河澄殲滅

平成22年度入学　理科一類21組

まっしー　編

１－１　偏微分

偏微分何それおいしいのって人はさすがにいないと思いますが一応丁寧にやっときます。いらないって人は読み飛ばしていいよ。

やってることは非常に単純で、「一つの変数だけを残し他を定数とみなす→一変数関数とみなして微分する」だけです。具体例を挙げると

$f(x,y) = x^2 - xy + y^3$のとき、

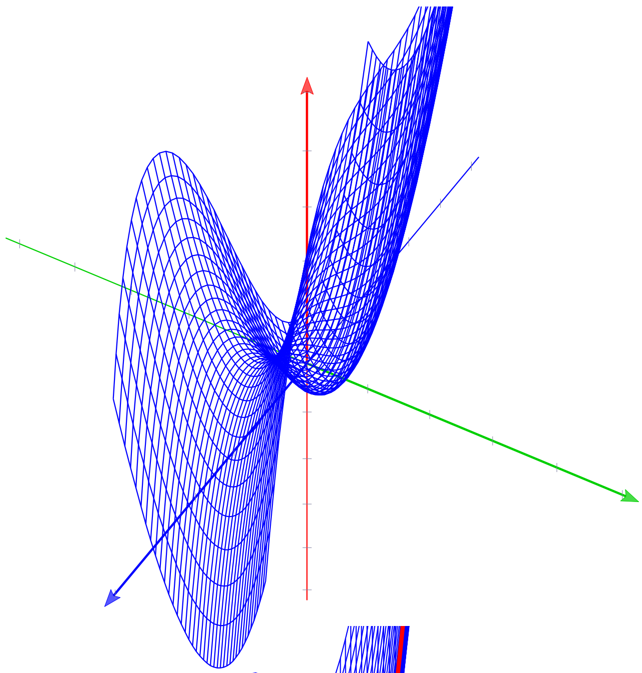
ｘに関する偏微分係数$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} = 2x - y$

ｙに関する偏微分係数$\frac{\partial f}{\partial y} = -\mathrm{x} + 3y^2$

になります。一番目の例ではｙを定数とみてｘだけについて微分、二番目の例ではｘを定数とみてｙだけについて微分しています。

かえってわかりにくいかもしれんが、せっかくなのでグラフを交えて・・・

$\mathrm{z} = x^2 - xy + y^3$のグラフは右のようになります。ぐちゃぐちゃなのは仕様。この関数をｙについて偏微分してみましょう。

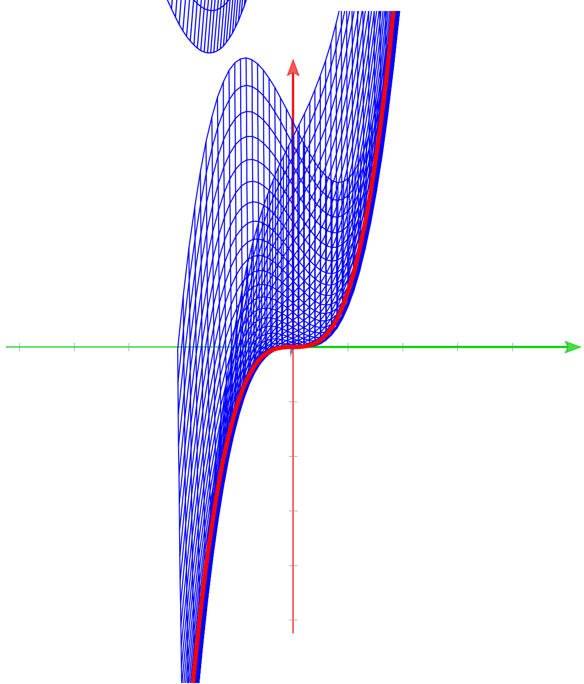


まずはｘを固定すればいいので、わかりやすくx=a(定数)とおいてみます。すると

$$\mathrm{z} = a^2 - ay + y^3$$

という式を得ます。これはつまり

「平面 x=a でさっきのグラフを切断した切り口の形は曲線$\mathrm{z} = a^2 - ay + y^3$になる」ということを表しています。右下の図を見ていただけるとわかると思いますが､真横から見る(x=0 で切断する)とこのグラフの形は$\mathrm{z} = y^3$ですね。



次にこの関数をｙについて微分します。すると、

$$\frac{dz}{dy} = -\mathrm{a} + 3y^2$$

を得ます。あとは固定してたａをｘに直して、

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\mathrm{x} + 3y^2$$

これがさっきの関数の、ｙに関する偏導関数です。

高校のとき「予選・決勝法」ってあったでしょ、一方の変数を固定して他を動かすってやつ。あれってよく考えたらただの偏微分ですね。

注意しておきたいのは、一変数関数と多変数関数の微分の記号が違うということです。一変数の微分は$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}$だけど多変数の微分(偏微分)は$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}$です、うっかり間違えると河澄さんのことだから減点されるかもしれないから気を付けて。偏微分の記号は他にもあって、$f_x(x,y)$、同様に$f_y(x,y)$ とか書いたりします。

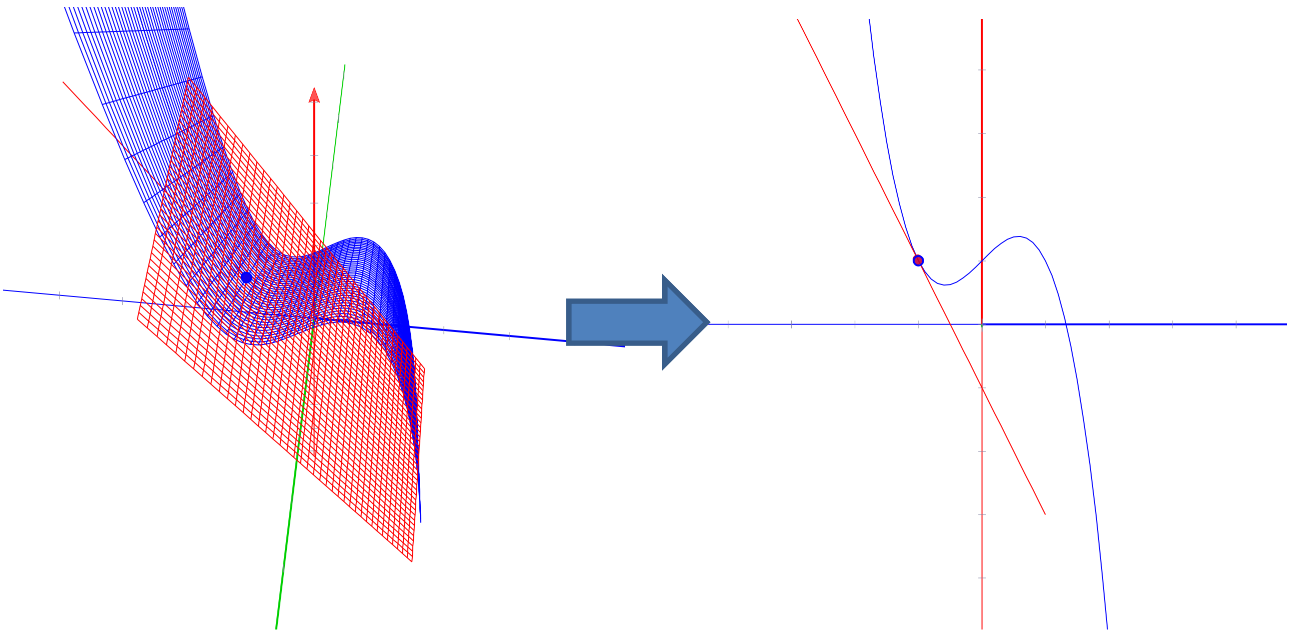
１－２　接平面

偏微分を使って、xyz 空間の関数$f(x,y)$の、点(a,b,f(a,b))における接平面を求めてみましょう。高校時代に接線を求めたのと同じ考え方を応用すればいい。いきなり３次元は考えにくいので、２次元に落として考えましょう。
まずは f を y=b で切断してみます。切り口の図形は曲線$f(x,b)$になります。ここで、曲線 f(x,b)上の点(a,b,f(a,b))における接線の方程式を考えてみると、$z-f(a,b) = f_x$(a,b)(x-a)となります。
同様に、f を x=a で切断した切り口について、曲線 f(a,y)上の点(a,b,f(a,b))における接線の方程式を考えてみると、$z-f(a,b) = f_y$(a,b)(y-b)となります。
これら二つの接線はどちらも f(x,y)に点(a,b,f(a,b))で接しているので、接平面の一部と考えることができます。つまり、接平面を y=b、x=a で切断した切り口の図形もそれぞれ、これらの直線になるわけです。**「f を、接平面ごと切断する」**と言い換えればイメージしやすいでしょうか(下の二つの図)。
いま、求める接平面の方程式を$z-f(a,b)$ =p(x-a)+q(y-b)とおきます。これを x=a,y=b で切断するとさっきの直線になるんだから、x=a,y=b を代入して係数を比較してやればいい。
p= f_x(a,b),q=f_y(a,b)となるので、次の公式が得られます。

f(x,y)の点(a,b,f(a,b))における接平面の方程式

$$\boldsymbol{z-f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)}$$

(曲面と接平面。これを y=b で両方まとめて切断すると、曲線と接線に帰着できる。)



１－３　Chain rule

Chain rule は、数学Ⅰ・B を学ぶ上で一番基本的で重要な公式みたいです。~~今は亡き~~河澄教諭も「あ、そうそう、Chain rule はね、必ず出します」とおっしゃっていたので。

関数f(x, y)の二変数 x,y が、t の関数としてそれぞれ x(t),y(t)と表せるとき、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}f(x(t),y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}*\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}*\frac{\partial y}{\partial t}$$

（左辺が$\frac{\mathrm{df}}{dt}$になっているのは、x,y が t の関数なので f も t の一変数関数になるから。）

もう一つ

関数f(x, y)の二変数 x,y が、u,v の関数としてそれぞれ x(u,v),y(u,v)と表せるとき、

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{u}}f(x(u,v),y(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial x}*\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}*\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{v}}f(x(u,v),y(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial x}*\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}*\frac{\partial y}{\partial v}$$

証明は複雑なので割愛します。授業ではこの式を行列表記して、変数変換のヤコビ行列の話題にまで触れていましたので、一応書いておきます。

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial u}\\ \frac{\partial f}{\partial v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

と変形できる。このとき右辺の２×２行列を、x→x(u,v)、y→(u,v)の変数変換のヤコビ行列といい、その逆行列は u→u(x,y)、v→v(x,y)の変数変換のヤコビ行列

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}$$

で与えられる。

一般に、$\frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}}$ですから(これは意外と重要？)、ヤコビ使えば速く逆関数が求まることもある。でも実際あんまり使わないから、ヤコビに関してはさらっと読んどけば大丈夫だと思う。とにかく、Chain rule を正しく使えるようにするのが一番重要なので、上の公式はきちんと覚えるようにしましょう。

１－４　その他：偏導関数の性質

以下の定理は重要。特に２番目の関係はとっても大事なので覚えておくようにしてください。２番目の順序交換については後でまた触れようと思います。

１、関数f(x,y)について、$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ならば、f(x,y)は定数関数である。

２、C^2級関数（そこらへんにいる関数）f(x,y)について、偏微分の順序交換

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

が成り立つ。アマゾンの奥地にいるような関数はこの限りではない。

３、$\frac{\partial f}{\partial x} = g(x,y), \frac{\partial f}{\partial y} = h(x,y)$をみたす関数 f(x,y)が存在するための必要条件(可積分条件)は

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)$$

３について補足。実は、x_0, y_0を定数として、

$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} g(t, y_0) ds + \int_{y_0}^{y} h(x_0, t) dt$になります。

証明→両辺を x で偏微分すると g(x,y)が、y で偏微分すると h(x,y)が残るから証明完了。

とりあえず偏微分の導入に関してはこれで終了です。問題演習についてですが、黄色い教科書の p,84-4、p,90-3,4,5,7 あたりをピックアップして何問かやれば大丈夫でしょう。

２－１　平均値の定理

河澄さんはやたらと平均値の定理が好きらしいのでちょっと丁寧にやっときます。まずは高校の復習から。

[a,b]で連続かつ微分可能な関数f(x)について、

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \mathrm{f}'(\mathrm{c})$$

となる実数 c：a<c<b が必ず存在する。

証明の前に準備として、次の「ロルの定理」を理解しておきましょう。

[a,b]で連続かつ微分可能な関数f(x)について、f(a)=f(b)ならば

$$\mathrm{f}'(\mathrm{c}) = 0$$

となる実数 c：a<c<b が必ず存在する。

ロルの定理に関しては自明としてしまいます。

まず、$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ とおきます。g(a)=f(a),g(b)=f(a)より g(a)=g(b)。

したがってロルの定理が使えて、g’(c)=0 となる c：a<c<b が存在する。

$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$だから、x=c として　$0=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$、よって

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \mathrm{f}'(\mathrm{c})$$

が成り立つ。

平均値の定理にはもう一つの表し方があって、b=a+h とおいて変形すれば

[a,b]で連続かつ微分可能な関数f(x)について、ある θ をうまくとると

$$\mathrm{f(a+h)} = \mathrm{f(a)} + \mathrm{hf}'(\mathrm{a}+\theta\mathrm{h})$$

とできる。

この表し方の方が後々有用なので、「平均値の定理」と言われたらこっちを真っ先に思い浮かべられるようにしてください。
数学Ｉ・Ｂである以上証明問題の比率は高くないとは思いますが、全く出さないわけではないでしょう。証明問題で狙われるのは多分ここらへんの分野だろうと踏んだので、今回は証明中心でいきます。ここに書いてある３つの証明には一通り目を通しておくようにしてください。

２－２　コーシーの平均値の定理

[a,b]で連続かつ微分可能な関数f(x)、g(x)について、

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる実数 c：a<c<b が必ず存在する。

＜証明＞

$\mathrm{h}(x)=\mathrm{f}(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$とおく。h(a)=f(a)、h(b)=f(a)より h(a)=h(b)。

したがってロルの定理が使えて、h'(c)=0 となる c：a<c<b が存在する。

$\mathrm{h'(x)=f'(x)}-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\mathrm{g'(x)}$、x=c を代入して　$0=\mathrm{f'(c)}-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\mathrm{g'(c)}$、よって

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

が成り立つ。

２－３　ロピタルの定理

[a,b]で連続かつ微分可能な関数f(x)、g(x)について、f(a)=g(a)=0 かつ g(x)=0 をみたす x が x=a のみのとき、

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\lim_{h\to0}\frac{f'(a+h)}{g'(a+h)}$$

＜証明＞

$f(a)=g(a)=0$ だから、$\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}$が成り立つ。

コーシーの平均値の定理より、$\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)}=\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}$ $(0\leq\theta\leq1)$となる θ が存在する。

よって$\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}$、両辺の極限をとって

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)}=\lim_{h\to0}\frac{f'(a+h)}{g'(a+h)}$$

注意：f(a)=g(a)=0 の仮定を必ず確かめること。例えば次の関数にはこの定理は使えない。

$$\lim_{x\to0}\frac{x+2}{x+1}\neq\lim_{x\to0}\frac{(x+2)'}{(x+1)'}$$

２－４　近似としての微分

微分の定義に立ち返ってみましょう。「関数 f(x)が x=a で微分可能」ということは、

「$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在する」

ということと同値でした。上の式を変形すると

$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)}{h} = 0$ と書けます。分子の関数を r(h)とおくと、この条件は

「$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}$＝0　となる関数 r(h)が存在する」

ということと同値だ、ということもわかるでしょう。
さて、r(h)とは一体どんな関数なのでしょうか。h を x-a に置き換えると、
$f(x)-f(a)-(x-a)f'(a)=0$　となります。右辺が 0 なのは、極限値が 0 なんだから、分母がどう変化しようと分子は絶対 0 に収束するからです。さて、この関数、どっかで見たことありませんか？—そうです、**接線の方程式**です。
接線は、元の曲線の x=a 付近を直線で近似したものなので、上の条件は、「関数 f(x)が x=a 付近で一次関数として近似できる(一次近似ができる)」という条件に書き換えることができます。結論としては、**一次近似ができるということが、関数が微分可能であるということ**なのです。
これを２変数関数に拡張してみましょう。さっきは接線の方程式と一次近似を関連付けてみましたが、二変数関数において接線の役割を果たすものとは何か、考えてみましょう。—**接平面**ですね。今までの議論を踏まえると、**「関数 f(x,y)が(a,b)付近で平面として近似できる」ことが、微分可能の条件**としてよさそうです。このときの微分を、x 方向、y 方向も含めすべての方向に対して微分可能という意味で**全微分**といいます。先ほどの接平面の方程式において、x-a を h,y-b を k におきかえ、 z を$f(\mathrm{a}+\mathrm{h},\mathrm{b}+\mathrm{k})$とすると
$f(\mathrm{a}+\mathrm{h},\mathrm{b}+\mathrm{k})-f(a,b)-\mathrm{h}f_x(a,b)-kf_y(a,b)=0$という感じになります。
以下まとめ。

$$\boldsymbol{r(h,k)=f(\mathrm{a}+\mathrm{h},\mathrm{b}+\mathrm{k})-f(a,b)-\mathrm{h}f_x(a,b)-kf_y(a,b)}$$

と表したとき、f_x(x,y)、f_y(x,y)が存在しどちらも連続ならば(つまり r(h,k)が存在するならば)、f は(a,b)で全微分可能。また、この時$\lim_{\mathrm{h,k}\to 0}\frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$ となる。

まあ、単純に全微分可能性を調べるだけなら、「f_x(x,y)、f_y(x,y)が存在しどちらも連続ならば全微分可能」だけでも十分。ただ、問題の背景としてこういう厳密な近似法が出てくる可能性があるため、知っといて損はないでしょう。
問題演習は、今回は丁度いい範囲がないので省略。

３－１　級数の収束

微分の話が一段落したところで、今度は級数について考えてみましょう。

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

が収束するか否かが問題になっているんですが、それを判定する方法として「ダランベールの判定法」っていう判定法があります。超便利です。

ダランベールの収束判定法：

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{\mathrm{k}}$$

が収束する条件は、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$$

となるｒが存在し、かつｒ＜１となることである。ｒ＝１のときは判定不能な場合がある。

たとえば、ｘを定数とし、$a_n = \frac{1}{n}x^n$のとき、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}|x| = |x|$$

となるので、ｘ＜１ならば収束し、ｘ≥１ならば発散する。

ちなみにｘ＝－１のときは、なんとこの級数は$\log 2$に収束しますｗ

証明：

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1-(-x)^n}{1+x}$$

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \frac{(-x)^n}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

両辺を０～１で積分すると

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} + \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}dx = \log 2$$

$$0 < \int_0^1 \frac{(-x)^n}{1+x}dx < \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{\mathrm{n}+1}$$

ｎ→∞とすればはさみうちの原理によりこの部分は０。よって

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = log2$$

３－２　整級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

を整級数といいます。さっきの議論を拡張して、こいつが収束するようなｘの範囲についてもう一度考えてみましょう。ダランベールの判定法を使うと

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{k+1}}{a_n x^k}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x}{a_n}\right| = r$$

となるので、ｒが１より小さくなるようなｘの範囲を求めればいい。この臨界値を**収束半径**といいます。これはとても重要。

整級数に関するダランベールの収束判定法：

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

が収束するようなｘの範囲は、

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{k+1}}{a_n x^k}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}x\right| = r$$

としたとき $r < 1$ となるようなｘの範囲である。この範囲の臨界値（ｒ＝１となるｘ）を**整級数の収束半径という。**

例えばさっきの$\sum\frac{1}{n}x^n$だったら収束半径は１です。
問題によっては収束半径が０とか∞になったりしますが、前者は「ｘが０じゃないと収束しない」、後者は「どんなにデカいｘでも収束する」という意味です。
整級数にはもう一つ重要な定理がありまして、

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

の収束半径をｒとする。このとき、整級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{k}a_k x^{k-1}$$

の収束半径もｒであり、

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{k}a_k x^{k-1}$$

が成り立つ。

整級数を微分しても収束半径は変わらないってわけです。積分しても同じことが言えます。整級数にはいろいろ使い道があって、例えば難しい微分方程式を解くときに、求める解を整級数でおいて考えるとうまくいく場合があります。

３－３　優級数と絶対収束

$|a_n| \leq b_n$かつb_nが収束するならば、a_nは収束する。このときb_nをa_nの優級数という。

あんまり使わないけど用語として覚えておいて。

無限級数が 絶対収束する とは、

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{\mathrm{k}}|$$

が収束することを言う。無限級数が絶対収束するならばその無限級数は収束する。

ぶっちゃけこれもほとんど使わないけど、一応定義だけは知っといたほうがいい。問題文に出る可能性も否めないからね。さっきの log2 の収束が、「収束はするけど絶対収束はしない」いい例です(絶対値つけると発散します。確かめてみて)。

ちょっと雑談。授業中に河澄さんが

1+2+3+4+・・・＝$-\frac{1}{12}$ とおっしゃっていました。~~ついに頭がイっちゃった~~板書ミスかと思いましたが、調べたところ、どうやら本当らしいです。

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

の両辺をrで微分すると

$$\sum_{n=0}^{\infty} nr^{n-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$$

ここで両辺にr= −1 を代入すると

$$1-2+3-4+\cdots = \frac{1}{4}$$

を得る。1+2+3+4+…= S とおくと

$$\begin{cases} 1-2+3-4+\cdots-(2n)+\cdots = \frac{1}{4} & \cdots(1) \\ \quad 4 \quad\ +8+\cdots\ +(4n)+\cdots = 4S & \cdots(2) \\ 1+2+3+4+\cdots+(2n)+\cdots = S & \cdots(3) \end{cases}$$

(1)+(2)=(3) であるので右辺どうしを比較して

$$\frac{1}{4}+4S=S \qquad S=-\frac{1}{12}$$

となる。まあ、本来

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

は$-1<r<1$の範囲でしか成り立たないので、r=−1 を代入するのは厳密には違うんですが。

問題演習は、P.157 あたりをやっときゃ OK。

４－１　テーラー展開

やっとここまで来ました。ある関数 f(x)の x=a 付近を、x の多項式で近似することを考えてみましょう。例えば sinx が、

$$\sin(x-a)=\sum_{k=0}^{\mathrm{n}} a_k\,(x-a)^k$$

という風に整級数で近似できたとします。(n 次近似で打ち切ってる)

$$\sin(x-a)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n$$

x=a を代入して$a_0=0$、両辺微分すると

$$\cos(x-a)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2\ldots+na_n(x-a)^{n-1}$$

x=a を代入して$a_1=1$、これを繰り返すと

$$\sin(x-a)=(x-a)-\frac{(x-a)^3}{6}+\frac{(x-a)^5}{120}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(x-a)^{2n+1}$$

が得られます。こんな風にして、微分・代入を繰り返して整級数の係数を決定していくことで、関数を整級数で近似できるってわけです。この操作を x=a の周りのテーラー展開といい、一般化すると

> 無限回微分可能な関数 f(x)の、x=a の周りにおける整級数近似は
>
> $$f(\mathrm{x}-\mathrm{a})=\sum_{k=0}^{\mathrm{n}}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$
>
> で表される。この操作を x=a の周りのテーラー展開という。

x=0 の周りにおけるテーラー展開は別名マクローリン展開といいます。上の式に a=0 を代入して

> 無限回微分可能な関数 f(x)の、x=0 の周りにおける整級数近似は
>
> $$f(\mathrm{x})=\sum_{k=0}^{\mathrm{n}}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$
>
> で表される。この操作をマクローリン展開という。

４－２　漸近展開

まずは「ランダウの記号」を確認しておきましょう。

関数f(x), g(x)に対して

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = 0$$

が成り立つとき，

$$\mathrm{f(x)} = \mathrm{o}\big(\mathrm{g(x)}\big) \qquad (x \to 0)$$

と表記する． o(.)は**ランダウ（Landau）の記号**であり，このとき，fはgに比べ**無視できるという。**

「g より f の方がずっと早く 0 に向かう」ってわけです。

先ほどのマクローリン展開において、たとえば x=0.1 とおいてみます。この時、x^5以下の項なんかすごく小さいので無視できる。こんな時、

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)$$

と書いたりします。これはどういう意味かというと、5 次以上の部分はx^5よりずっと早く 0 に向かってしまうので無視できる、という意味です。このように、ランダウの記号を持ち出す展開のことを漸近展開といいます。P.53 とか解くといいかも。

４－３　二変数のテーラー展開

二変数関数f(x,y)を、(a,b)付近で近似してみましょう。そのためには、f(a + h, b + k)を h と k の多項式で近似すればよさそうです。平均値や Chain もフル投入する、授業中にやった長ったらしい証明は割愛しますw

f(a + h, b + k)

$$= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!}\left\{\left(h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)^{l}\right\}$$

$$+ \frac{1}{n!}\left\{\left(h\frac{\partial f}{\partial x}(a+h,b+k) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b+k)\right)^{n}\right\}$$

ほんとは$0 < \theta < 1$なるθがなんたらかんたら。でもめんどいしどーでもいいや。うはは

なにやらゴツイ形をしてますが、実際使うのはｎ＝２までです。
n=2 まで展開して、行列でまとめると以下のようになります。

$$\mathrm{f(a+h,b+k)}$$
$$=\mathrm{f(a,b)}+\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{h}\\ k\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}h & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}_{(a,b)}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}_{(a,b)}$$

をヘッセ行列といい、極大・極小の判定の際とっても重要になる式です。
さて、やっと極値に入れます・・・。

４－４　極大・極小・鞍点

まず、二変数関数において、点(a,b,f(a,b))が極値をとるためには、最低限

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

を満たす必要があります。ｘ方向にもｙ方向にもぺったんこってことだから。
ただし、これだけでは極値とは言わず、**「停留点」**といいます。では、その停留点が極値であることを示すためにはどのようにすればよいのでしょうか。

先ほどテーラー展開した関数に、

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

を代入してみます。さらに f(a,b)を左辺に持ってくると、

$$\mathrm{f(a+h,b+k)-f(a,b)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}h & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{xx} & f_{xy}\\ f_{yx} & f_{yy}\end{pmatrix}_{(a,b)}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}$$

となります。右辺を計算すると

$$\frac{1}{2}(h^2 f_{xx}+2hkf_{xy}+k^2 f_{yy})$$

という、h,k の二変数関数になります。
左辺は f(a+h,b+k)が f(a,b)とどれだけ離れているかという差を表しています。ここで、もし**この差が常に０より大きいならば**、f(a+h,b+k)＞f(a,b)となり、(a,b,f(a,b))の周りの点はすべて(a,b,f(a,b))より大きいことになります。つまり(a,b,f(a,b))は極小値。

同じように、もし**この差が常に０より小さいならば、**f(a+h,b+k)＜f(a,b)となり、(a,b,f(a,b))の周りの点はすべて(a,b,f(a,b))より小さいことになります。つまり(a,b,f(a,b))は極大値。

つまり、

$$\frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}\right)\cdot\cdot\cdot①$$

の符号を調べればいいんです。そんで、よく眺めてみると、「これ二次関数っぽくね？」と思えてきませんか？ってか、思ってください。そしたら、だんだん二次関数の判別式を使いたくなってきませんか？きますよね？ね？え、二変数関数だから無理だって？大丈夫、どうせ数学ＩＢなんだから厳密さなんていらないから。こんなもん感覚でやれば大丈夫☆よっしゃあ、使いましょう。

①　式を二次方程式としてみると、判別式Ｄは

$$\left(f_{xy}\right)^2 - f_{xx}f_{yy} = -\det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

となります。もし　D＜０、つまり$\det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} > 0$ならば、①は実数解を持ちません。つまり①は、**常に①＞０　または　常に①＜０**　です。だからこの時 f(x,y)は極値を持ちます。①　の符号を決めるのは、h^2、k^2の係数f_{yy}、f_{xx}の符号です(上に凸か下に凸か)

また、D>０、つまり$\det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} < 0$のときは、①は常に同じ符号ではないので、極値を持つとは言えません。このように、停留点だが極値ではない点のことを**「鞍点」**といいます。

D＝０のときは極値であるかどうかの判定はできません。この場合はどうするのか、まだ河澄さんの回答待ちなのでいずれ更新します。
以下まとめ。あとはP.99の問題でもやりゃあいい。

$$\mathrm{D} = \det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}_{(a,b)}$$

とおく。Dの符号によって、点(a,b)は以下のように分類される。

①　D＞０のとき、極大(f_{xx}＜０)、極小(f_{yy}＞０)
②　D＝０のとき、地球オワタ
③　D＜０のとき、鞍点

５－１　逆関数

いよいよ最終章です。まあ高校時代の復習だからそんなに気張らなくてもいいでしょう。

関数 $y=f(x)$ がある。この関数においては，変数 x に対してただ 1 つの値 y が定まる。逆に y を決めると x がただ 1 つ定まる場合がある。この場合，x は y の関数となり，

$$x=g(y)$$

と表わすとする。

関数を表すとき，一般的に変数に x ， 変数 x に対応する 値に y を用いるので，

$$y=g(x)$$

と書き直す。この関数 $g(x)$ を関数 $f(x)$ の**逆関数**という。関数 $f(x)$ の**逆関数**を一般的に $f^{-1}(x)$ と表す。

すんませんコピペですｗｗｗ

逆関数には、$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}=\frac{1}{\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dy}}}$ という素晴らしい公式があります。これを使うと、sin とか tan の逆関数を整級数で表したり、不定積分で表したりすることができます。

① sin の逆関数 arcsin

y=sinx に対し　x=arcsiny。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}\mathrm{arcsiny}=\frac{1}{\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}}=\frac{1}{cosx}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

したがって

$$\mathbf{arcsiny}+\mathbf{C}=\int\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1}-\boldsymbol{y}^{\mathbf{2}}}}\boldsymbol{dy}$$

② tan の逆関数 arctan

y=tanx に対し x=arctany

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}\mathrm{arctany}=\frac{1}{\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}}=\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}=\frac{1}{1+\mathrm{y}^2}$$

したがって

$$\mathbf{arctany+C}=\int\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+y^2}}\mathbf{dy}$$

ここで、

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k y^{2k}=\frac{1}{1+\mathrm{y}^2}$$

より、

$$\mathbf{arctany+C}=\int\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k y^{2k}\,dy=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^k y^{2k+1}}{2k+1}$$

こんな感じです。今回の章に関しては問題演習はいらない方向で。代わりに、教科書に載ってた「主な整級数展開」のページを載せておきます。傾いててゴメンｗｗｗｗ

それでは試験頑張りましょう。

基本的な関数の整級数展開

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \quad (|x|<1)$$

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \quad (|x|<1)$$

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} \quad (|x|<1)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^n \quad (|x|<1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n \quad (|x|<1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} \quad (|x|<1)$$

$$\mathrm{Tan}^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \quad (|x|<1)$$

$$\mathrm{Sin}^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x|<1)$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \quad (x\in\boldsymbol{R})$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} \quad (x\in\boldsymbol{R})$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \quad (x\in\boldsymbol{R})$$

ここで

$$\binom{\alpha}{n}=\begin{cases}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} & (n\geqq 1)\\ 1 & (n=0)\end{cases}$$

$$n!!=\begin{cases}n(n-2)(n-4)\cdots 2 & (n:\text{偶数})\\ n(n-2)(n-4)\cdots 1 & (n:\text{奇数})\end{cases} \qquad 0!!=(-1)!!=1$$