微分積分学 ② 期末試験問題

担当教員: 大場 清
2024 年 2 月 1 日 4 限 (15:20-16:50)
解答用紙: 1 冊 (A4 版両面 3 枚)，計算用紙: 1 枚

問題 1

$\mathbb{R}^2$ を定義域とした次の関数を考える.

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{2}x^2y^2 - 2x^2 + y^2$$

(1)

関数 $f(x,y)$ のすべての停留点を求め，そのそれぞれについて，極大点であるか，極小点であるか，鞍点であるか，あるいはそのどれでもないかを判定せよ.

(2)

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqq 3, |y| \leqq 3\}$ とするとき，制限関数 $f_{|D} : D \to \mathbb{R}$ の最大値，最小値を求めよ.

問題 2

(1)

有界閉区間 $[0,1]$ を定義域とする次の関数がリーマン積分可能かどうかを判定せよ.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \left(x = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots\right) \\ 1 & (\text{その他の } x) \end{cases}$$

(2)

$0 < s < 1, 0 < t < 1$ のとき，次の広義積分 $B(s,t)$ が収束することを示せ.

$$B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\, dx$$

(3)

次の重積分の値を求めよ.

$$\int\int_D \frac{x}{(y+1)^2}\, dxdy \text{ ただし } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqq 0, x^4 \leqq y \leqq 1\}$$

問題 3

(1)

次の級数が絶対収束するか，条件収束するか，発散するかを判定せよ．

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2+n)}{1+n^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{2n-1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{1+3^n}$

(2)

次のベキ級数の収束半径を求めよ．

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(2n)!}{(3n)!} x^{2n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) x^n$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}\right) x^n$ (ただし，$a>0, b>0$)