数学Ｉa 試験問題・解答（担当:山本昌宏）

1. 次の関数につき$\nabla f, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ：

$$f(x,y)=\frac{xy}{x+y}.$$

(解答)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y(x+y)-xy}{(x+y)^2}=\frac{y^2}{(x+y)^2}\quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x(x+y)-xy}{(x+y)^2}=\frac{x^2}{(x+y)^2}$$

$$\therefore \nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\left(\frac{y^2}{(x+y)^2},\frac{x^2}{(x+y)^2}\right).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^2}{(x+y)^2}\right)=-\frac{2y^2}{(x+y)^3}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{(x+y)^2}\right)=-\frac{2x^2}{(x+y)^3}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{(x+y)^2}\right)=\frac{2x(x+y)^2-x^2\cdot 2(x+y)}{(x+y)^4}=\frac{2xy}{(x+y)^3}.$$

★ちなみに,去年の 1 では

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

でした.

2. $D=\{(x,y); y\le x-2, x+y^2\le 4\}$とする。

$$\int\int_D x^2y^2dxdy$$

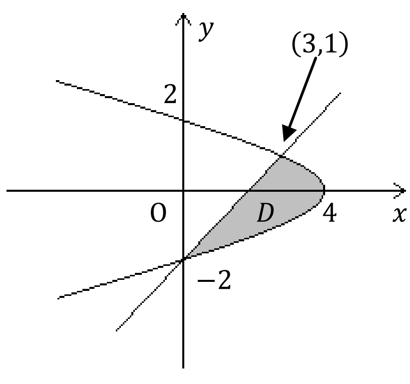
を求めよ。

(解答)

$D=\{(x,y)|-2\le y\le 1\,, y+2\le x\le 4-y^2\}$であるから

$$\iint_D x^2y^2dxdy=\int_{-2}^{1}\left(\int_{y+2}^{4-y^2}x^2y^2dx\right)dy=\int_{-2}^{1}y^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{y+2}^{4-y^2}dy$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-2}^{1}y^2((4-y^2)^3-(y+2)^3)dy=\frac{729}{70}.$$



★積分計算ですが,地道にやる以外の方法が分かりませんでした.結果を信用していただくために,計算過程を書いておきます:

$$\frac{1}{3}\int_{-2}^{1} y^2((4-y^2)^3-(y+2)^3)dy=\frac{1}{3}\int_{-2}^{1} y^2\big((64-48y^2+12y^4-y^6)-(y^3+6y^2+12y+8)\big)dy$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-2}^{1}(56y^2-12y^3-54y^4-y^5+12y^6-y^8)dy$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{56}{3}y^3-3y^4-\frac{54}{5}y^5-\frac{1}{6}y^6+\frac{12}{7}y^7-\frac{1}{9}y^9\right)\right]_{-2}^{1}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{56}{3}(1+8)-3(1-16)-\frac{54}{5}(1+32)-\frac{1}{6}(1-64)+\frac{12}{7}(1+128)-\frac{1}{9}(1+512)\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(168+45-\frac{1782}{5}+\frac{21}{2}+\frac{1548}{7}-57\right)=\frac{1}{3}\left(156-\frac{1782}{5}+\frac{21}{2}+\frac{1548}{7}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{10920-24948+735+15480}{70}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2187}{70}=\frac{729}{70}.$$

ちなみに,去年の 2 では

$$\iint_D x^2ydxdy$$

でした.指数が一つ違うと計算がこんなに複雑になるんですね.

3.

$$\int\frac{x}{x^4-1}dx$$

を求めよ。

(解答)

(解 1)

$$\int\frac{x}{x^4-1}dx=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}(\log|x-1|+\log|x+1|-\log(x^2+1))+C$$

$$=\frac{1}{4}\log\frac{|x^2-1|}{x^2+1}+C\ (C\text{:積分定数}).$$

(解 2) $x^2=t$とおくと

$$2xdx=dt$$

$$\therefore \int \frac{x}{x^4-1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{4}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{4}\log\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + C.$$

★解 2 のように$x^2 = t$と置換しておくと,部分分数分解がスムーズにできます.

ちなみに,去年の 3 は

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(1+x^2)}dx$$

でした.広義積分の問題が無くなってしまいましたね….

4. 次のべき級数の収束半径を求めよ。

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}(n^2+1)x^n$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n^2}x^{2n}$, ただし$r>0$は定数である。

(解答)

(i) $a_n = n^2+1$とすると,収束半径Rは

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n^2}} = 1.$$

(ii) $x^2 = t$とおき,$a_n = \frac{r^n}{n^2}$とすると,tの収束半径Rは

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{r^n}{n^2}\cdot\frac{(n+1)^2}{r^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{r}.$$

従って,与えられた級数は$|t| < \frac{1}{r}$のとき収束し,$|t| > \frac{1}{r}$のとき発散する.ここで

$$|t| < \frac{1}{r} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{r}} \quad , \quad |t| > \frac{1}{r} \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt{r}}$$

が成り立つから,収束半径の定義より,xの収束半径は$\frac{1}{\sqrt{r}}$.

★ちなみに,去年の 4 は

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^n$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n^2}x^{2n}$, ただし$r>0$は定数である。

でした.

5. $\sqrt{1-x^4}$のx^3までの項のマクローリン展開（$x=0$におけるテイラー展開）を求めよ。

(解答)

(解 1) $f(x)=\sqrt{1-x^4}$とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4x^3=2x^3(1-x^4)^{-\frac{1}{2}},$$

$$f''(x)=6x^2(1-x^4)^{-\frac{1}{2}}+2x^3\left(-\frac{1}{2}(1-x^4)^{-\frac{3}{2}}\cdot 4x^3\right)=(6x^2-10x^6)(1-x^4)^{-\frac{3}{2}},$$

$$f'''(x)=(12x-60x^5)(1-x^4)^{-\frac{3}{2}}+(6x^2-10x^6)\left(-\frac{3}{2}(1-x^4)^{-\frac{5}{2}}\cdot 4x^3\right)$$

$$=(12x-108x^5+72x^9)(1-x^4)^{-\frac{5}{2}}$$

よって,$x\approx 0$のとき

$$\therefore f(x)\approx f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(0)x^2+\frac{1}{6}f'''(0)x^3=1+0\cdot x+0\cdot x^2+0\cdot x^3=1.$$

(解 2) $f(x)=\sqrt{1-x}$とおくと,$x\approx 0$のとき

$$f(x)=f(0)+O(x)=1+O(x)$$
$$\therefore \sqrt{1-x^4}=f(x^4)=1+O(x^4)\approx 1.$$

★出題意図がよく分かりませんが,強いていえば解 1 のように解く人をちょっと苦しめるための問題,といったところでしょうか.

ちなみに,去年の 5 では

$$\sqrt{1-x^2}$$

でした.

6. 級数:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$$

を考える。

(i) 収束半径を求めよ。(ii) $f(x)$の満たす関係式を

$$x\frac{d^2f}{dx^2}(x)+a_1\frac{df}{dx}(x)+a_2f(x)=0$$

とおいて、定数a_1,a_2を決定せよ。関係式はどのようなxに対して成り立つかも吟味せよ。

(解答)

(i) $a_n=\frac{1}{(n!)^2}$とすると,収束半径Rは

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left((n+1)!\right)^2}{(n!)^2}=\lim_{n\to\infty}(n+1)^2=\infty.$$

(ii) (i)より,$f(x)$は$^\forall x\in\mathbb{R}$で何回でも項別微分可能であるから

$$\frac{df}{dx}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{(n!)^2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n!)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!\,n!}$$

が成り立つ.ここで,$n\to n+1$と置き換えると

$$\frac{df}{dx}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!\,(n+1)!}.$$

同様に

$$\frac{d^2f}{dx^2}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!\,(n+1)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!\,(n+1)!}.$$

これらを

$$x\frac{d^2f}{dx^2}(x)+a_1\frac{df}{dx}(x)+a_2f(x)=0$$

に代入すると

$$x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!\,(n+1)!}+a_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!\,(n+1)!}+a_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!\,(n+1)!}\left(n+a_1+a_2(n+1)\right)=0.$$

これが$^\forall x\in\mathbb{R}$で成り立つから

$$n+a_1+a_2(n+1)=0$$

$$\therefore a_1=1\,,a_2=-1.$$

この関係式は$^\forall x\in\mathbb{R}$で成り立つ.

★べき級数は,収束半径の内部では何回でも項別微分可能です.今回は収束半径が∞だったので,$^\forall x\in\mathbb{R}$で何回でも項別微分可能というわけです.a_1とa_2の値を求める過程で,xの値を制限する必要は生じませんから,題意の関係式が成り立つのは$^\forall x\in\mathbb{R}$となります.

ちなみに去年の 6 は,級数

$$f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n(n-1)}$$

の収束半径を計算し,収束半径の内部で$f(x)$を決定させる,というものでした.

7. $\gamma>0$とする。かってな$R>0$に対して、次の級数が$|x|\le R$に対して一様かつ絶対収束するようなγの範囲を求めよ。

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^\gamma}.$$

(解答)

$\gamma > 1$のとき,任意に$R > 0$をとると

$$\left|(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^\gamma}\right| = \frac{|\cos nx|}{n^\gamma} \le \frac{1}{n^\gamma}\ ({}^\forall x \in [-R, R]\,, {}^\forall n)$$

であって,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\gamma} < \infty$$

であるから,Weierstrass の M-テストより,与えられた級数は$|x| \le R$に対して一様絶対収束する.

一方,$0 < \gamma \le 1$のとき,たとえば$x = \pi$において

$$\sum_{n=1}^{N}\left|(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^\gamma}\right| = \sum_{n=1}^{N}\frac{|\cos n\pi|}{n^\gamma} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^\gamma} \to \infty\ (N \to \infty)$$

であるから,絶対収束しない.

以上より,求めるγの範囲は

$$\gamma > 1.$$

★無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\gamma}$$

の収束,発散については,証明なしで用いて構わないと思います.

ちなみに去年の 7 は,任意の$R > 0, r > 0$に対し,$|x| \le R$において級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}\sin^{4n}x}{n!}$$

が一様絶対収束することを示す,というものでした.

8. 次の曲線の長さを求めよ。

$$x = a\cos^3 t\,,\ \ y = a\sin^3 t\,,\ \ 0 \le t < 2\pi.$$

ただし$a > 0$は定数である。

(解答)

(解 1) 求める曲線長をsとすると

$$s = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_0^{2\pi}\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2 + (3a\sin^2 t\cos t)^2}dt$$

$$= \int_0^{2\pi}\sqrt{9a^2\cos^2 t\sin^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t)}dt = 3a\int_0^{2\pi}|\cos t\sin t|dt.$$

ここで$\cos t \sin t = \frac{1}{2}\sin 2t$であって,

$$\sin 2t > 0 \Leftrightarrow 0 < t < \frac{\pi}{2}, \pi < t < \frac{3}{2}\pi,$$

$$\sin 2t < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < t < \pi, \frac{3}{2}\pi < t < 2\pi$$

であるから

$$s = \frac{3}{2}a\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2t\,dt + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin 2t\,dt - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \sin 2t\,dt\right)$$

$$= \frac{3}{2}a\big(1 - (-1) + 1 - (-1)\big) = 6a.$$

(解 2) 題意の曲線をCとする.$(x, y) \in C$のとき,対応するtの値を

$$0 < t < \pi \text{のとき} t \to \pi - t \quad , \quad \pi < t < 2\pi \text{のとき} t \to 3\pi - t$$

と置き換えると

$$x = a\cos^3 t \to a\cos^3(\pi - t) = -a\cos^3 t = -x,$$
$$y = a\sin^3 t \to a\sin^3(\pi - t) = a\sin^3 t = y$$

であるから$(-x, y) \in C$.同様に

$$t \to 2\pi - t$$

と置き換えると

$$x = a\cos^3 t \to a\cos^3(2\pi - t) = a\cos^3 t = x,$$
$$y = a\sin^3 t \to a\sin^3(2\pi - t) = -a\sin^3 t = -y$$

であるから$(x, -y) \in C$.従ってCはx軸,y軸に関して対称であるから,求める曲線長をsとすると

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-3a\cos^2 t \sin t)^2 + (3a\sin^2 t \cos t)^2}\,dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^2 t \sin^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt = 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \sin t\,dt$$

$$= 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt = 6a.$$

★対称性を用いないと,解 1 のように場合分けが必要となります.対称性を用いた解答は,解 2 のようになります.念のため対称性を式で示しておきましたが,実際には答案に書かなくても大丈夫だと思います.

ちなみに去年の 8 は,極座標表示で与えられた曲線

$$x = a\sin^3\frac{\theta}{3},\ \ a > 0,\ \ 0 \leq \theta < 3\pi$$

の長さを求める,というものでした.

～あとがき～

相変わらずの試験です.というか,ほとんどが去年の問題に少し手を加えただけですね.そしてやっぱりタイトルは「Ia」です.たぶん次の図式が成り立つことでしょう(笑):

$$\text{易} \qquad \leftrightarrow \qquad \text{難}$$
$$\mathrm{Ia} < \mathrm{IB} < \mathrm{IA} < \text{あべのりさん}$$

間違いや質問などありましたら,お知らせください.

2010 年 2 月 13 日　　髙橋　一史