期待値と揺らぎ

(1) サイコロを振る．でる目の期待値 m はいくらか．

(2) サイコロを振ったとき，でた目の値を x とする．x がその平均値 m の周りにどれだけばらつくかを知りたい．x の平均からのずれ $x-m$ の期待値はゼロになってしまうので，非自明な尺度としては $\sqrt{(x-m)^2\text{の期待値}}$ が基本的である．これを x の揺らぎという．x の揺らぎ d を求めよ．

(3)N 個のサイコロを振る．ただしそれらは干渉せず，目の出方は独立であるとする．1 番目のサイコロの目の値を x_1, 2 番目のサイコロの目の値を x_2 として同様に N 番目のサイコロの目の値を x_N とする．このとき総和 $X = x_1 + x_2 + \cdots + x_N$ の期待値 M を求めよ．

(4) 総和 X はその期待値 M の周りにどれだけばらつくだろうか．(2) にならって それは X の揺らぎ $D = \sqrt{(X-M)^2\text{の期待値}}$ によって定量化される．D の値を求めよ．

(5) 総和 X の期待値 M とその揺らぎ D の比はサイコロの数 N を増やしていくとどのようにふるまうか．考察せよ．

解答例

(1) $m = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2} = 3.5.$
(2)

$$d^2 = \frac{1}{6}\left((1-\frac{7}{2})^2 + (2-\frac{7}{2})^2 + (3-\frac{7}{2})^2 + (4-\frac{7}{2})^2 + (5-\frac{7}{2})^2 + (6-\frac{7}{2})^2\right) = \frac{35}{12}.$$

よって揺らぎは $d = \sqrt{\frac{35}{12}} \simeq 1.7.$

(3) サイコロの目の出方は独立なので，

$$M = (x_1\text{の期待値}) + \cdots + (x_N\text{の期待値}) = Nm = \frac{7N}{2}.$$

(4) $X - M = (x_1 + \cdots + x_N) - Nm = (x_1 - m) + \cdots + (x_N - m)$ の最後の表式を用いて 2 乗をとると

$$(X-M)^2 = (x_1 - m)^2 + \cdots + (x_N - m)^2 + 2\sum_{1\le i<j\le N}(x_i - m)(x_j - m).$$

最後の和は $N(N-1)/2$ 個の項からなる．上の式の期待値を考える．サイコロの目の出方は独立なので，例えば $(x_1 - m)(x_2 - m)$ の期待値は $(x_1 - m)$ の期待値と $(x_2 - m)$ の期待値の積に等しい．これは $0 \times 0 = 0$ である．従って上の厄介な和の各項は期待値には寄与しないので以下の結果を得る．

$$(X-M)^2\text{の期待値} = ((x_1 - m)^2\text{の期待値}) + \cdots + ((x_N - m)^2\text{の期待値}) = \frac{35N}{12}.$$

ここで問 (2) の結果を用いた．以上により X の揺らぎは $D = \sqrt{\frac{35N}{12}}.$

(5)

$$\frac{D}{M} = \sqrt{\frac{35N}{12}} \times \frac{2}{7N} = \sqrt{\frac{5}{21N}} \quad \xrightarrow{N\to\infty} \quad 0.$$

この結果の示唆することを考察しよう．総和 X の期待値 M はサイコロの数 N に比例して大きくなる．揺らぎ D も N とともに大きくなるが，その増大の仕方は N ほどは強くなく，$\sqrt{N}$ に比例する．したがって，揺らぎは N の増大とともに相対的に無視できるようになっていく．あるいはサイコロの目の平均値 $Y = X/N$ に着目して次のように言ってもよい．Y の期待値は N によらずに 7/2 であるが，Y の揺らぎは $\sqrt{\frac{5}{21N}}$ で与えられ，これは N とともに 0 に近づく．大雑把に表現すれば,「自由度が増えるほど総和は揺らぎよりも支配的になり，平均値は確定値とみなせるようになってゆく.」

以上は，独立なサイコロという単純なモデルに準拠した議論だが，揺らぎと総和の期待値について同様の性質が極めて一般的に議論されている．ここでは関連するキーワードだけを挙げておくので興味のある人は調べてみよう.「中心極限定理」,「(確率論における)Chebyshev の不等式」，“Mathematical foundations of statistical mechanics” (A. I. Khinchin の本 (1949, Dover)).