電磁気学Ａ　試験問題・解答（担当：加藤雄介）

以下ではϵ_0，μ_0をそれぞれ、真空の誘電率、真空の透磁率であるとする。ρ，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}$はそれぞれ電荷密度、電流密度、電場、磁場を表すものとする。

問題１ Maxwell 方程式

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0 \tag{3}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} = \mu_0\left(\boldsymbol{j} + \epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \tag{4}$$

の各式について

1. 対応する積分形の式（線積分、面積分、体積積分で両辺が表わされた式）を書け。積分領域についても明示せよ。
2. 各式が表わす物理的内容について、それぞれ 1 行から 2 行程度で述べよ。
3. Maxwell 方程式の微分形または積分系を用いて電荷保存則が成り立つことを示せ。

（解答）

1.

$$\int_{S(\text{外向き閉曲面})} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_{V(S\text{の内部})} \rho dV \tag{1$'$}$$

$$\int_{C(\text{閉曲線})} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{2$'$}$$

$$\int_{S(\text{外向き閉曲面})} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{3$'$}$$

$$\int_{C(\text{閉曲線})} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0\int_S \left(\boldsymbol{j} + \epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{4$'$}$$

ただし,$(2)'$及び$(4)'$においては,SはCを縁とする曲面で,その向きはCの向きから右ねじの法則により定めるものとする.

2.

(1) 電場が湧き出す源は電荷である(Gauss の法則).

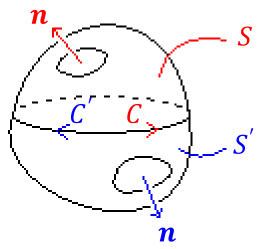
(2) 磁場の時間変化があるところには電場が生じる(電磁誘導の法則).

(3) 磁場には湧き出す源がない,すなわち単独磁荷は存在しない.

(4) 電場の時間変化と電流とで磁場が生じる(Ampère-Maxwell 則).

3.

(解 1) $(4)'$式より,閉曲線C,及びそれを縁とする曲面S(向きは右ねじの法則により定める)について



$$\int_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \left(\boldsymbol{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$$

が成り立つ.同様に,Cの向きを逆にした閉曲線C'と,それを縁とする曲面S'(向きは右ねじの法則により定める)について

$$\int_{C'} \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_{S'} \left(\boldsymbol{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$$

が成り立つ.ただし,S及びS'は図のように選ぶ.この 2 式を辺々足し合わせて

$$0 = \mu_0 \int_{S+S'} \left(\boldsymbol{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{5}$$

を得る.ここでSとS'を合わせた曲面$S+S'$は,1 つの外向き閉曲面をなすから,$(1)'$式より

$$\int_{S+S'} \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{S+S'} \epsilon_0 \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{\partial Q}{\partial t} \left(Q = \int_{V(S+S'\text{の内部})} \rho dV = (S+S'\text{内の総電荷})\right)$$

が成り立つこと,及び電流密度の定義から

$$\int_{S+S'} \boldsymbol{j}\cdot d\boldsymbol{S} = I\ (\text{閉曲面}S+S'\text{を貫く電流})$$

が成り立つことに注意すると,(5)式より

$$-\frac{\partial Q}{\partial t} = I$$

となる.これは電荷保存則に他ならない. (Q.E.D.)

(解 2) (4)式の両辺の divergence をとると

$$0 = \mu_0\, \mathrm{div}\left(\boldsymbol{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right)$$

$$\therefore\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}(\epsilon_0 \boldsymbol{E}) = 0$$

を得る.ここで,(1)式より

$$\mathrm{div}(\epsilon_0 \boldsymbol{E}) = \rho$$

が成り立つから,結局

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

となり,電荷保存則を得る. (Q.E.D.)

★1 は divergence や rotation の定義を理解していればできると思います.

divergence ↔ 面積分 , rotation ↔ 線積分

の対応関係を思い起こして下さい.また,積分領域にも注意しましょう.

2 で問われた Maxwell 方程式の物理的意味については,解答を読んで納得してください.

3は電荷保存則を示すという問題でしたから,まずは電荷保存則の式化が必要となります.電荷が保存することを「領域表面を貫く電流が,領域内部の総電荷の時間変化に等しいこと」と表現したのが次式です:

$$-\frac{\partial Q}{\partial t} = I.$$

あるいは,これを微分形に書き換えた

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

を示しても構いません.解 1 では Maxwell 方程式の積分形を用いて,解 2 では微分形を用いてこれらを導きました.積分形を用いる場合には,積分領域に注意して議論を進めます.微分形を用いる場合には,式変形においてベクトル解析の公式

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) = 0 \ (\boldsymbol{A}\text{: 任意のベクトル場})$$

を思いつくことがポイントです.

問題 2 一対の導体からなるコンデンサーがあり、その電気容量（静電容量、Capacitance）がCで与えられるとする。

1. Cの定義を書け。
2. それぞれの導体にQ, $-Q$の電荷が帯電しているとき、コンデンサーに蓄えられるエネルギーが$Q^2/(2C)$で与えられることを示せ。

(解答)

1. それぞれの導体に$Q, -Q$の電荷が帯電しているときの導体間の電位差をVとすると,

$$C = \frac{Q}{V}$$

で与えられる量Cのこと.

2. $Q, -Q$の電荷が帯電している導体をそれぞれA, Bとする.コンデンサーに蓄えられるエネルギーは,2 つの導体の電荷が 0 の状態から始めて,BからAへ電荷を移動させて$Q, -Q$の電荷が帯電している状態を作るときに外力がする仕事に等しい.

そこで,A, Bにそれぞれ$\lambda Q, -\lambda Q$の電荷が帯電している状態において,BからAへ微小電荷$\Delta\lambda Q$を移動させるのに外力がする仕事ΔWを考える.このとき,AB間の電位差は

$$V = \frac{\lambda Q}{C}$$

で与えられる(移動する電荷は微小なので,移動の前後で電位差は変化しないとしてよい).従って

$$\Delta W = V \times \Delta\lambda Q = \frac{Q^2}{C}\lambda\Delta\lambda$$

となるから,$\lambda = 0$から$\lambda = 1$の状態を作るための仕事は

$$W = \int_0^1 \frac{Q^2}{C}\lambda d\lambda = \frac{Q^2}{2C}.$$

★1では静電容量の定義が問われました.定義としては上に述べたことで十分だと思いますが,この比が導体に帯電している電荷に依存せず,導体の形状と配置だけで決まることに注意してください.

2は静電エネルギーの導出です.一度目にしたことがあれば,割と記憶に残っていたのではないでしょうか.

問題3

1. 単一ループの自己インダクタンスLの定義を書け。
2. 自己インダクタンスLのコイルに電流Iが流れているとき、コイルに蓄えられるエネルギーは$LI^2/2$で与えられることを示せ。

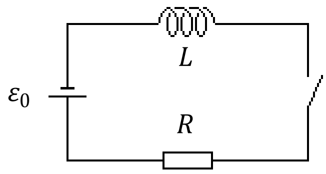
(解答)

1. ループを流れる電流Iと,このループを縁とする曲面Sを貫く磁束$\Phi(S)$の比例係数,つまり

$$\Phi(S) = LI$$

で与えられる量Lのこと.

2. 抵抗,コイル,起電力からなる右図のような回路において



$$\varepsilon_0 = RI + L\frac{dI}{dt}$$

が成り立つ.この式の両辺にをIを掛けると

$$\varepsilon_0 I = RI^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{LI^2}{2}\right)$$

と変形されるが,左辺の$\varepsilon_0 I$は電池が単位時間当たりにする仕事,右辺のRI^2は単位時間当たりに発生する Joule 熱であるから,コイルに蓄えられるエネルギーは

$$\frac{LI^2}{2}$$

となる.

★問題 2 と対応して,コイルの性質を特徴づける自己インダクタンスの定義と,エネルギーに関する問題でした.コイルに蓄えられるエネルギーは,このように回路内のエネルギー収支を考えます.

問題4

1. 定常電流Iがz軸上を$+z$の向きに流れているとき、空間の各点における磁場の大きさと向きを求めよ（答えのみでよい)。
2. z軸を軸とする円柱領域（断面の半径R，軸方向の長さは無限大）内を定常電流Iが$+z$の向きに一様に流れているとする。このとき空間の各点における磁場の大きさと向きを求めよ。

(解答)

1. $\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}$に対し,$\vec{\rho}=x\hat{x}+y\hat{y}$,$\rho=|\vec{\rho}|$,$\hat{\rho}=\vec{\rho}/\rho$とおくと

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{z}\times\hat{\rho}.$$

2. 対称性より,磁場は

$$\vec{B}(\vec{r})=B(\rho)\hat{z}\times\hat{\rho}$$

と書ける.z軸に垂直な平面上,z軸上に中心を持つ半径ρの円周C上において,$d\vec{r}=\hat{z}\times\hat{\rho}dr$であるから

$$\int_C \vec{B}(\vec{r})\cdot d\vec{r}=B(\rho)\int_C dr=2\pi\rho B(\rho).$$

従って,Ampère の法則より

$$2\pi\rho B(\rho)=\begin{cases}\mu_0 I\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \ (\rho<R)\\ \mu_0 I\ (\rho\geq R)\end{cases}$$

$$\therefore \vec{B}(\vec{r})=\begin{cases}\frac{\mu_0 I\rho}{2\pi R^2}\hat{z}\times\hat{\rho}\ (\rho<R)\\ \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{z}\times\hat{\rho}\ (\rho\geq R).\end{cases}$$

★1 の「直線電流が作る磁場」については Biot-Savart の法則から導けますが,この結果は暗記してしまった方がよいでしょう.ρを用いずに

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{x\hat{y}-y\hat{x}}{x^2+y^2}$$

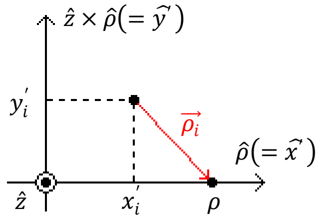
と書いても勿論 OK です.

2 は Ampère の法則の応用です.答案用紙には「対称性より

$$\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho)\hat{z} \times \hat{\rho}$$

と書ける 」と書けば十分だと思いますが,一応この事実を保証しておきましょう：

題意の円柱領域を,底面積ΔS_iの微小円柱iに分割し,各微小円柱を流れる直線電流が空間の各点に作る磁場を考えます.$\hat{\rho}$方向をx'軸,$\hat{z}\times\hat{\rho}$方向をy'軸としましょう.ΔS_iの代表点を$\mathrm{P}_i(x_i', y_i')$とすると,iを流れる直線電流I_iの磁場への寄与は



$$\vec{B}(\mathrm{P}_i) = \frac{\mu_0 I_i}{2\pi{\rho_i}^2}\hat{z} \times \vec{\rho_i}$$

と書けます.ここで

$$\vec{\rho_i} = (\rho - x_i')\hat{\rho} - y_i'\hat{z}\times\hat{\rho} \ \ , \ \ \rho_i = |\vec{\rho_i}| \ \ , \ \ \hat{\rho_i} = \vec{\rho_i}/\rho_i$$

とおきました.いま

$$I_i = \frac{I}{\pi R^2}\Delta S_i \ \ , \ \ \rho_i = |\vec{\rho_i}| = (\rho - x_i')^2 + {y_i'}^2 \ \ , \ \ \hat{z}\times\vec{\rho_i} = (\rho - x_i')\hat{z}\times\hat{\rho} + y_i'\hat{\rho}$$

ですから,

$$\vec{B}(\mathrm{P}_i) = \frac{\mu_0}{2\pi}\cdot\frac{I}{\pi R^2}\Delta S_i\cdot\frac{(\rho - x_i')\hat{z}\times\hat{\rho} + y_i'\hat{\rho}}{(\rho - x_i')^2 + {y_i'}^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R^2}\cdot\frac{(\rho - x_i')\hat{z}\times\hat{\rho} + y_i'\hat{\rho}}{(\rho - x_i')^2 + {y_i'}^2}\Delta S_i$$

$$\therefore \vec{B}(\vec{r}) = \lim_{\Delta S_i\to 0}\sum_i \vec{B}(\mathrm{P}_i) = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R^2}\times\lim_{\Delta S_i\to 0}\sum_i\frac{(\rho - x_i')\hat{z}\times\hat{\rho} + y_i'\hat{\rho}}{(\rho - x_i')^2 + {y_i'}^2}\Delta S_i$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R^2}\int_{x'^2+y'^2\leq R^2}\frac{(\rho - x')\hat{z}\times\hat{\rho} + y'\hat{\rho}}{(\rho - x')^2 + y'^2}dx'dy'$$

$$= \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R^2}\int_{x'^2+y'^2\leq R^2}\frac{(\rho - x')}{(\rho - x')^2 + y'^2}dx'dy'\right)\hat{z}\times\hat{\rho}$$

$$+ \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R^2}\int_{x'^2+y'^2\leq R^2}\frac{y'}{(\rho - x')^2 + y'^2}dx'dy'\right)\hat{\rho}.$$

第 2 項の積分

$$\int_{x'^2+y'^2\leq R^2}\frac{y'}{(\rho - x')^2 + y'^2}dx'dy'$$

は,y'の奇関数を,y'に関して対称な領域で積分するので 0 となります.一方,第 1 項の積分はρだけの関数となりますから,

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R^2}\int_{x'^2+y'^2\leq R^2}\frac{(\rho - x')}{(\rho - x')^2 + y'^2}dx'dy' \ = \ B(\rho)$$

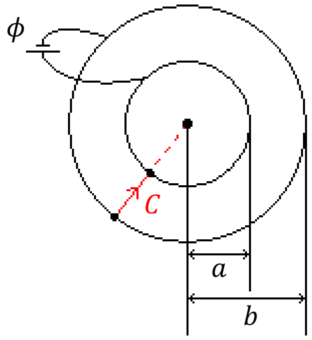
とおけば

$$\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho)\hat{z} \times \hat{\rho}$$

となり,目標の形が得られます.

問題５　内径a, 外径b, 電気伝導度σの同心導体球殻の外側表面から測った内側表面の電位を一定値ϕに保つとき、内側表面から外側表面に流れる定常電流Iを求めよ。また導体内部の各点における電場の大きさと向きを求めよ。

(解答)



球対称性より

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi r^2}\hat{r}$$

と書けるから,局所的 Ohm 則より

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{j}(\vec{r})}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2}\hat{r}.$$

従って,右図のように積分路Cを選ぶと

$$\phi = -\int_C \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = -\frac{I}{4\pi\sigma}\int_C \frac{\hat{r}}{r^2}\cdot\hat{r}dr = -\frac{I}{4\pi\sigma}\int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$\therefore I = 4\pi\sigma\phi\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{-1} = 4\pi\sigma\phi\frac{ab}{b-a}.$$

また,導体内部の電場は

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{I}{4\pi\sigma r^2}\hat{r} = \frac{\phi ab}{b-a}\frac{\hat{r}}{r^2}.$$

～あとがき～

講義の内容を理解していれば,標準的な問題だったと思います.解答に関する質問などありましたら,お知らせください.

2010 年 2 月 13 日　　髙橋　一史