

記号論理学 2023 年度過去問

2024 年 8 月 18 日

記憶を頼りに再現したものです。^{*1}

1 問題

問 1 以下を示せ。

- (1) $\varphi \rightarrow \psi \vdash_{NJ} \varphi \rightarrow (\psi \vee \chi)$
- (2) $\varphi \rightarrow \psi, \neg\chi \rightarrow \neg\psi \vdash_{NJ} \neg\chi \rightarrow \neg\varphi$
- (3) $(\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \vdash_{NJ} \varphi \wedge (\psi \vee \chi)$
- (4) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi \vdash_{NJ} \neg\chi \rightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)^{*2}$

問 2 正しいか判定せよ。

- (1) $p \rightarrow \neg p \models p$
- (2) $\neg p \rightarrow p \models \neg p$
- (3) $p \rightarrow \neg q \models \neg(p \wedge q)$
- (4) $p, p \rightarrow q \models r \rightarrow q$
- (5) $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow r) \models q \vee r$
- (6) $(p \vee q) \rightarrow r \models (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

問 3 以下を示せ。

- (1) $\forall x P_x, \forall x (P_x \rightarrow Q_x) \vdash_{NK} \forall x Q_x$
- (2) $\exists x P_x, \forall x (P_x \rightarrow Q_x) \vdash_{NK} \exists x Q_x$
- (3) $\forall x (P_x \wedge Q_x) \vdash_{NK} \neg \exists x \neg (P_x \vee Q_x)$
- (4) $\vdash_{NK} \forall x (((P_x \rightarrow Q_x) \rightarrow P_x) \rightarrow P_x)$

問 4 $L = \langle \{c_0, c_1\}, \{P\}, \{f_0, f_1\} \rangle$ と L -構造 $M = \langle \mathcal{P}(A), \{\emptyset, A\}, \{\subseteq\}, \{\cap, \cup\} \rangle$ ただし $A = \{0, 1, 2\}$ > を用いた問題でした

問 5 すべての項 $s \in L$ について、 $x \in FV(s[t/x])$ ならば $x \in FV(t)$ となることを示せ。

問 6 以下を示せ。

- (1) もし $\Gamma_0 \models \varphi$ かつ $\Gamma_1 \cup \{\varphi\} \models \psi$ ならば、 $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \models \psi$
- (2) もし $\Gamma_0 \vdash_{NK} \varphi$ かつ $\Gamma_1 \cup \{\varphi\} \vdash_{NK} \psi$ ならば、 $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \vdash_{NK} \psi$

^{*1} 作成は \LaTeX の proof パッケージを使いました。

^{*2} NJ だと示せなさそうなので右辺は $\neg\chi \rightarrow \neg\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ ばいです。

2 ヒントのようななにか

- 問 1 NJ なので否定 2 回で元にもどることを使いさえしなければいい。 $\varphi \vdash \psi \rightarrow \chi \iff \varphi, \psi \vdash \chi$ や $\varphi \vdash \neg\psi \iff \varphi, \psi \vdash \perp$ などのように変形すると見通しが立ちやすい。
- 問 2 頑張って附置表を書く。(4) までは 2 行で済むからまだいいが、(5)(6) はだいぶ面倒くさい。
- 問 3 述語論理の推論規則を用いてがんばる。
- 問 4 略
- 問 5 問題文を翻訳すると、「ある言語 L のすべての文章について x が束縛 (\forall や \exists にからんでる) されていないなら、 x は言語の中でも束縛されていない」となる…… どちらにせよわかりにくいけど、まあ対偶をとると置換と FV の定義あたりから自動的に示せそうである。
- 問 6 健全性と完全性あるんだし両方附置表とかでよくない？ダメ？