2009 年度夏学期・数学 IA 試験（担当：小澤 登高）

解　　答

問題１. (小問(ii),(iii)の証明には(i)で述べた定義を使い,他の定理や事実を使わないこと.)

(i). 数列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$がaに収束するとはどういうことか？ 定義を述べよ.

(ii). もし数列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$がaとbの両方に収束するなら,実は$a=b$であることを示せ.

(iii). 数列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$がaに収束するなら,

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

で定義される数列$(b_n)_{n=1}^{\infty}$もaに収束することを示せ.

(解答)

(i).

$$^{\forall}\varepsilon > 0 ^{\exists}N \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad n \geq N \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

★もちろん

$$^{\forall}\varepsilon > 0 ^{\exists}N \in \mathbb{N} ^{\forall}n \geq N, \ |a_n - a| < \varepsilon$$

でも構いません.

(ii). 背理法で示すため,$a \neq b$としておく.$\varepsilon = \frac{|a-b|}{3}$とすると,$\varepsilon > 0$である.

$a_n \to a$なので

$$^{\exists}N_1 \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad n \geq N_1 \implies |a_n - a| < \varepsilon.$$

同様に,$a_n \to b$なので

$$^{\exists}N_2 \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad n \geq N_2 \implies |a_n - b| < \varepsilon.$$

このとき,$N = \max\{N_1, N_2\}$に対して

$$|a-b| \leq |a - a_N| + |a_N - b| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|a-b|.$$

これは$|a-b| > 0$に矛盾する.よって$a = b$.　　　　(Q.E.D.)

(iii). 数列$(a_n)_{n=1}^{\infty}$はaに収束するから

$$^{\forall}\varepsilon > 0 ^{\exists}N \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad n \geq N \implies |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$M = |a_1 - a| + \cdots + |a_N - a|$とおき,$N' > \frac{2M}{\varepsilon}$,$N' \geq N$となる$N' \in \mathbb{N}$をとると,$n \geq N'$のとき

$$|b_n - a| = \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| = \left|\frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_n - a)}{n}\right| \le \frac{|a_1 - a| + \cdots + |a_n - a|}{n}$$

$$\le \frac{M}{n} + \frac{n-N}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \frac{M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

よって数列$(b_n)_{n=1}^{\infty}$もaに収束する. (Q.E.D.)

問題２. 数列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$を次の漸化式で定める:

$$a_0 = a_1 = 1\,, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

(i). べき級数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$の収束半径を求めよ.

(ii). 関数$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$のべき級数を使わない簡単な表示を求め,$f\left(\frac{1}{2}\right)$を計算せよ.

(Hint: $f(x)$はどのような関係式を満たすか？)

(解答)

(i). 与えられた漸化式より

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} + 1$$

であるから,数列$(r_n)_{n=0}^{\infty}$を

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

によって定めると

$$r_{n+1} = \frac{1}{r_n} + 1 \tag{2.1}$$

が成り立つ.$r_n \ge 1\ ({}^{\forall} n \ge 0)$より

$$\left|r_n - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right| = \left|\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2} - r_{n-1}}{r_{n-1}}\right| \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}\left|r_{n-1} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right| \le \cdots$$

$$\le \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n \left|r_0 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right| = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} r_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

D’Alambert の判定法より,求める収束半径をRとすると

$$R = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

★数列$(r_n)_{n=1}^{\infty}$の漸化式(2.1)の特性方程式

$$\alpha = \frac{1}{\alpha} + 1$$

の解は

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

です.$r_n > 1$ですから,数列$(r_n)_{n=0}^{\infty}$が収束するとすれば,この内$\alpha \geq 1$を満たす

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

が極限値の候補となります.上の解答では,このことを踏まえて$\left|r_n - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right|$を評価したわけです.
Cauchy-Hadamard の定理を使っても解けます.数列$(a_n)_{n=0}^{\infty}$の一般項は

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + (-1)^n \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}}{\sqrt{5}}$$

ですから,

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{n}} < |a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

が成り立ちます.$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{\frac{1}{n}} \to 1\ (n \to \infty)$を考えると,はさみうちの原理より

$$R = \left(\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{-1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

(ii). $0 \neq |x| < R$のとき,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^{n+1} = \frac{f(x)-1}{x},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^n = \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^{n+2} = \frac{f(x)-(x+1)}{x^2}$$

が成り立つから

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+2} - a_{n+1})x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}x^n$$

$$= \frac{f(x)-(x+1)}{x^2} - \frac{f(x)-1}{x}$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{x^2+x-1}.$$

従って$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4.$

★ちょっと面倒ですが,一般項が分かれば次のようにしてもできます:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}x^n=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)^n-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)^n$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}$$

$$=\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)}{\left(1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)\left(1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x\right)}=-\frac{1}{x^2+x-1}.$$

問題３.

(i). $\sqrt{1+2x}$と$\log(1+x)$の$x\approx 0$における Taylor 展開をx^3の項まで求めよ.剰余項も書くこと.

(ii). 極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}\left(\frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+2x}-1}-1\right)$$

の値が 0 や∞にならないように自然数nを定め,そのときの極限値を求めよ.

(iii). $\sqrt{30}$を誤差10^{-2}以内で計算して,十進小数で表記せよ.(どのように計算したかも書くこと.)

(解答)

(i). $f(x)=\sqrt{1+2x}$とおくと

$$f'(x)=(1+2x)^{-\frac{1}{2}},f''(x)=-(1+2x)^{-\frac{3}{2}},f^{(3)}(x)=3(1+2x)^{-\frac{5}{2}},f^{(4)}(x)=-15(1+2x)^{-\frac{7}{2}}.$$

Taylor の定理より

$$f(x)=\sum_{k=0}^{3}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}x^k+\frac{f^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4=1+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{5(1+2\theta x)^{-\frac{7}{2}}}{8}x^4\ (^\exists\theta\in(0,1)).$$

また,$g(x)=\log(1+x)$とおくと

$$g'(x)=(1+x)^{-1},g''(x)=-(1+x)^{-2},g^{(3)}(x)=2(1+x)^{-3},g^{(4)}(x)=-6(1+x)^{-4}.$$

Taylor の定理より

$$g(x)=\sum_{k=0}^{3}\frac{g^{(k)}(x)}{k!}x^k+\frac{g^{(4)}(\theta x)}{4!}x^4=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{(1+\theta x)^{-4}}{4}x^4\ (^\exists\theta\in(0,1)).$$

(ii). (i)より

$$\frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+2x}-1}-1=\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+O(x^4)}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+O(x^4)}-1=\frac{-\frac{x^3}{6}+O(x^4)}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+O(x^4)}=x^2\cdot\frac{-\frac{1}{6}+\frac{O(x^4)}{x^3}}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{O(x^4)}{x}}$$

であるから,$n=2$のとき

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\log(1+x)}{\sqrt{1+2x}-1}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}+\frac{O(x^4)}{x^3}}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{O(x^4)}{x}}=-\frac{1}{6}.$$

(iii). (i)より

$$\sqrt{\frac{6}{5}}=f\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{2191}{2000}-\frac{\left(1+\frac{\theta}{5}\right)^{-\frac{7}{2}}}{16000}\quad({}^{\exists}\theta\in(0,1))$$

$$\therefore\left|\sqrt{\frac{6}{5}}-\frac{2191}{2000}\right|=\frac{\left(1+\frac{\theta}{5}\right)^{-\frac{7}{2}}}{16000}<\frac{1}{16000}.$$

よって$\left|\sqrt{30}-\frac{2191}{400}\right|<\frac{1}{3200}<10^{-2}$だから,

$$\sqrt{30}\fallingdotseq\frac{2191}{400}=5.4775.$$

★出題意図にはそぐわないと思いますが,次のようにしてもよいでしょう:

$5.47^2=29.9209<30$, $5.48^2=30.0304>30$ より $5.47<\sqrt{30}<5.48$. 従って $\left|\sqrt{30}-5.47\right|<10^{-2}$ だから,$\sqrt{30}\fallingdotseq 5.47$.

問題４. 3 次元 Euclid 空間$\mathbb{R}^3$内の曲面$S:(x-z)(x+y-z)=3$と曲面Sの上で定義された関数$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$を考える.

(i). 曲面Sの,点$(2,2,1)$における接平面を求めよ.

(ii). 曲面Sにおいて,点$(2,2,1)$の近傍でzはx,yの関数とみなせる.$F(x,y,z)=f\big(x,y,z(x,y)\big)$とおいたときの,$\frac{\partial F}{\partial x}(2,2)$及び$\frac{\partial F}{\partial y}(2,2)$を求めよ.

(iii). 曲面S上の関数$f(x,y,z)$が最小値をとるときの(x,y,z)の座標を求めよ.
(関数fの最小値を求める必要はない.)

(解答)

(i). $g(x,y,z)=(x-z)(x+y-z)-3$とおくと

$$\frac{\partial g}{\partial x}=2x+y-2z\,,\frac{\partial g}{\partial y}=x-z\,,\frac{\partial g}{\partial x}=-2x-y+2z$$

である.接平面の方程式は

$$\frac{\partial g}{\partial x}(2{,}2{,}1)(x-2)+\frac{\partial g}{\partial y}(2{,}2{,}1)(y-2)+\frac{\partial g}{\partial z}(2{,}2{,}1)(z-1)=0$$

で与えられるから,

$$4(x-2)+(y-2)-4(z-1)=0$$
$$\therefore 4x+y-4z=6.$$

(ii). fの偏導関数は

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,,\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

また,(i)より

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2{,}2)=1\,,\frac{\partial z}{\partial y}(2{,}2)=\frac{1}{4}.$$

よって

$$\frac{\partial F}{\partial x}(2{,}2)=\frac{\partial f}{\partial x}(2{,}2{,}1)+\frac{\partial z}{\partial x}(2{,}2)\frac{\partial f}{\partial z}(2{,}2{,}1)=\frac{2}{3}+1\cdot\frac{1}{3}=1,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(2{,}2)=\frac{\partial f}{\partial y}(2{,}2{,}1)+\frac{\partial z}{\partial y}(2{,}2)\frac{\partial f}{\partial z}(2{,}2{,}1)=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{4}.$$

★(i)で求めた接平面の方程式によって$\frac{\partial z}{\partial x}(2{,}2)\,,\frac{\partial z}{\partial y}(2{,}2)$が分かりますが,次のように求めることもできます:

$(x-z)(x+y-z)-3=0$をzについて解くと

$$z=\frac{2x+y\pm\sqrt{y^2+12}}{2}.$$

2 つの分枝の内,$(x,y)=(2{,}2)$のとき$z=1$となる方を考えるので

$$z=\frac{2x+y-\sqrt{y^2+12}}{2}.$$

このとき

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1\,,\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{y}{\sqrt{y^2+12}}\right)$$

ですから

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2{,}2)=1\,,\frac{\partial z}{\partial y}(2{,}2)=\frac{1}{4}$$

となり,確かに上の解答と一致します.

(iii). 「fが最小 $\Leftrightarrow$ f^2が最小」であるから,$h = f^2$とおいてhが最小となる(x, y, z)を求める.

$$\nabla h = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \nabla g = \begin{pmatrix} 2x + y - 2z \\ x - z \\ -2x - y + 2z \end{pmatrix}$$

である.$\nabla g = 0$のとき$x = z$かつ$y = 0$であるが,$g(x, 0, x) = -3 \neq 0$より,このような点は曲面S上に存在しない.よって$\nabla g \neq 0$であるから,Lagrange の未定乗数法より,hを最小にする点(x, y, z)は

$$\nabla h = \lambda \nabla g \ ({}^{\exists}\lambda) \ \text{かつ} \ g = 0,$$

すなわち

$$\begin{cases} 2x = \lambda(2x + y - 2z) \\ 2y = \lambda(x - z) \\ 2z = \lambda(-2x - y + 2z) \\ (x - z)(x + y - z) = 3 \end{cases}$$

の解である.これを解いて

$$(x, y, z) = \left(\pm \frac{\sqrt[4]{6}}{2}, \pm \frac{\sqrt[4]{6}(\sqrt{6} - 2)}{2}, \mp \frac{\sqrt[4]{6}}{2} \right).$$

問題５. (上の問題がすべて解けてなお解答用紙に余白のある人向け.)
以下の 2 条件を満たす,何回でも連続的微分可能な関数$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$を考える.
(1): fのn階導関数は$\left|f^{(n)}(x)\right| \leq (|x| + 1)^n$を満たす.
(2): 区間$[-1,1]$内に$f(x) = 0$となる点xが無限個存在する.
このとき,fは恒等的にゼロであることを示せ.

(解答)
まず次の補題を示す.

補題. 何回でも連続的微分可能な関数$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$に対し,区間$[a, b]$内に$f(x) = 0$となる点が無限個存在するならば,任意の自然数$n$に対して区間$[a, b]$内に$f^{(n)}(x) = 0$となる点が無限個存在する.

[証明] 条件より

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_k < \cdots < b \ \ , \ \ f(x_i) = 0 \ (i = 1,2, \cdots)$$

を満たす点列$(x_k)_{k=1}^{\infty}$をとることができる.Rolle の定理より,各iに対して$c_i \ (x_i < c_i < x_{i+1})$が存在して

$$a < c_1 < c_2 < \cdots < c_k < \cdots < b \ \ , \ \ f(c_i) = 0$$

が成り立つから,区間$[a, b]$内に$f'(x) = 0$となる点が無限個存在する.よって$n = 1$のとき題意は示された.

$n \geq 2$の場合も帰納的に示される. (Q.E.D.)

問題の証明に戻る.条件(2)より区間$[-1,1]$内に$f(x)=0$となる点xが無限個存在するから,区間$\left[-1,-\frac{2}{3}\right],\left[-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right],\left[-\frac{1}{3},0\right],\left[0,\frac{1}{3}\right],\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right],\left[\frac{2}{3},1\right]$の内少なくとも一つは$f(x)=0$となる点$x$を無限個有する.そのような区間の内一つを$[a,b]$ $\left(b=a+\frac{1}{3}\right)$としよう.区間$[a,b]$において$f$が恒等的にゼロであることを示す.背理法で示すため,ある点ξ_0において$f(\xi_0) \neq 0$とする.区間$[a,b]$の定義より,$f(\alpha_0)=0$かつ$\alpha_0 \neq \xi_0$となるα_0 $(a<\alpha_0<b)$が存在するから,平均値の定理より,あるξ_1がξ_0とα_0の間に存在して

$$\frac{f(\xi_0)}{\xi_0-\alpha_0}=f'(\xi_1)$$

$$\therefore |f'(\xi_1)|=\left|\frac{f(\xi_0)}{\xi_0-\alpha_0}\right|>\frac{|f(\xi_0)|}{|b-a|}=3|f(\xi_0)|.$$

補題より,$f'(\alpha_1)=0$かつ$\alpha_1 \neq \xi_1$となるα_1 $(a<\alpha_1<b)$が存在するから,再び平均値の定理より,あるξ_2がξ_1とα_1の間に存在して

$$\frac{f'(\xi_1)}{\xi_1-\alpha_1}=f''(\xi_2)$$

$$\therefore |f''(\xi_2)|=\left|\frac{f'(\xi_1)}{\xi_1-\alpha_1}\right|>\frac{|f'(\xi_1)|}{|b-a|}=3|f'(\xi_1)|>9|f(\xi_0)|.$$

補題は任意の自然数nで成り立つから,以下これを繰り返すと,ある$\xi_n \in [a,b]$に対して

$$\left|f^{(n)}(\xi_n)\right|>3^n|f(\xi_0)|$$

が成り立つことが分かる.$\xi_n \in [a,b] \subset [-1,1]$であるから,条件(1)より$\left|f^{(n)}(\xi_n)\right| \leq 2^n$となるはずだが,一方で$n>\log_{\frac{3}{2}}\frac{1}{|f(\xi_0)|}$のとき$\left|f^{(n)}(\xi_n)\right|>3^n|f(\xi_0)|>2^n$も成り立つ.これは矛盾である.よって区間$[a,b]$において$f$は恒等的にゼロである.

さて,区間$[a,b]$の外部の任意の点xでもfは恒等的にゼロであることを示す.$x>b$の場合を示そう.$M_n=\max\left\{|x|,b+\frac{n}{|x|+1}\right\}$とし,区間$I_n$を$I_n=[M_n,M_{n+1}]$で定める.ただし,$(|x|+1)(|x|-b)$以下の最大の整数を$N$として$0 \leq n \leq N$の範囲で考える.区間$I_0=[b,M_1]$で$f$が恒等的にゼロでないとすると,ある$\beta_0 \in (b,M_1)$が存在して$f(\beta_0) \neq 0$となる.平均値の定理より,ある$\beta_1 \in (b,\beta_0)$が存在して

$$\frac{f(\beta_0)}{\beta_0-b}=f'(\beta_1)\ (\because f(b)=0)$$

$$\therefore |f'(\beta_1)|=\left|\frac{f(\beta_0)}{\beta_0-b}\right|>(|x|+1)|f(\beta_0)|.$$

任意の自然数nに対して$f^{(n)}(b) = 0$だから,これを繰り返すと,ある$\beta_n \in (b, \beta_0)$に対して

$$\left|f^{(n)}(\beta_n)\right| > (|x|+1)^n |f(\beta_0)|$$

が成り立つことが分かる.$\mu = \max\{|b|+1, |\beta_0|+1\}$とおくと,$n > \log_{\frac{|x|+1}{\mu}} \frac{1}{|f(\beta_0)|}$のとき$\left|f^{(n)}(\beta_n)\right| > \mu^n > (|\beta_n|+1)^n$となって条件(1)に矛盾するから,区間$I_0$において$f$は恒等的にゼロである.以下同様に区間$I_1, I_2, \cdots, I_N$でも$f$は恒等的にゼロであることが示される.従って$f(x) = 0$を得る.$x < a$の場合も同様に示される.

以上より,任意の実数xに対して$f(x) = 0$. (Q.E.D.)

★かなり手こずってしまいました.この議論が正しいかどうかすらあまり自信がないです.もっとエレガントな証明を知っているという人は連絡ください.小澤先生の HP で公開されてる期末試験の解答を見ても第 5 問だけ触れてなかった….

～あとがき～

試験お疲れ様でした.何より,シケ対やってくれた人たち,本当にありがとうございました!無事に(?)試験期間を終えることができたのは,皆さんのおかげです.この場を借りて厚く御礼申し上げます.来学期もよろしくお願いします m(_ _)m

今学期最後の仕事ということで解答を作ってみたわけですが,論理的飛躍・不整合などあったら教えてください(特に第 5 問).

Alors, bonnes vacances de l'automne!

2009 年 9 月 21 日　　髙橋　一史