河澄殲滅 Ⅱ

※成績には個人差があります。

1,積分値の存在

今までは「ハイ積分して〜」で終わりだったけど、「ちょっと待ってよ、それ本当に積分値存在するの？」ということを考えてみましょう。

区分求積法っぽいことをします。ある関数 f(x)に対して、区間[a,b]をたくさんの小区間で分割することを考えます。分割の方法はいろいろありますが、この分割の仕方をΔと表記することにします。このとき、n 個の区間に分割できたとして、それぞれの小区間を$[x_{i-1},x_i]$(i=1,2,…n)とすると、面積は

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\delta x_i \quad (\delta x_i := x_i - x_{i-1})$$

という式で近似できます。ここで、次の２つの数を定義します。

$$s_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \delta x_i, \quad S_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \delta x_i$$

ただし

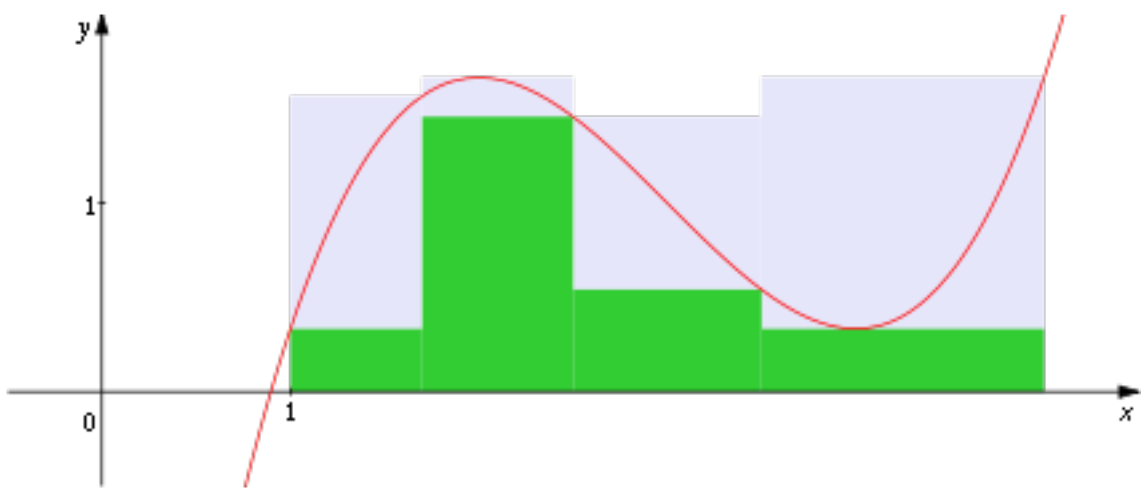
$$m_i := \inf\{f(x) \mid x \in E_i\}, \quad M_i := \sup\{f(x) \mid x \in E_i\},$$

inf ってのは下限(下界の最大元)、sup ってのは上限(上界の最小元)。

sΔを下リーマン和、SΔを上リーマン和といいます。

式だとわかりにくいので直感的に説明しましょう。

山の体積を求めたいとします。まずは山を縦方向に切り分けて細分します。次に、各パーツで最も標高が高いところを調べ、底面の面積とその標高を掛け合わせます。各パーツごとに計算したその値を足したものが上リーマン和になります。同様のことを最も標高が低いところに対して行えば下リーマン和を得ます。厳密には max と sup、min と inf は違うのであくまでも「直感的な」説明ですが。(下の図参照。灰色が上リーマン和、緑色が下リーマン和)



何てことはないです。よーするに「下から計った面積」「上から計った面積」を話題にしているだけです。
ここで、分割を細かくする(n をでかくする)ことによって面積の精度を上げることができます。おなじみ区分求積法ですね。ここで、n を無限大にぶっ飛ばせば、もし f(x)が積分可能な関数ならば、「下からの積分値」下リーマン和も、「上からの積分値」上リーマン和も、同じ値に収束しますよね。下リーマン和の極限値を**下積分**、上リーマン和の極限値を**上積分**といいます。そして、この「上積分と下積分が同じ値になる」ことこそが積分可能の条件なんです。

区間[a,b]において上積分と下積分が一致するならば、その関数は区間[a,b]において積分可能である。

2-1 部分積分

ぶっちゃけ大丈夫だとは思いますが一応 wwww

２つの微分可能な関数 f(x),g(x)に対して以下のような公式が成り立つ。

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

例)

$$\int \sqrt{x^2+a}dx = \int x'\sqrt{x^2+a}dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int x\frac{x}{\sqrt{x^2+a}}dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}dx + a\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx$$

ここで $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}dx = \log\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C$ より、求める積分は

$$\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a} + \frac{1}{2}a\log\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$$

2-2 置換積分

これも大丈夫でしょ wwwwwwwwww

$$\int f(x)dx = \int f(x)\frac{dx}{dt}dt = \int f(g(t))g'(t)dt$$

2-3 有理式の積分

ここからが本題。

$\int \frac{px+q}{x^2+ax+b}dx$ を計算したい。

こういった分数式の積分を行う際は、置換積分や部分積分、Arctan の積分を活用することで解決することができます。

まずは与式を $\int \frac{px+q}{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b}dx$ 　と変形します。

$a^2-4b \geq 0$ のときは部分分数分解を行って計算することができます。

例１：$\int \frac{x-4}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-3}dx$

$= 2\log|x-2|-\log|x-3|+C$

例２：$\int \frac{x+1}{x^2-2x+1}dx = \int \frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}dx$

$= \log|x-1|-\frac{2}{x-1}+C$

$a^2-4b<0$ のときは Arctan の積分を使います。

例３：$\int \frac{x}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+4}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}dx$

$= \frac{1}{2}\log|(x+1)^2+4| - \frac{1}{2}Tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+C$

Arctan の積分は計算ミス(特に係数のミス)が多いので注意してください。他の積分にもいえることですが、求めた原始関数をもう一度微分するなりして検算を行うとミスも減ります。

いまは $\int \frac{px+q}{x^2+ax+b}dx$ の形の積分しか例として出していませんが、これを応用するとどんな有理式の分数関数も積分できてしまいます。代数学の基本定理より、１変数の多項式は 1 次式と２次式の積の形で表せるため、部分分数分解を繰り返せばすべての分数関数は

$\frac{1}{(x+c)^k}, \frac{1}{(x^2+ax+b)^l}, \frac{x}{(x^2+ax+b)^m}$ という関数の一次結合で表せてしまうのです。

以下まとめ。

> 有理式の分数関数を積分したいとき、
>
> １、部分分数分解を行い $\frac{1}{(x+c)^k}, \frac{1}{(x^2+ax+b)^l}, \frac{x}{(x^2+ax+b)^m}$ の一次結合に直す
>
> ２、それぞれを積分する。分母に二次式が含まれる場合は判別式の符号により積分の方法を使い分ける。
>
> $a^2-4b \geq 0$ ならば更に部分分数分解して log の積分
>
> $a^2-4b < 0$ ならば Arctan の積分

「あーくたんじぇんとのせきぶんってなぁに？」って人のために一応書いときます。

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}Arc\tan\frac{x}{a} + C$$

そうそう、**不定積分では積分定数 C を忘れないように。**意外とやっちゃうから気をつけて。

2-4 三角関数の積分(絶対出る)

三角関数を含む式を積分したい場合は、$u=\tan\frac{x}{2}$ とおくと必ず有理式の積分に帰着できます。おしまい。

なぜかというと、このように置換すれば

$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\sin x=\frac{2u^2}{1+u^2}$

と、三角関数すべてを u の有理式にできるからです。
後で問題演習のページを指定しますので、必ずやっといてください。こっから先は自己責任 wwwww

～三角関数の積分～

$$u=\tan\frac{x}{2}$$

3,微分方程式（絶対出る）

力学でたんまりやったからもう大丈夫だとは思いますが。
導関数と元の関数の関係式で表される方程式を微分方程式といい、そこから元の関数を導くことを「微分方程式を解く」といいます。
この分野はいくら口で説明したって身に付くもんじゃなし。読んで一通り理解したら必ず問題演習をするようにしてください。

１、変数分離法

例えば微分方程式$\frac{dx}{dt} = x$が解きたいとします。このとき、「左には x と t があるのに右には x しかない。左辺と右辺をどっちかで統一したいなぁ」と考えます。

両辺を x で割ると、$\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = 1$になります。$\frac{dx}{dt}$は分数と同様に扱っていいので$\frac{1}{x}dx = dt$、両辺をインテグラると$\int \frac{1}{x}dx = \int dt$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int dt \Leftrightarrow \log|x| = t + c \Leftrightarrow x = Ce^{t}$$

となり、元の関数を求めることができました。このように、**右辺と左辺それぞれに一方の文字を集中させ、それぞれ積分**するという解法を「**変数分離法**」といいます。

２、定数変化法

変数分離法よりこちらの方が慣れてしまえば簡単で便利。係数が多項式の場合はむしろ定数変化法以外だと扱いが難しいです。なのでこちらもしっかり理解するようにしてください。
たとえば一元一階の微分方程式において、

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + p(t)$$

というふうに微分方程式がかける場合、p(t)をゼロで置き換えると

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t)$$

が得られます。このように、微分方程式の構成要素が「導関数」「もとの関

数」「その係数となる多項式」しかないような微分方程式を**斉次方程式**といいます。（つまり x だけの式）

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t)$$

を変形すると

$$\dot{x}(t)/x(t) = a(t).$$

になります。左辺は「導関数／元の関数」なので対数微分法の逆を使えば

$$x(t) = C\exp\left[\int^t a(s)ds\right]$$

とできます。これは元の関数を変形した斉次方程式の解です。

ここで**任意定数 C を関数 C(t)で置き換える**と、

$$x(t) = C(t)\exp\left[\int^t a(s)ds\right]$$

となります。これを元の微分方程式

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + p(t)$$

に代入して C(t)を求める。これが定数変化法です。

数式ばっかだと嫌なので具体例をば。

(1)変数分離の例

$$\frac{dy}{dt} - y = -\alpha y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = y - \alpha y^2$$

$$\frac{1}{y - \alpha y^2}dy = dt$$

$$\int \frac{1}{y} + \frac{\alpha}{1 - \alpha y}dy = \int 1dt$$

$$\log|y| - \log|1 - \alpha y| = t + C$$

的な。

⑵定数変化の例

$$\frac{dy}{dt} - y = e^{2t}$$

まず右辺を０にして斉次方程式にする。

$$\frac{dy}{dt} - y = 0$$

$$y = Ce^{t}$$

これで特殊解が求まる。ここで定数 C を t の関数 C(t)で置き換えて最初の方程式にぶち込むと

$$\frac{d}{dt}\left(C(t)e^{t}\right) - C(t)e^{t} = e^{2t}$$

$$C'(t)e^{t} + C(t)e^{t} - C(t)e^{t} = e^{2t}$$

$$C'(t) = e^{t}$$

$$C(t) = e^{t} + A$$ ←A は任意の定数

$$\therefore y = (e^{t} + A)e^{t}$$

とまあこんな感じで一般解が求まるわけですよ。

～定数変化法～

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t) + p(t)$$

という形の微分方程式は以下のように解ける。

１、P(t)=0 として解を求める（つまり特殊解を決定する）

２、解に含まれる積分定数 C を「関数」とみなす

３、求められた解を元の式に代入して C について解く

４、これを利用し、一般解を決定する

4-1　広義積分(できないと不可)

まぁそんな難しい分野でもないので大丈夫とは思いますが、解けないと即不可にすると先生がおっしゃってたのでせめてこの章くらいはお互い真面目にいきましょう wwwww

たとえば $\int_0^1 \log x dx$ という積分をしたい。

しかし logx は x=0 では定義できないにもかかわらず、積分区間には 0 が含まれています。さてどうしたものか。

答えは至って単純で、「定義できない積分区間をとりあえず実数でおいてあげて、積分してから極限をとる」ことで積分値を求めることができるんです。

$$\int_0^1 \log x dx = \lim_{s \to 0} \int_s^1 \log x dx$$

$$= \lim_{s \to 0} [x \log x - x]_s^1 = \lim_{s \to 0} (-1 - s \log s + s)$$

ここで

$$\lim_{s \to 0} s \log s = 0$$

（本来ならロピタルの定理を使うところだが）より、結局極限値は−１になるので、

$$\int_0^1 \log x dx = -1$$

が得られます。最初、積分を極限の形に変形するのが一番重要なステップです。

ただし、広義積分は収束するとは限りません。

$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ なんかがいい例で、同じように変形すると

$\lim_{s \to 0} \int_s^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{s \to 0} (\log 1 - \log s) = \infty$　となって発散してしまいます。

また、広義積分の値は時に求めるのが非常に困難だったりします。しかし、積分値が求まらなくとも、「収束するか否か」がわかればコンピューターで近似しまくることで擬似的に値を算出することが可能です。「発散する」積分が相手な

ら、いくらコンピューターでがんばって計算しても値は増えていくだけですが、「収束する」とわかっている積分が相手ならいつかはよい近似値にたどり着くはずです。こういうわけで、積分値の収束、発散を知るというのは大事なんです。というわけで次の章では広義積分の収束条件やらをやろうと思うのですが、その前に広義積分の代表例をいくつかあげておきます。

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{1-p}(1 > p) \\ \infty(1 \leq p) \end{Bmatrix}$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{1-p}(1 < p) \\ \infty(1 \geq p) \end{Bmatrix}$$

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{s\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^s = 1$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{s\to\infty}\lim_{t\to-\infty}\left[Tan^{-1}x\right]_t^s = \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{s\to1}\lim_{t\to-1}\left[Sin^{-1}x\right]_t^s = \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi$$

これらの積分はすべて収束しています。（上の二つは条件付きだけど）
この事実はこの後の収束云々でも使うので、これらの積分については自分で手を動かしてやってみることをおすすめします。

4-2 広義積分の収束

広義積分の収束条件を考えてみましょう。代数的に解けない積分、例えば

$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$ を求めろって言われても無理です。しかし、この積分が収束するか否かを判断することなら可能です。まずはその条件から先に提示すると、

> 関数 f(x)に対し、区間[a,b]において常に
> $|f(x)| \leq g(x)$をみたす関数 g(x)を f(x)の**優関数**という。このとき、
> 広義積分$\int_a^b g(x)dx$が収束するならば、広義積分$\int_a^b f(x)dx$も収束する。

つまり、直接的に収束 or 発散を判断できない積分に出会ったときに、まずは被積分関数の優関数を見つけてそいつを積分。もし優関数の積分が収束したならば、元の関数の積分も収束するだろうと。そういうわけです。

例えばさっきの$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$について。

被積分関数は$\frac{\sin x}{1+x^2}$ですが、sinx は-1 から 1 の間の値しかとりませんので、

$\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}$がいえます。つまり$\frac{1}{1+x^2}$は$\frac{\sin x}{1+x^2}$の優関数。

したがってこっちを積分してみてもし収束すれば、元の積分の収束もいえるんです。先ほど、主な広義積分をまとめて載せましたが、そのうちの一つに

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{s\to\infty}\lim_{t\to-\infty}\left[Tan^{-1}x\right]_t^s = \left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \pi$$

ってのがあったと思います。こいつはπという数値に収束してますので、優関数は収束しています。

したがって、$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$は収束するということが示せました。

ここで注意して頂きたいのは、$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}dx$の積分値を求めているわけではないということです。あくまでも収束 or 発散がわかればいいので、「ちょ ww こんな積分できねぇよ wwww」ってならないようにしましょう。

５　ガンマ関数とベータ関数

$$\boxed{\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt \qquad (\Re z>0)}$$

をガンマ関数といいます。ガンマ関数には次の性質があります。

$$\Gamma(z)=\int_{t=0}^\infty t^{z-1}(-e^{-t})'\,dt=\left[-t^{z-1}e^{-t}\right]_{t=0}^\infty+(z-1)\int_{t=0}^\infty t^{z-2}e^{-t}\,dt=(z-1)\Gamma(z-1)$$

$$\Gamma(1)=\int_{t=0}^\infty e^{-t}\,dt=\left[-e^{-t}\right]_{t=0}^\infty=1$$

この二つを用いると、自然数 n に対し $\Gamma(n)=n!$ が成り立つことがわかります。この部分積分は問われる可能性があるので一応目を通しておくといいかも。

$$\boxed{\mathrm{B}(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt}$$

をベータ関数といいます。ベータ関数は $t=sin^2\theta$ と置換することで

$$\mathrm{B}(x,y)=2\int_0^{\pi/2}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\,d\theta, \qquad \Re(x)>0,\ \Re(y)>0$$

とも表せます。これもチェックが必要かもしれません。

後述の重積分を使うと、ベータ関数とガンマ関数の間には

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

関係性を見出すことができます。また、後ででてくるガウス積分ってやつを用いると $\left(\frac{1}{2}\right)!=\sqrt{\pi}$ とか訳わかんない式を導くことができちゃいます。重積分の項でもう一回触れようと思います。

６－１　重積分

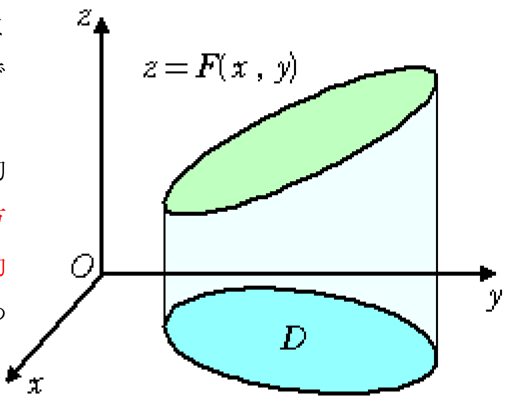
今学期の最重要テーマです。感覚的には、今までは積分を一回行うことによって面積を求めていたけれど、これからは積分を二重に行うことによって体積を求めてやろうじゃないの、って感じです。もちろん３重・４重積分もあるけど。

まずは一番単純な「二重積分」を説明します。ある二変数関数 f(x, y)に対し

$\iint_D f(x,y)\,dxdy$ を「f(x, y)の領域 D における重積分」と呼びます。

この積分は何を求めているかというと、「ある xy 平面上の領域 D と、その上にある曲面で囲まれる部分の体積」です(下図)。

右の図を例にとると、円柱を斜めにカットしたような図形の体積を求めることになります。今までは平面で切断した切断面の面積を求めてそれを積分して体積を出していましたが、操作は基本的には同じです。「変数の片方を固定してもう一方の変数で積分を先に行い、固定していた変数を動かして再度積分する」という方法で重積分は行われます。

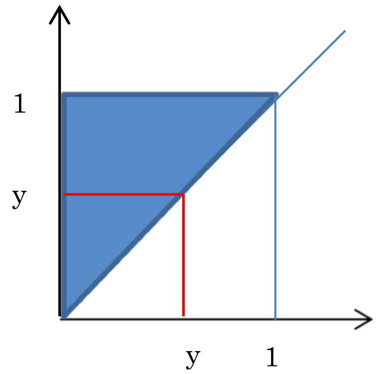


具体例から入りましょう。

$\iint x+y\,dxdy\ \ (D: 0 \leq x \leq 1, y \geq x)$が欲しいです。どうしよう。

まずは領域 D を描きます。どの領域の上の体積を求めるのかを最初に確定させれば考えるのが楽になります。

D の形は右図のようになります。この三角形領域と、曲線 z=x+y で挟まれる部分の体積を求めろってことです。まずは y を固定してみましょう。y の値をある値 y に固定すると、x の値は右図のように 0～y に限られます。したがってまずは x を 0～y で動かして積分し、その次に y を 0～1 の範囲で動かして積分する、という流れで計算を行えばいいのです。



$$\int_0^1\int_0^y x+y\,dxdy=\int_0^1\left[\frac{1}{2}x^2+xy\right]_0^y dy=\int_0^1\frac{1}{2}y^2+y^2dy=\left[\frac{1}{2}y^3\right]_0^1=\frac{1}{2}$$

ってな感じで無事体積を求めることができました。

ここでもう一つ大事な定理を紹介しておきます。重積分を行う際に、被積分関数によっては先に y を固定すると計算できない・・・なんてこともあります。でも実は、「別に x を固定して y から積分したって、y を固定して x から積分したって答えは同じ」なんです。これを Fubini の定理といいます。

重積分は言ってしまえば「ある立体を x か y の平面でぶった切って切断面の面積を求めてからもう一方の変数で積分して体積を出す」という、高校時代から慣れ親しんだ求積法を体系的にしているだけです。重積分においてある変数を固定するというのは「切断」を表し、「固定されていない変数で積分」は切断面の面積を積分によって求めているにすぎず、「最後にもう一方の変数の固定を解いて積分」は体積を求める作業。こう考えれば最初に固定する変数がどれであっても構わない、つまり「切断する方向が違っても体積は同じでしょ」と、Fubini の定理とはそういう意味です。

この定理が役に立つ問題を一問。

$\iint e^{-y^2}\,dxdy\ \ (D: 0\le x\le 1, y\ge x)$が欲しいです。領域はさっきと同じなので割愛。

これを、「x を固定して y を動かす」操作を先にしようとすると積分不可能です。
$\int_0^1\int_x^1 e^{-y^2}dydx$は中身の y の積分がどうやっても無理です。しかしこんな時には切断する方向を変えてやればいいんです。ってわけで、x と y を入れ替えます。

$\int_0^1\int_0^y e^{-y^2}dxdy$なら簡単に求めることができます。

$$\int_0^1\int_0^y e^{-y^2}dxdy=\int_0^1 y\,e^{-y^2}dy=\left[-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

という風に。

この範囲はマジで問題演習しといたほうがいい。次の項で変数変換について述べますが、「できないと不可」の地雷問題はほぼ確実に重積分の問題です。黄色い教科書の 115 ページとかやりこんどくといいよ。

６－２　重積分の変数変換(できないと不可)

普通の積分でもよく使われる手法「置換積分」を重積分でも扱えるようにしようというのが目標です。これから説明することは公式として暗記してしまってください。

いま、重積分の変数 x, y を、別の変数 u, v に変換することを考えます。つまり x を x(u, v), y を y(u, v)に変換するということです。しかし変数を変換するということは考える領域の形や関数の形が変わってしまうことを意味しますから、積分する際になんらかの手続きが必要になるでしょう(置換積分では dx に係数がついたりしましたよね？)。単純に置き換えるだけではいけなかった。さて、どんな操作が必要になるのでしょうか。

前作「河澄殲滅」で説明した「変数変換のヤコビ行列」に登場してもらいます。

関数f(x, y)の二変数 x,y が、u,v の関数としてそれぞれ x(u,v),y(u,v)と表せるとき、

$$\frac{\partial}{\partial u}f(x(u,v),y(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial x}*\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}*\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial}{\partial v}f(x(u,v),y(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial x}*\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}*\frac{\partial y}{\partial v}$$

である。(Chain rule)また、この式は

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial u}\\ \frac{\partial f}{\partial v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

と変形できる。このとき右辺の２×２行列を、x→x(u,v)、y→(u,v)の変数変換のヤコビ行列という。

Chain rule とかマジ懐かしいわ。実は今までそんなに重要ではなかったこのヤコビ行列が重積分では大活躍するんですわ。

ヤコビ行列の行列式をヤコビアンといい、$\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$で表します。このヤコビアンが超重要なのでヤコビ行列の形は確実にインプットしてください。

まず結論から示してしまいますと

重積分$\iint f(x,y)dxdy$
において、x=x(u,v),y=y(u,v)と置き換えたとき、この積分は

$$\iint f(x(\mathrm{u},\mathrm{v}),y(u,v))\left|\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\right|dudv$$

という、ヤコビアンの絶対値を掛けた形で表される。

例えば一番よく使われるのが極座標表示。x=rcosθ、y=rsinθというふうに、rとθの二変数に変換する場合が代表例です。

$$\iint x^2+y^2dxdy \quad D: x^2+y^2 \leq 4$$

x=rcosθ、y=rcosθと置き換え、θ=0〜2π、r=0〜2で考えるとよさげですね。しかしこう置き換えて

$$\iint r^2drd\theta \quad D: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2$$

とするだけではいけません。ヤコビアンを中に入れてあげなくちゃあかん。この場合ヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -rsin\theta & cos\theta \\ rcos\theta & sin\theta \end{pmatrix}$$

なので行列式を計算すると-rになり、これがヤコビアンになります。ただし大事なことが一つあって、ヤコビアンの絶対値を積分の中に入れなきゃいけないので間違えないように。この場合は被積分関数にrをかけて積分しなきゃなりません。したがって

$$\iint r^3drd\theta \quad D: 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2$$

を計算すればいいので結果は8πになります(計算は単純なので割愛)。絶対値忘れないように！正関数を積分したのに積分の結果が負になったら不可にするって言ってましたw

ここも相当問題演習をして訓練を積んでおくことをお勧めします。121ページとか。

～おまけ～ガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (2)$$

という公式があります。最後の小テストで触れてたからもういいかなとも思いますが一応。小テストでは挟み撃ちとかやってかなり厳密だったけど今回は簡略化して書きます。

まず，左辺の積分値を I とします。 Iは被積分関数の関数形から，定義域が $I > 0$であることがわかります。 Iは

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$$

と書いても、

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy$$

と書いても、積分値に変わりはありませんね。

したがって、

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \right)^2 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\ e^{-a(x^2+y^2)} \qquad (3) \end{aligned}$$

と変形していくことができます。すると重積分に帰着できるので変数変換が使えるってわけです。

ここで $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$と変数変換をします。すると（3）式は

$$I^2 = \int_0^{\infty} rdr \int_0^{2\pi} d\theta\ e^{-ar^2} \qquad (4)$$

と書けます。 θについては積分を実行することができて、さらに式変形をしていくと

$$\begin{aligned}
I^2 &= 2\pi \int_0^\infty rdr\ e^{-ar^2} \\
&= 2\pi \int_0^\infty d\left(\frac{r^2}{2}\right)\ e^{-ar^2} \\
&= \pi \left[-\frac{1}{a}e^{-at}\right]_{t=0}^{t=\infty} \\
&= \frac{\pi}{a} \qquad (5)
\end{aligned}$$

となります。ただし 2 行目から 3 行目で見やすいように、積分変数 r^2を tに置換していま す。 $I > 0$なので、正の値のみをとって

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (6)$$

となり、ガウス積分の公式を得ることができました。

また、先ほどのガンマ関数において

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx$、ここで$x = t^2$とすれば$2\int_0^\infty e^{-t^2} dt$と変形でき、ガウス積分の公式からこれは$\sqrt{\pi}$になることがわかります。もともとガンマ関数は自然数の階乗を表す手段の一つだったわけで、この結果からさっき話した

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}$$

が得られるってわけです。

６－３　線積分とグリーンの定理

1. **線積分**：曲線に沿って積分したい.

   C：(区分的に) なめらかな連続曲線

   (つまり　$C = \{(x(t), y(t))\ ;\ t \in [a, b]\}$　と書けて
   $x(t)$ と $y(t)$ が連続かつ (有限個の点を除いて)C^1 級)

   $f(x,y)$, $g(x,y)$：C 上連続な関数

   このとき, C に沿った線積分は次のように定義される:

$$\int_C f(x,y)dx := \int_a^b f(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt}dt.$$
$$\int_C g(x,y)dy := \int_a^b g(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt}dt.$$

   上の 2 つをまとめて

$$\int_C (f(x,y)dx + g(x,y)dy) := \int_a^b f(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt}dt + \int_a^b g(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt}dt$$

   と書くこともある.

   (物理などの文献では, 上記の線積分はベクトル場 $\mathbf{F} = (f(x,y), g(x,y))$ の線積分 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ (ただし $\mathbf{r} = (x(t), y(t))$) と呼ばれることも多い.)

2. **Green の定理**：領域の境界を 1 周する線積分と, 領域上での重積分の関係.

   D：区分的になめらかな境界を持つ $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合であって,
   単純な領域に分割できるもの
   $f(x,y)$：D 上 C^1 級関数
   このとき, 次の式が成り立つ:

$$\int_{\partial D}(f(x,y)dx + g(x,y)dy) = \int\int_D \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right)dxdy.$$

   ただし左辺の ∂D 上の線積分は, D を左に見ながら D の境界を一周するようにとる.

   右辺の符号に注意しよう.

だってめんどかったんだもんｗｗｗｗｗｗｗｗｗｗｗｗｗｗｗ

それでは試験頑張りましょう！皆さんが無事殲滅できますように・・・