最大・最小値を求めよ.

(1) x^3+y^3　($(1,0),(0,1)$ で最大値 1, $(-1,0),(0,-1)$ で最小値 -1)

(2) $x+2y$　($(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})$ で最大値 $\sqrt{5}$, $(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}})$ で最小値 $-\sqrt{5}$)

問題. (1) 条件 $x+2y+3z=d>0, x>0, y>0, z>0$ のもとで xy^2z^3 の最大値を求めよ. ($x=y=z=d/6$ のとき $(d/6)^6$)

(2) $1/x^2+1/y^2=1/a^2$ のもとで $1/x+1/y$ の最大・最小値を求めよ.　($(\sqrt{2}a,\sqrt{2}a)$ で最大値 $\sqrt{2}/a$, $(-\sqrt{2}a,-\sqrt{2}a)$ で最小値 $-\sqrt{2}/a$)

問題. 直方体の辺の和が一定であるとき, その体積が最大になるのは立方体の場合であることを示せ.

1 章の問題と解説

§1.1 陰関数定理

問題. 以下で定義された曲線の概形を図示せよ:

(1) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

(2) $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ $(a > b > 0, a^2 \neq b^2)$.

(解)…SkyDrive→public→総合科目→数理科学 I →graph.pdf を参照.

問題. 次の式によって定められるxの陰関数yについてその微分y', y''を求めよ.

(1) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

(2) $y = e^{x+y}$.

(解)

(1) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$の両辺をxで微分して

$$3x^2 + 3y^2y' - 3ay - 3axy' = 0$$

$$\therefore x^2 + y^2y' - ay - axy' = 0. \tag{1.1}$$

従って

$$y' = -\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}.$$

(1.1)式の両辺をxで微分して

$$2x + 2yy'^2 + y^2y'' - 2ay' - axy'' = 0$$

$$\therefore y'' = -\frac{2(x + yy'^2 - ay')}{y^2 - ax} = -\frac{2\left(x(y^2 - ax)^2 + y(x^2 - ay)^2 - a(x^2 - ay)(y^2 - ax)\right)}{(y^2 - ax)^3}$$

$$= -\frac{2(x^4y - 3ax^2y^2 + xy^4 + a^3xy)}{(y^2 - ax)^3}.$$

(2) $y = e^{x+y}$の両辺をxで微分して

$$y' = e^{x+y}(1 + y') = y(1 + y')$$

$$\therefore y' = \frac{y}{1 - y}.$$

両辺を更にxで微分して

$$y'' = \frac{y'}{(1 - y)^2} = \frac{y}{(1 - y)^3}.$$

問題. 次の式によって定められるxの陰関数yの極値を求めよ.

(1) $x^2+2xy+2y^2=1.$

(2) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\ (a>0).$

(解)

(1) $x^2+2xy+2y^2=1$の両辺をxで微分して

$$2x+2y+2xy'+4yy'=0$$
$$\therefore x+y+xy'+2yy'=0. \tag{1.2}$$

従って

$$y'=-\frac{x+y}{x+2y}.$$

(1.2)式の両辺をxで微分して

$$1+2y'+xy''+2y'^2+2yy''=0$$

$$\therefore y''=-\frac{1+2y'+2y'^2}{x+2y}=-\frac{(x+2y)^2+2(x+y)(x+2y)+2(x+y)^2}{(x+2y)^3}=-\frac{x^2+2xy+2y^2}{(x+2y)^3}$$
$$=-\frac{1}{(x+2y)^3}.$$

さて,$x^2+2xy+2y^2=1$かつ$y'=0$とすると

$x^2+2xy+2y^2=1$ かつ$y=-x \Leftrightarrow x^2=1$ かつ$y=-x \Leftrightarrow (x,y)=(\pm1,\mp1)$[複号同順].

ここで,$(x,y)=(\pm1,\mp1)$のそれぞれに対して

$$y''=\pm1$$

∴最大値: $1\ (x=-1)$

最小値: $-1\ (x=1).$

(2) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$の両辺をxで微分して

$$2(x^2+y^2)(2x+2yy')=a^2(2x-2yy'). \tag{1.3}$$

従って

$$y'=-\frac{x(2(x^2+y^2)-a^2)}{y(2(x^2+y^2)+a^2)}.$$

(1.3)式の両辺をxで微分して

$$2(2x+2yy')^2+2(x^2+y^2)\left(2+2y'^2+2yy''\right)=a^2\left(2-2y'^2-2yy''\right). \tag{1.4}$$

さて,$y'=0$とすると$x=0$ または$x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$であるが,$x=0$のとき

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\text{かつ}x=0 \Leftrightarrow x=0\text{ かつ}y^4=-a^2y^2 \Leftrightarrow (x,y)=(0,0).$$

$x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$のとき

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\text{かつ}x^2+y^2=\frac{a^2}{2}\Leftrightarrow\frac{a^4}{4}=a^2\left(2x^2-\frac{a^2}{2}\right)\text{かつ}x^2+y^2=\frac{a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow(x,y)=\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a,\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}a\right)[\text{複号任意}].$$

(1.4)式より,$(x,y)=\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a,\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}a\right)$のそれぞれについて

$$2(2x)^2+2\cdot\frac{a^2}{2}(2+2yy'')=a^2(2-2yy'')\Leftrightarrow y''=-\frac{a^2y}{2x^2}=\mp\frac{\sqrt{2}}{3}a[\text{複号は}y\text{と同順}]$$

∴最大値: $\frac{1}{2\sqrt{2}}a\left(x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a\right)$

最小値: $-\frac{1}{2\sqrt{2}}a\left(x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a\right)$.

§1.2 逆関数定理

問題. 次の式によって定められるx,yの陰関数zの極値を求めよ.

$$x^2+2y^2+3z^2-2xy-2yz=2. \tag{1.5}$$

(解)

(1.5)式の両辺をxで偏微分すると

$$2x+6zz_x-2y-2yz_x=0. \tag{1.6}$$

同様に,yで偏微分すると

$$4y+6zz_y-2x-2z-2yz_y=0. \tag{1.7}$$

(1.6),(1.7)式より,$z_x=z_y=0$となる点は$x=y=z$を満たすから,(1.5)式より

$$(x,y,z)=(\pm1,\pm1,\pm1)[\text{複号同順}]$$

を得る.次に,(1.6)式の両辺をx,yで,(1.7)式の両辺をyでそれぞれ偏微分すると

$$2x+6{z_x}^2+6zz_{xx}-2yz_{xx}=0,$$
$$6z_yz_x+6zz_{xy}-2-2z_x-2yz_{xy}=0,$$
$$4+6{z_y}^2+6zz_{yy}-4z_y-2yz_{yy}=0.$$

従って,$(x,y,z)=(\pm1,\pm1,\pm1)$に対して$(z_{xx},z_{xy},z_{yy})=\left(\mp\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2},\mp1\right)$[複号同順].また,このとき$z_{xx}z_{yy}-{z_{xy}}^2=\frac{1}{4}>0$.

以上より,$(x,y)=(1,1)$のとき極大値 1,$(x,y)=(-1,-1)$のとき極小値-1.

§1.3 条件付き最大・最小問題

(「ラグランジュの未定乗数法」で答案を書くのが面倒なので,とりあえず別の方法で解いておきます.時間があったら未定乗数法を用いたものも作ります)

問題. 条件$x^2+y^2=1$のもとで次の関数の最大・最小値を求めよ.

(1) x^3+y^3

(2) $x+2y$

(解)

(1) $x^2+y^2=1$より,$x=\cos\theta, y=\sin\theta$とおける.このとき$x^3+y^3=\cos^3\theta+\sin^3\theta=f(\theta)$とおくと

$$f'(\theta)=-3\cos^2\theta\sin\theta+3\sin^2\theta\cos\theta=3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$$

$$=3\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\therefore f'(\theta)=0\Leftrightarrow\theta\equiv 0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\pi,\frac{5}{4}\pi,\frac{3}{2}\pi \pmod{2\pi}.$$

各θに対し,fの値は順に

$$1,\frac{1}{\sqrt{2}},1,-1,-\frac{1}{\sqrt{2}},-1$$

∴最大値: $1\ \big((x,y)=(1,0),(0,1)\big)$

最小値: $-1\ \big((x,y)=(-1,0),(0,-1)\big)$.

(2) (1)と同様に$x=\cos\theta, y=\sin\theta$とおくと

$$x+2y=\cos\theta+2\sin\theta=\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)\ \left(\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

∴最大値: $\sqrt{5}\ \left((x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)$

最小値: $-\sqrt{5}\ \left((x,y)=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right)$.

問題. (1) 条件$x+2y+3z=d>0, x>0, y>0, z>0$のもとで$xy^2z^3$の最大値を求めよ.

(2) $1/x^2+1/y^2=1/a^2$のもとで$1/x+1/y$の最大・最小値を求めよ.

(解)

(1) $x>0,y>0,z>0$より,相加相乗不等式を用いて

$$d=x+2y+3z=x+y+y+z+z+z\geq 6\sqrt[6]{xyyzzz}=6\sqrt[6]{xy^2z^3}$$

$$\therefore xy^2z^3 \leq \left(\frac{d}{6}\right)^6.$$

等号成立条件は$x = y = z = \frac{d}{6}$である.以上より

最大値: $\left(\frac{d}{6}\right)^6 \left(x = y = z = \frac{d}{6}\right).$

(2) $1/x^2 + 1/y^2 = 1/a^2$より,$1/x = \cos\theta/a$, $1/y = \sin\theta/a$とおける.このとき

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{\cos\theta}{a} + \frac{\sin\theta}{a} = \frac{\sqrt{2}}{a}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

∴最大値: $\frac{\sqrt{2}}{a} \left((x, y) = \left(\sqrt{2}a, \sqrt{2}a\right)\right)$

最小値: $-\frac{\sqrt{2}}{a} \left((x, y) = \left(-\sqrt{2}a, -\sqrt{2}a\right)\right).$

問題. 直方体の辺の和が一定であるとき,その体積が最大になるのは立方体の場合であることを示せ.

(解)

直方体の辺の長さをそれぞれ$x, y, z (> 0)$とし,その和をlとする.相加相乗不等式より

$$l = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$$

$$\therefore xyz \leq \left(\frac{l}{3}\right)^3.$$

等号が成り立つのは,$x = y = z$,すなわち立方体の場合である.

(1). $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$ ↩ ($y=x$ に関して対称)

x軸との共有点 … $(0,0)$

y軸との共有点 … $(0,0)$

$f_x = 3x^2 - 3y$

$f_y = 3y^2 - 3x$

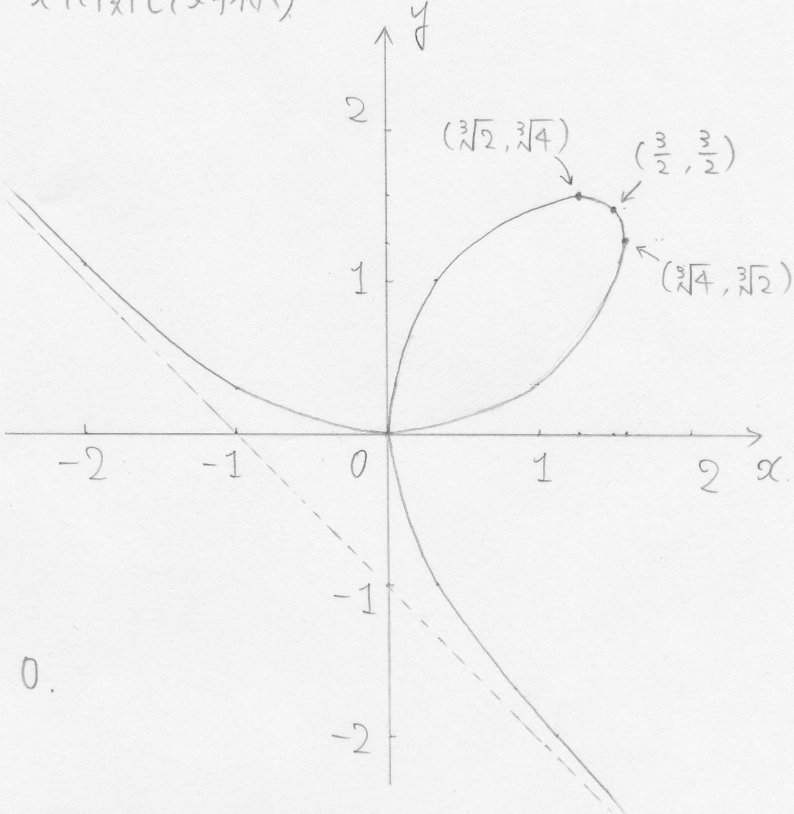
$\therefore f_x = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0),\ (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$

$\therefore f_y = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0),\ (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$

オマケ

漸近線：$x \to \pm\infty$ のとき、$y = -x-1$.

$f(1, 2\sin\frac{\pi}{18}) = f(2\sin\frac{\pi}{18}, 1) = 0.$



(2). $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - (a^2x^2 + b^2y^2) = 0$ ↩ (x軸、y軸に関して対称)

$(a > b > 0,\ a^2 \neq 2b^2)$

x軸との共有点 … $(0,0),\ (\pm a, 0)$

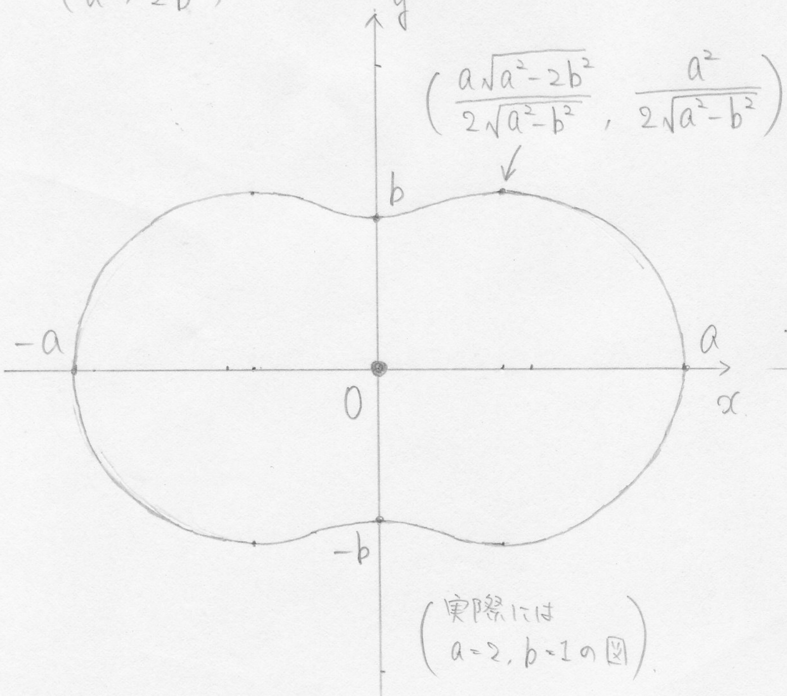
y軸との共有点 … $(0,0),\ (0, \pm b)$

$a^2 > 2b^2$ の場合のみ.

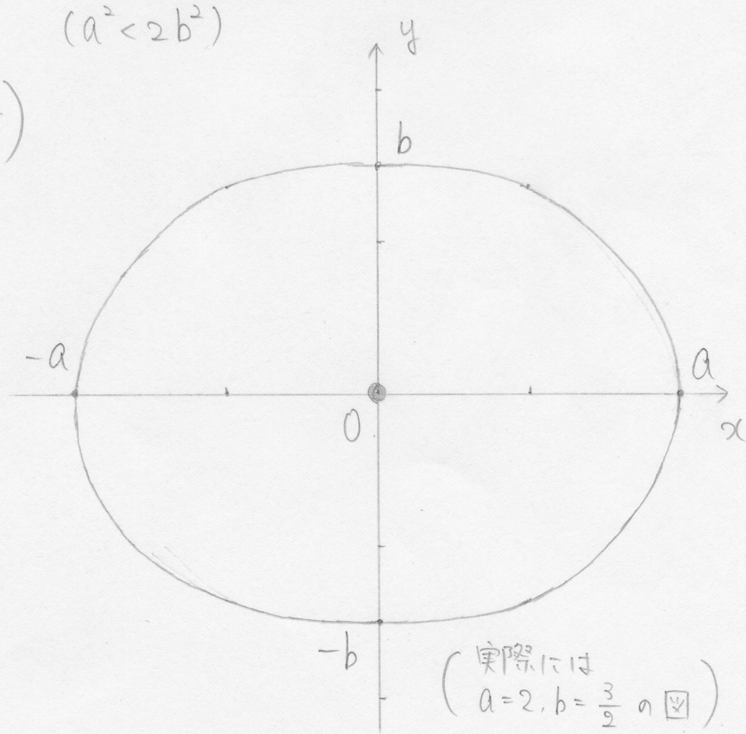
$f_x = 2x\left(2(x^2+y^2) - a^2\right)$ $\therefore f_x = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0),\ (0, \pm b),\ \left(\pm \dfrac{a\sqrt{a^2-2b^2}}{2\sqrt{a^2-b^2}},\ \pm \dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2-b^2}}\right)$

$f_y = 2y\left(2(x^2+y^2) - b^2\right)$ $\therefore f_y = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0),\ (\pm a, 0)$

$(a^2 > 2b^2)$



$(a^2 < 2b^2)$



(注：原点もグラフに含まれます)

数理科学Ⅰ　2章 空間内の曲線と曲面 のまとめと問題

§2.1 平面曲線

問題. 曲線 $C=\{y=e^{2x}\}$ と点 $P=(0,1)$ において交わる放物線 $C'=\{y=ax^2+bx+c\}$ のうち, 最大の接触をするものを求めよ. ($a=2, b=2, c=1$ のとき 2 次の接触. 3 次以上の接触はしない.)

命題 2.1.4. 曲線 $C=\{y=f(x)\}$ の曲率円, 曲率半径, 曲率

$$\text{曲率} \to r^{-1}=\frac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{3/2}}. \quad r=\frac{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|} \ :\text{曲率半径}$$

問題. (1) 曲線 $C=\{(x(t),y(t));\ t\in\mathbb{R}\}$ の曲率は, その特異点以外の点では

$$r^{-1}=\frac{|x'y''-y'x''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$$

となることを示せ.

(2) 曲線 $C=\{F(x,y)=0\}$ の曲率は, その特異点以外の点では

$$r^{-1}=\frac{|F_{yy}F_x^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{xx}F_y^2|}{(F_x^2+F_y^2)^{3/2}}$$

となることを示せ.

問題. 次の曲線の与えられた点における曲率と曲率円を求めよ.

(1) $xy=1$, 点 $(1,1)$.　$((x-2)^2+(y-2)^2=2)$ → 曲率 $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, 点 $(a,0)$.　$((x-(a^2-\overset{b^2}{\cancel{b-2}})/a)^2+y^2=b^4/a^2)$ → 曲率 : $\frac{|a|}{b^2}$

(3) $y=\log x$, 点 $(1,0)$.　$((x-3)^2+(y+2)^2=8)$ → 曲率 : $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

問題. 次の曲線の曲率の極値をとる点を求めよ.

(1) $y=\log x$　$(x=1/\sqrt{2})$ → $(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\log 2\right)$

(2) $C=\{(3\cos t+\cos 3t, 3\sin t+\sin 3t);\ t\in\mathbb{R}\}$　$(t\in n\pi, n\in\mathbb{N})$ → $(x,y)=(\pm 4, 0)$

§2.2. 空間内の曲線と曲面

2.2.3 曲面 $S\subset\mathbb{R}^3$ の表示

(1) グラフ型 $z=f(x,y), (x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2$.

(2) パラメーター表示型 $S=\{P(s,t)=(x(s,t),y(s,t),z(s,t))\in\mathbb{R}^3; (x,y)\in D\subset\mathbb{R}^2\}$.

(3) 陰関数型 $F(x,y,z)=0$.

2.2.4 曲面の接平面, 法ベクトル

(2) 曲面 $S=\{P(s,t)=(x(s,t),y(s,t),z(s,t))\}$ のとき.

$P_s=P_s(s,t)=(x_s(s,t),y_s(s,t),z_s(s,t)), P_t=P_t(s,t)=(x_t(s,t),y_t(s,t),z_t(s,t))$ とする. 点 $P\in S$ を始点とするベクトル $P_s(s,t)$ と $P_t(s,t)$ とで張られる平面 H_P を P での接平面という. H_P の法ベクトルは $\mathbf{n}(s,t)=P_s(s,t)\times P_t(s,t)$ ととれ, これを S の P での法ベクトルという.

(1) グラフ型 $z=f(x,y)$, (3) 陰関数型 $F(x,y,z)=0$ の場合の接平面.

2.2.5 曲面の例 (2 次曲面の非特異性と接平面)

問題. 次の関数で定義される曲面 S の点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ における接平面 H_{P_0} を求めよ. さらに S と H_{P_0} との交わりについて考察せよ.

一葉双曲面 → (1) $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$　$\left(H_{P_0}: \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - \frac{z_0}{c^2}z = 1\right)$

楕円面 → (2) $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$　$\left(H_{P_0}: \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z = 1\right)$

§2.3. 空間内での長さと面積

2.3.1 曲線の長さ, 弧長による曲線のパラメーター

2.3.2 曲面の面積　曲面 $S = \{P(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))\}$ の面積は

Area of S. →
$$A(S) = \iint_{(x,y)\in D} \sqrt{EG - F^2}(s,t)\, dsdt.$$

ここで $E = (P_s, P_s), F = (P_s, P_t), G = (P_t, P_t)$, ← ベクトルの内積!

$$\sqrt{EG - F^2}(s,t) = \left(\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(y,z)}{\partial(s,t)} \right|^2 + \left| \frac{\partial(z,x)}{\partial(s,t)} \right|^2 \right)^{1/2}.$$

→ 例えば
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$
↑ Jacobi 行列

グラフ型 $S = \{z = f(x,y);\ (x,y) \in D\}$ のとき

$$A(S) = \iint_{(x,y)\in D} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy.$$

§2.4. 曲面上の積分

2.4.1 面積分　S 上の連続関数 f の積分は

$$\int_D f dS = \iint_{(x,y)\in D} f(s,t)\sqrt{EG - F^2}(s,t)\, dsdt.$$

$dS = \sqrt{EG - F^2}(s,t) dsdt$ を面積要素または面素とよぶ.

定理 2.4.2 (曲面上の曲線の長さ)

問題. 次の曲面の面積を求めよ.

(1) 平面 $6x + 3y + 2z = 12$ の第 1 象限の部分 (14)

(2) 関数 $z = \sqrt{2xy}, (x,y) \in D = [0,3] \times [0,6]$ 上のグラフ (36)

(3) 錐面 $z^2 = x^2 + y^2$ の $z = 0$ と $z = \sqrt{2}(x/2 + 1)$ の間の部分 (8π)

(4) 錐面 $z^2 = x^2 + y^2$ の円柱 $y^2 + z^2 = a^2$ の内部における部分 $(2\pi a^2)$

2 章の問題と解説

§2.1 平面曲線

問題. 曲線$C=\{y=e^{2x}\}$と点$P=(0,1)$において交わる放物線$C'=\{y=ax^2+bx+c\}$のうち,最大の接触をするものを求めよ.

(解) $f(x)=e^{2x}$, $g(x)=ax^2+bx+c$とおく.このとき

$$f^{(n)}(x)=2^n e^{2x},$$
$$g'(x)=2ax+b\ ,g''(x)=2a\ ,g^{(n)}(x)\equiv 0\ (n\geq 3)$$

であるから

$$f(0)=g(0)\Leftrightarrow 1=c,$$
$$f'(0)=g'(0)\Leftrightarrow 2=b,$$
$$f''(0)=g''(0)\Leftrightarrow 4=2a,$$
$$f^{(n)}(0)=2^n\neq 0=g^{(n)}(0)\ (n\geq 3).$$

よって,最大の接触次数は 2 で,そのとき$a=2,b=2,c=1$.

問題. (1) 曲線$C=\{(x(t),y(t));t\in\mathbb{R}\}$の曲率は,その特異点以外の点では

$$r^{-1}=\frac{|x'y''-y'x''|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}}$$

となることを示せ.

(2) 曲線$C=\{F(x,y)=0\}$の曲率は,その特異点以外の点では

$$r^{-1}=\frac{\left|F_{yy}{F_x}^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{xx}{F_y}^2\right|}{\left({F_x}^2+{F_y}^2\right)^{3/2}}$$

となることを示せ.

(解)

(1) $u=x(t)$, $v=y(t)$とする.逆関数定理より,Cの特異点以外の点の周りで$u=x(t)$の逆関数$t=x^{-1}(u)$が存在する.このとき$v=y\left(x^{-1}(u)\right)$であるから,$f=y\circ x^{-1}$と見なすと$v=f(u)$と書け,命題 2.1.4 を適用することができる.ここで

$$f'(u)=\frac{dv}{du}=\frac{dy(t)}{du}=\frac{dy(t)}{dt}\frac{1}{\frac{du}{dt}}=\frac{y'(t)}{x'(t)},$$

$$f''(u)=\frac{d}{du}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\frac{1}{\frac{du}{dt}}=\frac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{x'(t)^2}\frac{1}{x'(t)}$$
$$=\frac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{x'(t)^3}$$

$$\therefore r^{-1} = \frac{|f''(u)|}{(1+f'(u)^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+(y'/x')^2)^{3/2}}\left|\frac{x'y''-y'x''}{x'^3}\right| = \frac{|x'y''-y'x''|}{\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}}.$$

(2) 陰関数定理より,Fの特異点以外の点の周りで$y=\varphi(x)$と書くことができ,命題2.1.4を適用することができる.ここで

$$\varphi'(x) = -\frac{F_x}{F_y},$$

$$\varphi''(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right) = -\frac{\left(F_{xx}+F_{xy}\varphi'\right)F_y - F_x\left(F_{yx}+F_{yy}\varphi'\right)}{{F_y}^2} = -\frac{F_{yy}{F_x}^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{xx}{F_y}^2}{{F_y}^3}$$

$$\therefore r^{-1} = \frac{|\varphi''(x)|}{(1+\varphi'(x)^2)^{3/2}} = \frac{1}{\left(1+\left(-F_x/F_y\right)^2\right)^{3/2}}\left|-\frac{F_{yy}{F_x}^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{xx}{F_y}^2}{{F_y}^3}\right|$$

$$= \frac{\left|F_{yy}{F_x}^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{xx}{F_y}^2\right|}{\left({F_x}^2+{F_y}^2\right)^{3/2}}.$$

★計算の途中で,逆関数の微分法や chain rule を使っています.

問題. 次の曲線の与えられた点における曲率と曲率円を求めよ.

(1) $xy=1$, 点$(1,1)$.

(2) $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, 点$(a,0)$.

(3) $y=\log x$, 点$(1,0)$.

(解) 円$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$において,方程式の両辺をxで微分すると,

$$2(x-x_0)+2(y-y_0)y' = 0$$

$$\therefore (x-x_0)+(y-y_0)y' = 0. \tag{2.1}$$

もう一度微分すると,

$$1+y'^2+(y-y_0)y'' = 0. \tag{2.2}$$

この円が,点(a,b)において曲線$y=f(x)$と 2 次の接触をするとすると,$b=f(a)$, $y'(a)=f'(a), y''(a)=f''(a)$が成り立つから(2.1),(2.2)式より

$$(a-x_0)^2+(f(a)-y_0)^2=r^2, \tag{2.3}$$

$$(a-x_0)+(f(a)-y_0)f'(a)=0, \tag{2.4}$$

$$1+f'(a)^2+(f(a)-y_0)f''(a)=0. \tag{2.5}$$

(2.5)式より

$$y_0 = f(a)+\frac{1+f'(a)^2}{f''(a)}.$$

(2.4)式より

$$x_0 = a + (f(a) - y_0)f'(a) = a - \frac{(1+f'(a)^2)f'(a)}{f''(a)}.$$

(2.3)式より

$$r^2 = (a - x_0)^2 + (f(a) - y_0)^2 = \left(\frac{(1+f'(a)^2)f'(a)}{f''(a)}\right)^2 + \left(-\frac{1+f'(a)^2}{f''(a)}\right)^2 = \frac{(1+f'(a)^2)^3}{f''(a)^2}$$

$$\therefore r = \frac{(1+f'(a)^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(a)|}.$$

(1) $xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}$であり,$f(x) = \frac{1}{x}$とおくと

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

このとき,

$$x_0 = 1 - \frac{(1+f'(1)^2)f'(1)}{f''(1)} = 2,$$

$$y_0 = f(1) + \frac{1+f'(1)^2}{f''(1)} = 2,$$

$$r = \frac{(1+f'(1)^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(1)|} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \text{曲率} r^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{曲率円} (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2.$$

(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$において,点$(a,0)$を含む分枝は$x = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$であり,$f(y) = a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$とおくと

$$f'(y) = -\frac{a}{b^2}y\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, f''(y) = -\frac{a}{b^2}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

このとき,

$$x_0 = f(0) + \frac{1+f'(0)^2}{f''(0)} = \frac{a^2 - b^2}{a},$$

$$y_0 = 0 - \frac{(1+f'(0)^2)f'(0)}{f''(0)} = 0,$$

$$r = \frac{(1+f'(0)^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(0)|} = \frac{b^2}{|a|}$$

$$\therefore \text{曲率} r^{-1} = \frac{|a|}{b^2}, \text{曲率円} \left(x - \frac{a^2-b^2}{a}\right)^2 + y^2 = \frac{b^4}{a^2}.$$

★点$(a,0)$において$\frac{dy}{dx}$が存在しないので,xとyを入れ換えて議論しています.

(3) $f(x)=\log x$とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{x},f''(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

このとき,

$$x_0 = 1-\frac{(1+f'(1)^2)f'(1)}{f''(1)}=3,$$

$$y_0 = f(1)+\frac{1+f'(1)^2}{f''(1)}=-2,$$

$$r=\frac{(1+f'(1)^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(1)|}=2\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{曲率}r^{-1}=\frac{1}{2\sqrt{2}},\text{曲率円}(x-3)^2+(y+2)^2=8.$$

★曲率,曲率半径,曲率円を求める場合には,本問の最初で実行したように自分で「公式」を導出しましょう.
記憶違いをしてミスをするのが一番悔しいですから(^^;

問題. 次の曲線の曲率の極値をとる点を求めよ.
(1) $y=\log x$
(2) $C=\{(3\cos t+\cos 3t,3\sin t+\sin 3t);t\in\mathbb{R}\}$

(解)
(1) $f(x)=\log x\ (x>0)$とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{x},f''(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

このとき,

$$r^{-1}=\frac{|f''(x)|}{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dr^{-1}}{dx}=\frac{1-2x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \frac{dr^{-1}}{dx}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow (x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\log 2\right).$$

更に,$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$の前後でr^{-1}の符号が負から正に変わることも確かめられるから,曲率が極値をとるのは点$\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\log 2\right)$.

(2) $x(t) = 3\cos t + \cos 3t$, $y(t) = 3\sin t + \sin 3t$とおくと

$$x'(t) = -3\sin t - 3\sin 3t \quad , \quad x''(t) = -3\cos t - 9\cos 3t,$$
$$y'(t) = 3\cos t + 3\cos 3t \quad , \quad y''(t) = -3\sin t - 9\sin 3t.$$

このとき,

$$r^{-1} = \frac{|x'y'' - y'x''|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{1+\cos 2t}}$$

$$\frac{dr^{-1}}{dt} = \frac{\sqrt{2}\sin 2t}{3(1+\cos 2t)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\therefore \frac{dr^{-1}}{dt} = 0 \Leftrightarrow t = n\pi \ (n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (x, y) = (\pm 4, 0).$$

更に,$t = n\pi$の前後でr^{-1}の符号が負から正に変わることも確かめられるから,曲率が極値をとるのは点$(\pm 4, 0)$.

§2.2 空間内の曲線と曲面

問題. 次の関数で定義される曲面Sの点$P_0 = (x_0, y_0, z_0)$における接平面H_{P_0}を求めよ.さらにSとH_{P_0}との交わりについて考察せよ.

(1) $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$

(2) $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$

(解)

(1) $F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$とおくと

$$F_x = \frac{2}{a^2}x \, , F_y = \frac{2}{b^2}y \, , F_z = -\frac{2}{c^2}z.$$

よってS上で$F_x, F_y, F_z \neq 0$.従ってH_{P_0}は

$$\frac{2}{a^2}x_0(x - x_0) + \frac{2}{b^2}y_0(y - y_0) - \frac{2}{c^2}z_0(z - z_0) = 0$$

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - \frac{z_0}{c^2}z - \left(\frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} - \frac{{z_0}^2}{c^2}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y - \frac{z_0}{c^2}z = 1.$$

なお,Sは一葉双曲面である.

(2) $F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$とおくと

$$F_x = \frac{2}{a^2}x\,, F_y = \frac{2}{b^2}y\,, F_z = \frac{2}{c^2}z.$$

よってS上で$F_x, F_y, F_z \neq 0$.従ってH_{P_0}は

$$\frac{2}{a^2}x_0(x-x_0) + \frac{2}{b^2}y_0(y-y_0) + \frac{2}{c^2}z_0(z-z_0) = 0$$

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z - \left(\frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{b^2} + \frac{{z_0}^2}{c^2}\right) = 0$$

$$\therefore \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z = 1.$$

なお,Sは楕円面である.

§2.3 空間内での長さと面積

§2.4 曲面上の積分

問題. 次の曲面の面積を求めよ.

(1) 平面$6x+3y+2z=12$の第1象限の部分

(2) 関数$z=\sqrt{2xy}, (x,y) \in D = [0,3]\times[0,6]$上のグラフ

(3) 錐面$z^2 = x^2+y^2$の$z=0$と$z=\sqrt{2}(x/2+1)$の間の部分

(4) 錐面$z^2=x^2+y^2$の円柱$y^2+z^2=a^2$の内部における部分

(解)

(1) 平面$6x+3y+2z=12$の第1象限の部分は

$$z = f(x,y) = -3x - \frac{3}{2}y + 6 = 0 \text{ かつ} (x,y) \in D = \{0<x<2, 0<y<-2x+4\}$$

と書ける.このとき

$$f_x = -3\,, f_y = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore A(S) = \iint_{(x,y)\in D} \sqrt{1+{f_x}^2+{f_y}^2}\,dxdy = \int_0^2 \int_0^{-2x+4} \sqrt{1+9+\frac{9}{4}}\,dy\,dx = \frac{7}{2}\int_0^2 (-2x+4)dx$$

$$= 14.$$

(2) $f(x,y) = \sqrt{2xy}$とおくと

$$f_x = \sqrt{\frac{y}{2x}}\,, f_y = \sqrt{\frac{x}{2y}}$$

$$\therefore A(S) = \iint_{(x,y)\in D} \sqrt{1 + {f_x}^2 + {f_y}^2}dxdy = \int_0^3 \int_0^6 \sqrt{1 + \frac{y}{2x} + \frac{x}{2y}}dy\,dx$$

$$= \int_0^3 \int_0^6 \left(\sqrt{\frac{y}{2x}} + \sqrt{\frac{x}{2y}} \right) dy\,dx = 2\sqrt{3}\int_0^3 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) dx = 36.$$

(3) 錐面$z^2 = x^2 + y^2$は,

$$x = t\cos\theta\ , y = t\sin\theta\ , z = t$$

と媒介変数表示される.このとき

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\theta)}\right| = t\ , \left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,\theta)}\right| = -t\cos\theta\ , \left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,\theta)}\right| = -t\sin\theta$$

が成り立ち,更に題意の部分は

$$(t,\theta) \in D = \left\{0 \le \theta < 2\pi, 0 \le t \le \sqrt{2}\left(\frac{t\cos\theta}{2} + 1\right)\right\} = \left\{0 \le \theta < 2\pi, 0 \le t \le \frac{2}{\sqrt{2} - \cos\theta}\right\}$$

と書けるから

$$A(S) = \iint_{(t,\theta)\in D} \sqrt{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\theta)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,\theta)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,\theta)}\right|^2}\,dtd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{2}-\cos\theta}} \sqrt{t^2 + t^2\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta}\,dt\,d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{2}-\cos\theta}} tdt\,d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(\sqrt{2} - \cos\theta\right)^2} = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\left(\sqrt{2} - \cos\theta\right)^2}$$

$$= 4\sqrt{2}\left[2\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\left(1 + \sqrt{2}\right)\tan\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\sin\theta}{\sqrt{2} - \cos\theta}\right]_0^{\pi} = 8\pi.$$

(4) 錐面$z^2 = x^2 + y^2$は,

$$x = t\cos\theta\ , y = t\sin\theta\ , z = t$$

と媒介変数表示される.このとき

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\theta)}\right| = t\ , \left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,\theta)}\right| = -t\cos\theta\ , \left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,\theta)}\right| = -t\sin\theta$$

が成り立ち,更に題意の部分は

$$(t,\theta) \in D = \{0 \le \theta < 2\pi, t^2(1 + \sin^2\theta) < a^2\}$$

$$= \left\{0 \le \theta < 2\pi, -\frac{|a|}{\sqrt{1 + \sin^2\theta}} < t < \frac{|a|}{\sqrt{1 + \sin^2\theta}}\right\}$$

と書けるから

$$A(S) = \iint_{(t,\theta)\in D} \sqrt{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,\theta)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,\theta)}\right|^2 + \left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,\theta)}\right|^2}\, dtd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{|a|}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}}^{\frac{|a|}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}} \sqrt{t^2 + t^2\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta}\, dt\, d\theta = 8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{|a|}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}} tdt\, d\theta$$

$$= 4\sqrt{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta} = 8\sqrt{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{3-\cos 2\theta}$$

$$= 8\sqrt{2}a^2 \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\tan\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\,\pi a^2.$$

数理科学 I　3 章 線積分, 面積分（ベクトル解析）のまとめと問題

§3.1. 線積分

例 3.1.3 (2) $C_a = \{x^2+y^2=a^2\}$: 円周, 向きは反時計回り.

$x = a\cos\theta, y = a\sin\theta, 0 \le \theta \le 2\pi$ として, $\oint_{C_a} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$. ($a$ によらない)

§3.2. グリーンの定理

Greenの定理で
$f(x,y) = -\frac{1}{2}y$
$g(x,y) = \frac{1}{2}x$
とする.

定理 3.2.1. Green の定理. $D \subset \mathbb{R}^2, \partial D$: その境界. 適切な条件のもとで,

$\int_{\partial D} fdx + gdy = \iint_D (-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x})dxdy$.

系 3.2.2. $D \subset \mathbb{R}^2$ の面積の公式. → $A(D) = \iint_D dxdy = \frac{1}{2}\int_{\partial D}(-ydx+xdy)$

例 3.2.4 (2) $D \subset \mathbb{R}^2$: 原点 O を含む有界閉領域, ∂D: C^1 級単純閉曲線, $O \notin \partial D$ とする. このとき $\int_{\partial D} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} = 2\pi$.　(計算の方法も重要)

問題. 系 3.2.2 を用いて次の図形の面積を求めよ.

(1) 楕円 $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ の内部. (πab, 例 3.2.3)

(2) 双曲線 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ の 2 点 $M(a,0), P(x_0,y_0)$ 間の弧に対応する扇形 OMP. ($x = a\cosh t, y = b\sinh t$ とおく. $\frac{1}{2}ab\log(x_0/a + y_0/b)$)

(3) アステロイド $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ の内部で第一象限にある部分. ($\frac{3}{32}\pi a^2$)

問題. Green の定理を用いて, 次の線積分の値を求めよ. ただし, 積分路の向きは反時計回りとする.

(1) $\int_C (2x^3+y^3)dx - (x^3+y^3)dy$, C: 単位円周. ($-3\pi/2$)

(2) $\int_C e^y \sin x dx + e^y \cos x dy$, C: 長方形 $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 1$ の周. ($4(1-e)$)

§3.3. ベクトル場

3.3.1 **勾配 (gradient)**, 方向微分. $\mathrm{grad}\, f = \nabla f = (f_x, f_y, f_z)$. $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$: ナブラ.

3.3.2 **発散 (divergence)**. $\mathrm{div}\, \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} = \xi_x + \eta_y + \zeta_z$. $\boldsymbol{v} = (\xi, \eta, \zeta)$.

3.3.3 **回転 (rotation)**. $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = (\zeta_y - \eta_z, \xi_z - \zeta_x, \eta_x - \xi_y)$.

3.3.4 **Green の定理 (ベクトル場表示), 発散定理.**

$D \subset \mathbb{R}^2, \partial D$: その境界. 適切な条件のもとで, $\int_{\partial D} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} ds = \iint_D \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} dxdy$.

問題. 次のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ と閉曲線 C (及びその内部 D) について, Green の定理を検証せよ.

(1) $\boldsymbol{v} = (y^2+2x, x^2-y)$, C: 長方形 $a \le x \le b, c \le y \le d$ の周. → 積分値：$(b-a)(d-c)$

(2) $\boldsymbol{v} = (2x-y, 2y+x)$, C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (楕円). → 積分値：$4\pi ab$

§3.4. 様々な線積分, 面積分 (ストークスの定理*)

3.4.1 スカラー場の線積分: $\int_C f ds$.

3.4.2 ベクトル場の線積分: $\int_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\gamma} = \int_C \xi dx + \eta dy\ (+\zeta dz)$.

3.4.3 スカラー場の面積分: $\iint_S f dS = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))|P_u \times P_v| dudv$.

3.4.4 ベクトル場の面積分: $\iint_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_S \xi dydz + \eta dzdx + \zeta dxdy$.

※ 法線ベクトルの向きなどに注意！

定理 3.4.5 Stokesの定理. $S \subset \mathbb{R}^3$: 曲面, ∂S: その境界, $\boldsymbol{v}$: ベクトル場. 適切な条件のもとで, $\int_{\partial S} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\gamma} = \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$.

問題. 次のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ と曲線 (螺旋) C: $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, bt), 0 \le t \le \pi/4$, について, 線積分 $\int_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\gamma}$ の値を求めよ.

(1) $\boldsymbol{v} = (a \sin t, a \cos t, 0)$, a は正定数. $(a/2)$

(2) $\boldsymbol{v} = (2x, y, -2)$. $(-1/4 - b\pi/2)$

問題. 曲面 $S : z = 1 - x^2 - y^2 (z \ge 0)$ に対して, 次の面積分の値を求めよ.

(1) $\iint_S dS$. $((5\sqrt{5} - 1)\pi/6)$

(2) $\iint_S (x^2 - y^2) dS$. (0)

問題. 次の曲面 S に対して, ベクトル場 $\boldsymbol{v} = (x, y, 2)$ の面積分 $\iint_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}$ の値を求めよ.

(1) S: 平面 $2x + 2y + z = 2$ の第一象限にある部分で, 単位法ベクトル $\boldsymbol{n}$ は原点の反対側にとる. $(5/3)$

(2) S: 単位球面の上半分で, 単位法ベクトル $\boldsymbol{n}$ は上側にとる. $(10\pi/3)$

問題. 次のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ と曲面 S (及びその境界 ∂S) に対して, Stokesの定理を検証せよ.

(1) $\boldsymbol{v} = (x, y, z), S : z = 1 - x^2 - y^2 (z \ge 0)$.

(2) $\boldsymbol{v} = (x, y, 2z), S$: 平面 $x + y + z = 1$ の第一象限にある部分.

本当は「エスツェット」(こんなの → β)

§3.5. ガウスの発散定理

定理 3.5.1. Gaussの発散定理. $V \subset \mathbb{R}^3$, $S = \partial V$: その境界, $\boldsymbol{v}$: ベクトル場. 適切な条件のもとで, $\iint_S \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{v} dxdydz$.

例 3.5.3. 例 3.2.4 の 3 次元版.

問題. 次のベクトル場 $\boldsymbol{v}$ と領域 V について, Gaussの発散定理を検証せよ.

(1) $\boldsymbol{v} = (x, y, z^2), V : x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le 1$ (円柱). → 積分値: 3π

(2) $\boldsymbol{v} = (x^2, y^2, z^2), V : x^2 + y^2 + z^2 \le 1$. → 積分値: 0

問題. Gaussの発散定理を用いて, 次の面積分の値を求めよ.

(1) $\iint_S xyz dydz, S$: 立方体 $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$ の表面. $(1/4)$

(2) $\iint_S \sin x dydz + (1 - \cos x) y dzdx, S$: 単位球面. $(4\pi/3)$

試験情報：

1章: 陰関数定理とその応用, ラグランジュの未定乗数法.

(2章: 3章で使う曲線, 曲面に関する計算.)

3章: 線積分・面積分の計算, Green, Stokes, Gauss.

3 章の問題と解説

§3.1 線積分

§3.2 Green の定理

問題. 系 3.2.2 を用いて次の図形の面積を求めよ.

(1) 楕円$x^2/a^2+y^2/b^2=1$の内部.

(2) 双曲線$x^2/a^2-y^2/b^2=1$の 2 点$M(a,0), P(x_0,y_0)$の間の弧に対応する扇型OMP.

(3) アステロイド$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$の内部で第一象限にある部分.

(解)

(1) 題意の領域をDとする.楕円$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$は,$t\in[0,2\pi]$を用いて

$$x=a\cos t\,,y=b\sin t$$

と表示されるから,系 3.2.2 より

$$A(D)=\frac{1}{2}\int_{\partial D}(-ydx+xdy)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-y\frac{dx}{dt}+x\frac{dy}{dt}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(-b\sin t\cdot(-a\sin t)+a\cos t\cdot b\cos t)dt=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}abdt=\pi ab.$$

(2) 題意の領域をDとする.双曲線$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$の弧$MP$は,$t\in\left[0,\sinh^{-1}\frac{y_0}{b}\right]$を用いて

$$x=a\cosh t\,,y=b\sinh t$$

と表示されるから,系 3.2.2 より

$$A(D)=\frac{1}{2}\int_{\partial D}(-ydx+xdy)=\frac{1}{2}\int_0^{\sinh^{-1}\frac{y_0}{b}}\left(-y\frac{dx}{dt}+x\frac{dy}{dt}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\sinh^{-1}\frac{y_0}{b}}(-b\sinh t\cdot a\sinh t+a\cosh t\cdot b\cosh t)dt=\frac{1}{2}\int_0^{\sinh^{-1}\frac{y_0}{b}}abdt$$

$$=\frac{ab}{2}\sinh^{-1}\frac{y_0}{b}=\frac{ab}{2}\log\left(\frac{y_0}{b}+\sqrt{\left(\frac{y_0}{b}\right)^2+1}\right)=\frac{ab}{2}\log\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right).$$

(3) 題意の領域をDとする.アステロイド$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$の第一象限にある部分は,$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$を用いて

$$x=a\cos^3 t\,,y=a\sin^3 t$$

と表示されるから,系 3.2.2 より

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D}(-ydx + xdy) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(-a\sin^3 t\cdot(-3a\cos^2 t\sin t) + a\cos^3 t\cdot(3a\sin^2 t\cos t)\big)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3a^2\sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{3}{8}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt = \frac{3}{8}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt$$

$$= \frac{3}{32}\pi a^2.$$

問題. Green の定理を用いて，次の線積分の値を求めよ.ただし，積分路の向きは反時計回りとする.

(1) $\int_C (2x^3 + y^3)dx - (x^3 + y^3)dy$，$C$: 単位円周.

(2) $\int_C e^y\sin x\,dx + e^y\cos x\,dy$，$C$: 長方形$0 \le x \le \pi, 0 \le y \le 1$の周.

(解)

(1) Cを境界とする閉領域をDとすると,Green の定理より

$$(\text{与式}) = \int_C (2x^3 + y^3)dx - (x^3 + y^3)dy = \iint_D\big((-3y^2) + (-3x^2)\big)dxdy$$

$$= -3\iint_D (x^2 + y^2)dxdy.$$

極座標変換$(x, y) \longmapsto (r, \theta)$により

$$(\text{与式}) = -3\iint_D r^2\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|drd\theta = -3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3 dr\,d\theta = -3\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}d\theta = -\frac{3}{2}\pi.$$

(2) Cを境界とする閉領域をDとすると,Green の定理より

$$(\text{与式}) = \int_C e^y\sin x\,dx + e^y\cos x\,dy = \iint_D\big((-e^y\sin x) + (-e^y\sin x)\big)dxdy$$

$$= -2\int_0^1\int_0^{\pi} e^y\sin x\,dx\,dy = -2\int_0^1 2e^y\,dy = -4(e-1).$$

§3.3 ベクトル場

問題. 次のベクトル場$\boldsymbol{v}$と閉曲線C(及びその内部D)について, Green の定理を検証せよ.

(1) $\boldsymbol{v} = (y^2 + 2x, x^2 - y)$，$C$: 長方形$a \le x \le b, c \le y \le d$の周.

(2) $\boldsymbol{v} = (2x - y, 2y + x)$，$C$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (楕円).

(解)

(1)

$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}ds = \left(\int_{(a,c)\to(b,c)} + \int_{(b,c)\to(b,d)} + \int_{(b,d)\to(a,d)} + \int_{(a,d)\to(a,c)}\right)\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}ds$$

$$= \int_a^b (c^2+2x, x^2-c)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}dx + \int_c^d (y^2+2b, b^2-y)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}dy$$

$$+ \int_b^a (d^2+2x, x^2-d)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(-dx) + \int_d^c (y^2+2a, a^2-y)\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}(-dy)$$

$$= -\int_a^b (x^2-c)dx + \int_c^d (y^2+2b)dy + \int_a^b (x^2-d)dx - \int_c^d (y^2+2a)dy$$

$$= \int_a^b (c-d)dx + 2\int_c^d (b-a)dy = (b-a)(d-c).$$

また,$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 2+(-1) = 1$より

$$\iint_D \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dxdy = \int_c^d\int_a^b dx\,dy = \int_c^d (b-a)dy = (b-a)(d-c)$$

$$\therefore \int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}ds = \iint_D \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dxdy.$$

(2) 楕円$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$は,$t\in[0,2\pi]$を用いて

$$x = a\cos t\,, y = b\sin t$$

と表示される.このとき

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix}\dfrac{dy}{ds}\\-\dfrac{dx}{ds}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{dy}{dt}\\-\dfrac{dx}{dt}\end{pmatrix}\frac{dt}{ds} = \begin{pmatrix}b\cos t\\a\sin t\end{pmatrix}\frac{dt}{ds},$$

であるから

$$\int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}ds = \int_0^{2\pi} (2a\cos t - b\sin t\,, 2b\sin t + a\cos t)\begin{pmatrix}b\cos t\\a\sin t\end{pmatrix}dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (2ab + (a^2-b^2)\sin t\cos t)dt = 4\pi ab + \frac{a^2-b^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2t\,dt = 4\pi ab.$$

また,$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 2+2 = 4$より

$$\iint_D \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dxdy = 4\iint_D dxdy = 4\pi ab$$

$$\therefore \int_C \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}ds = \iint_D \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dxdy.$$

§3.4 様々な線積分，面積分(Stokes の定理)

問題． 次のベクトル場$\boldsymbol{v}$と曲線(螺旋) $C: \gamma(t) = (\cos t, \sin t, bt), 0 \leq t \leq \pi/4$について，線積分$\int_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\gamma}$の値を求めよ．

(1) $\boldsymbol{v} = (a \sin t, a \cos t, 0)$，$a$は正定数．

(2) $\boldsymbol{v} = (2x, y, -2)$.

(解) 曲線Cについて

$$d\boldsymbol{\gamma} = \gamma'(t)dt = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ b \end{pmatrix} dt.$$

(1)

$$\int_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\gamma} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (a \sin t, a \cos t, 0) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ b \end{pmatrix} dt = a \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 t - \sin^2 t) dt = a \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t \, dt = \frac{a}{2}.$$

(2)

$$\int_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\gamma} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos t, \sin t, -2) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ b \end{pmatrix} dt = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin t \cos t + 2b) dt$$

$$= -\frac{b}{2}\pi - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2t \, dt = -\frac{2\pi b + 1}{4}.$$

問題． 曲面$S: z = 1 - x^2 - y^2 (z \geq 0)$に対して，次の面積分の値を求めよ．

(1) $\iint_S dS$.

(2) $\iint_S (x^2 - y^2) dS$.

(解) $S = \{P(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1 - r^2) | (r, \theta) \in D = [0,1] \times [0,2\pi]\}$と書ける.このとき

$$P_r = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -2r \end{pmatrix}, P_\theta = \begin{pmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore |P_r \times P_\theta| = \left| \begin{pmatrix} 2r^2\cos\theta \\ 2r^2\sin\theta \\ r \end{pmatrix} \right| = r\sqrt{4r^2 + 1}.$$

(1)

$$\iint_S dS = \iint_D |P_r \times P_\theta| dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\sqrt{4r^2 + 1} dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{5\sqrt{5} - 1}{12} d\theta = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}\pi.$$

(2)

$$\iint_S (x^2 - y^2) dS = \iint_D (r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)|P_r \times P_\theta| dr d\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3\sqrt{4r^2 + 1} \cos 2\theta \, d\theta \, dr$$

$$= 0.$$

問題. 次の曲面Sに対して，ベクトル場 $\boldsymbol{v}=(x,y,2)$の面積分$\iint_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}$の値を求めよ.

(1) S: 平面$2x+2y+z=2$の第一象限にある部分で，単位法ベクトル$\boldsymbol{n}$は原点の反対側にとる.

(2) S: 単位球面の上半分で，単位法ベクトル$\boldsymbol{n}$は上側にとる.

(解)

(1) $S=\left\{P(u,v)=(u,v,2-2u-2v)\middle|(u,v)\in D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2|0<u<1,0<v<1-u\}\right\}$ と書けるから

$$P_u=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},P_v=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}\quad\therefore P_u\times P_v=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\iint_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_D (u,v,2)\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}dudv=\int_0^1\int_0^{1-u}(2u+2v+2)dv\,du=\int_0^1(3-2u-u^2)du=\frac{5}{3}.$$

(2) $S=\left\{P(\theta,\varphi)=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)\middle|(\theta,\varphi)\in D=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2\pi]\right\}$と書けるから

$$P_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi\\\cos\theta\sin\varphi\\-\sin\theta\end{pmatrix},P_\varphi=\begin{pmatrix}-\sin\theta\sin\varphi\\\sin\theta\cos\varphi\\0\end{pmatrix}\quad\therefore P_u\times P_v=\begin{pmatrix}\sin^2\theta\cos\varphi\\\sin^2\theta\sin\varphi\\\cos\theta\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\therefore\iint_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}=\iint_D(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,2)\begin{pmatrix}\sin^2\theta\cos\varphi\\\sin^2\theta\sin\varphi\\\cos\theta\sin\theta\end{pmatrix}d\theta d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta+2\cos\theta\sin\theta)d\theta\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta+2\cos\theta\sin\theta)d\theta\,d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta+\sin 2\theta)d\theta\,d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(\frac{2}{3}+1\right)d\varphi=\frac{10}{3}\pi.$$

★最後の計算で,公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\,d\theta=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!} & (n=\mathrm{odd})\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2} & (n=\mathrm{even})\end{cases}$$

を用いました.

問題. 次のベクトル場$\boldsymbol{v}$と曲面S(及びその境界∂S)に対して, Stokes の定理を検証せよ.

(1) $\boldsymbol{v}=(x,y,z)$, S: $z=1-x^2-y^2(z\geq 0)$.

(2) $\boldsymbol{v}=(x,y,2z)$, S: 平面$x+y+z=1$の第一象限にある部分.

(解)

(1) $\partial S = \{\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0) | t \in [0,2\pi]\}$と書けるから

$$d\boldsymbol{\gamma} = \gamma'(t)dt = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$\therefore \int_{\partial S} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\gamma} = \int_0^{2\pi} (\cos t, \sin t, 0) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0.$$

一方,$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$より

$$\iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

$$\therefore \int_{\partial S} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\gamma} = \iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

(2)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\gamma} &= \left(\int_{(1,0,0)\to(0,1,0)} + \int_{(0,1,0)\to(0,0,1)} + \int_{(0,0,1)\to(1,0,0)} \right) \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\gamma} \\
&= \int_0^1 (1-s, s, 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ds + \int_0^1 (0, 1-t, t) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 (u, 0, 1-u) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} du \\
&= \int_0^1 (2s-1)ds + \int_0^1 (2t-1)dt + \int_0^1 (2u-1)du = 0.
\end{aligned}$$

一方,$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$より

$$\iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

$$\therefore \int_{\partial S} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{\gamma} = \iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S}.$$

§3.5 Gauß の発散定理

問題. 次のベクトル場$\boldsymbol{v}$と領域Vについて, Gauß の発散定理を検証せよ.

(1) $\boldsymbol{v} = (x, y, z^2)$, V: $x^2 + y^2 \le 1, 0 \le z \le 1$ (円柱).

(2) $\boldsymbol{v} = (x^2, y^2, z^2)$, V: $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

(解)

(1) 円柱Vの底面S_1, S_2及び側面S_3は

$$S_1 = \{P(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0) | (r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]\},$$

$$S_2 = \{P(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1) | (r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]\},$$

$$S_3 = \{P(t,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, t) | (t,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi]\}$$

と書くことができ,このとき$\partial V = S_1 + S_2 + S_3$が成り立つ.ここで$S_1$について

$$P_r=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix},P_\theta=\begin{pmatrix}-r\sin\theta\\ r\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}\quad\therefore P_r\times P_\theta=\begin{pmatrix}0\\0\\r\end{pmatrix}\quad\therefore d\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0\\0\\-r\end{pmatrix}drd\theta.$$

同様に,S_2について

$$d\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}0\\0\\r\end{pmatrix}drd\theta.$$

また,S_3について

$$P_t=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},P_\theta=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\\ 0\end{pmatrix}\quad\therefore P_t\times P_\theta=\begin{pmatrix}-\cos\theta\\ -\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}\quad\therefore d\boldsymbol{S}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}dtd\theta$$

であるから

$$\begin{aligned}\iint_{\partial V}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}&=\left(\iint_{S_1}+\iint_{S_2}+\iint_{S_3}\right)\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}\\
&=\int_0^{2\pi}\int_0^1(r\cos\theta,r\sin\theta,0)\begin{pmatrix}0\\0\\-r\end{pmatrix}dr\,d\theta\\
&+\int_0^{2\pi}\int_0^1(r\cos\theta,r\sin\theta,1)\begin{pmatrix}0\\0\\r\end{pmatrix}dr\,d\theta\\
&+\int_0^{2\pi}\int_0^1(\cos\theta,\sin\theta,t^2)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}dt\,d\theta=0+\pi+2\pi=3\pi.\end{aligned}$$

一方,$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=1+1+2z=2z+2$であるから

$$\iiint_V\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dxdydz=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\int_0^1(2z+2)dz\right)dxdy=3\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy=3\pi$$

$$\therefore\iint_{\partial V}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}=\iiint_V\operatorname{div}\boldsymbol{v}\,dxdydz.$$

(2) $\partial V=\{P(\theta,\varphi)=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)|(\theta,\varphi)\in D=[0,\pi]\times[0,2\pi]\}$と書けるから

$$P_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi\\ \cos\theta\sin\varphi\\ -\sin\theta\end{pmatrix},P_\varphi=\begin{pmatrix}-\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix}\quad\therefore d\boldsymbol{S}=P_u\times P_v drd\theta=\begin{pmatrix}\sin^2\theta\cos\varphi\\ \sin^2\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\sin\theta\end{pmatrix}drd\theta$$

従って

$$\begin{aligned}\iint_{\partial V}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\sin^2\theta\cos^2\varphi,\sin^2\theta\sin^2\varphi,\cos^2\theta)\begin{pmatrix}\sin^2\theta\cos\varphi\\ \sin^2\theta\sin\varphi\\ \cos\theta\sin\theta\end{pmatrix}d\theta\,d\varphi\\
&=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}(\sin^4\theta\cos^3\varphi+\sin^4\theta\sin^3\varphi+\cos^3\theta\sin\theta)d\varphi\,d\theta\\
&=2\pi\int_0^{\pi}\cos^3\theta\sin\theta\,d\theta=0.\end{aligned}$$

一方,$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=2x+2y+2z$であるから,積分領域の対称性を考えて

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dxdydz = 2\iiint_V (x+y+z)dxdydz$$

$$= 2\left(\iiint_V xdxdydz + \iiint_V ydxdydz + \iiint_V zdxdydz\right) = 0+0+0 = 0.$$

$$\therefore \iint_{\partial V} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dxdydz.$$

問題. Gauß の発散定理を用いて,次の面積分の値を求めよ.

(1) $\iint_S xyzdydz$, S: 立方体$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$の表面.

(2) $\iint_S \sin x\, dydz + (1-\cos x)ydzdx$, S: 単位球面.

(解)

(1) Sの内部をVとし,ベクトル場$\boldsymbol{v} = (xyz, 0{,}0)$に対して Gauß の発散定理を適用する.ここで$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = yz$であるから

$$\iint_S xyzdydz = \iint_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dxdydz = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 yzdx\, dy\, dz = \int_0^1\int_0^1 yzdy\, dz$$

$$= \int_0^1 \frac{z}{2}dz = \frac{1}{4}.$$

(2) Sの内部をVとし,ベクトル場$\boldsymbol{v} = (\sin x, (1-\cos x)y, 0)$に対してGaußの発散定理を適用する.ここで$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \cos x + (1-\cos x) = 1$であるから

$$\iint_S \sin x\, dydz + (1-\cos x)ydzdx = \iint_S \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dxdydz = \iiint_V dxdydz = \frac{4}{3}\pi.$$