力学シケプリ

非慣性系における運動

慣性力とかについて簡単にまとめましたが, 多分導出をそんなに細かく覚えておく必要はないと思います. そもそも過去問を見ると, 慣性力を扱った出題自体, 一つも見当たらないです. ……するとこのシケプリの価値があんまりないんですが.

1 章が導出, 2 章が慣性力自体についての説明になっています. 必要なところだけ読んで下さい. お急ぎの方は 2.3（最終ページ）だけ読んでおけばいいと思います. 実際, それで充分です.

1 慣性力の導出

慣性力の導出について, つらつらと書いています. 一応, 講義でやったのと同じ方法でやっています.

■ベクトルの一致について 以下では, たとえば回転はあるが原点移動がない場合に, $\vec{r}=\vec{r}'$ といった式が出てきます. ここでの等号は, 例えば北を向いている人が東を指しても, 南を向いている人が東を指しても, 指し示す方向は同じだということです. このとき, "それぞれから見た" ベクトルの**成分**は異なる, ということに注意してください. 北を向いている人にとっては東は右側だが, 南を向いている人にとっては東は左側だということです. 単純なことなんですが, 等号 '=' が何を意味しているのかしっかり把握しておかないと混乱のもとになりかねないので, 注意してください.

■外積 以下の説明では外積がでてきます. 一応外積の定義を今一度載せておきます.

$\vec{A}\times\vec{B}$ はベクトルで, $\vec{A}$ を $\vec{B}$ に向けて（近い方から）回転させたときに右ねじが進む方を向き, 大きさは $\vec{A}$ と $\vec{B}$ の掃く平行四辺形の面積 $\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta$ (θ は二つのベクトルのなす角) に等しい. 成分表示すると,

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{pmatrix}A_yB_z-B_yA_z\\A_zB_x-B_zA_x\\A_xB_y-B_xA_y\end{pmatrix}$$

また, 交換法則は成り立ちません.

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$

また単位ベクトル同士の外積について,

$$\begin{aligned} &\vec{e}_x \times \vec{e}_x = 0 && \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z && \vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y \\ &\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z && \vec{e}_y \times \vec{e}_y = 0 && \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x \\ &\vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y && \vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x && \vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0 \end{aligned}$$

右ねじ回せばすぐ求められるので覚えなくてもいいですけど.

■角速度ベクトル　角速度ベクトル $\vec{\omega}$ なんてのが出てきます. 角速度ベクトルとは, 回転を数学的に表すための手段の一つです. 向きは回転軸の向き, 大きさは回転の角速度とすることになっています. さらに回転方向をあらわすため, 回転に対して右ねじの進む向きを向く, と決められています. たとえば時計の角速度ベクトルは, 奥向きで大きさ $\frac{2\pi}{60*60}$ rad/s です.

1.1　$\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\delta\vec{A}}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{A}$ の導出

これは非回転系での微分と回転系での微分を結びつける式です. 以下, 静止系を Σ, 回転系を Σ' とします.

まず記号の説明からします.

$$\frac{\delta\vec{A}}{\delta t} \equiv \frac{\mathrm{d}A'_x}{\mathrm{d}t}\vec{e}\,'_x + \frac{\mathrm{d}A'_y}{\mathrm{d}t}\vec{e}\,'_y + \frac{\mathrm{d}A'_z}{\mathrm{d}t}\vec{e}\,'_z$$

これはただの略記号です. 別に微少量が観測者によって d だったり δ だったりするわけではありません. A'_x, A'_y, A'_z は 回転系 Σ' の単位ベクトル $\vec{e}\,'_x$, $\vec{e}\,'_y$, $\vec{e}\,'_z$ に基づく $\vec{A}$ の成分です. 簡単に言えば Σ' から見たときの $\vec{A}$ の成分です. つまり, $\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z = A'_x\vec{e}\,'_x + A'_y\vec{e}\,'_y + A'_z\vec{e}\,'_z$ ということです.

ここで, 任意のベクトル $\vec{x}$ について, それが大きさ（半径）を変化させず角速度 $\vec{\omega}$ で回転しているとき,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{x}$$

が成り立つことを説明します.

たとえば $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ であるとします. $\vec{x}$ は大きさを変えずに角速度 ω で回転しているので, $\vec{x} = \cos\omega t\,\vec{e}_x + \sin\omega t\,\vec{e}_y + z_0\vec{e}_z$ となります. z_0 は定数です. このとき,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = -\sin\omega t\,\vec{e}_x + \cos\omega t\,\vec{e}_y$$

になります．また，

$$\begin{aligned}\vec{\omega}\times\vec{x} &= \cos\omega t\vec{e}_x\times\vec{e}_z+\sin\omega t\vec{e}_y\times\vec{e}_z+z_0\vec{e}_z\times\vec{e}_z \\ &= -\cos\omega t\vec{e}_y+\sin\omega t\vec{e}_x\end{aligned}$$

以上から，$\vec{x}$ の微分と，$\vec{\omega}\times\vec{x}$ が等しくなります．

$$\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=\vec{\omega}\times\vec{x}$$

今は回転軸が z 軸である場合でしたが，そうでない場合も基本的に同じことです．また，角速度が変化する場合ですが，$\omega t\to\int_0^t\omega\,\mathrm{d}t$ とすれば同じ結果になります．

念のため，微分が外積であると回転を意味する，ということを感覚的に説明しておきます．たとえば等速円運動での位置ベクトル，速度ベクトルのように，微分がベクトルの向きに垂直であることは，向きを変化させるという意味があります．外積 $\vec{\omega}\times\vec{x}$ は，$\vec{x}$ に垂直だから $\vec{x}$ を回転させ，また回転軸 $\vec{\omega}$ に垂直だからこの軸まわりの回転を表します．

以上から，目的の式を導けます．講義でやった通り，単位ベクトルに上を適用して，その後それを $\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$ に代入するだけです．

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}'_x}{\mathrm{d}t}=\omega\times\vec{e}'_x\quad\frac{\mathrm{d}\vec{e}'_y}{\mathrm{d}t}=\omega\times\vec{e}'_y\quad\frac{\mathrm{d}\vec{e}'_z}{\mathrm{d}t}=\omega\times\vec{e}'_z$$

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A'_x\vec{e}'_x+A'_y\vec{e}'_y+A'_z\vec{e}'_z \\ \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}A'_x}{\mathrm{d}t}\vec{e}'_x+\frac{\mathrm{d}A'_y}{\mathrm{d}t}\vec{e}'_y+\frac{\mathrm{d}A'_z}{\mathrm{d}t}\vec{e}'_z+A'_x\frac{\mathrm{d}\vec{e}'_x}{\mathrm{d}t}+A'_y\frac{\mathrm{d}\vec{e}'_y}{\mathrm{d}t}+A'_z\frac{\mathrm{d}\vec{e}'_z}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}A'_x}{\mathrm{d}t}\vec{e}'_x+\frac{\mathrm{d}A'_y}{\mathrm{d}t}\vec{e}'_y+\frac{\mathrm{d}A'_z}{\mathrm{d}t}\vec{e}'_z+A'_x\omega\times\vec{e}'_x+A'_y\omega\times\vec{e}'_y+A'_z\omega\times\vec{e}'_z \\ &= \frac{\delta\vec{A}}{\delta t}+\omega\times\vec{A}\end{aligned}$$

次にこの式の感覚的な説明をしてみます．とりあえず次のように移項してみます．

$$\frac{\delta\vec{A}}{\delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}-\vec{\omega}\times\vec{A}$$

簡単に言ってしまうと，角速度 $\vec{\omega}$ で回転している観測者からは，物質が反対方向への回転（$-\vec{\omega}$ で表される回転）をしているように見える，ということです．先に示したように，角速度 $\vec{\omega}$ で回転しているベクトルについて $\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}=\omega\times\vec{A}$ が成り立ちます．これと同じことで，今話題にしている回転系では，全てのベクトルが $-\vec{\omega}$ で回転しているように見えるので $\dfrac{\delta\vec{A}}{\delta t}=-\omega\times\vec{A}$，さらにここにベクトル自体の変化 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$ を付け加えて，$\dfrac{\delta\vec{A}}{\delta t}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}-\omega\times\vec{A}$ ということです．

■原点移動と位置ベクトル $\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$ を "慣性系から見た微分" などと覚えるのは, あんまりよくないかもしれないです．というのは, 後で $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}$ とかが出てくるので, 「相対座標 $\vec{r}'$ を慣性系から見て微分？」とかで意味わかんなくなるかもしれないからです（ならなかったらすみません）．

式 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\delta\vec{A}}{\delta t} + \vec{\omega}\times\vec{A}$ の左辺の $\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$, 右辺の $\dfrac{\delta\vec{A}}{\delta t}$ は, あくまで定義に従いベクトルの微小変化率を表したものに過ぎません．そしてその微小変化率が回転している人から見ると違って見える, ということです．$\vec{r}$ にしろ $\vec{r}'$ にしろ, どの観測者であってもそのベクトルを自分のとこに持ってきて微小変化率を論じる, ということです．だから敢えて言えば, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}$ は非回転系における微分, $\dfrac{\delta\vec{A}}{\delta t}$ は回転系における微分, といった感じです.

なので, もし「どこから見た微分なのか」ということがどうしても気になるならば, たとえば $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ であれば慣性系での微分, $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}$ ならば移動している非回転非慣性系からの微分, $\dfrac{\delta\vec{r}}{\delta t}$ ならば回転だけしている回転非慣性系からの微分, $\dfrac{\delta\vec{r}'}{\delta t}$ ならば移動も回転もしている回転非慣性系からの微分, とでも思ってください.

1.2 非慣性系における運動方程式

ニュートンの運動方程式 $\vec{F} = m\vec{a}$ が成り立つのは, 慣性系だけです．そこで, 代わりに非慣性系ではどのような式を成り立つのかを考えます．まず, 非慣性系における速度, 加速度と, 慣性系における速度, 加速度の関係を求め, それを運動方程式に代入します.

1.2.1 回転しているが原点が移動していない場合

まず回転しているが原点移動がない場合だけ考えます．角速度を $\vec{\omega}$ とします.

まず, 位置ベクトル $\vec{r}$ には変化がありません.

$$\vec{r} = \vec{r}'$$

再三述べますが, これは決してそれぞれから見た成分が一致するという意味ではないので注意してください.

次に, 速度ベクトルを考えます.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} + \vec{\omega}\times\vec{r}\\ &= \frac{\delta\vec{r}'}{\delta t} + \vec{\omega}\times\vec{r}'\end{aligned}$$

$$\therefore \vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

これは上の式をそのまま適用するだけです.

最後に加速度です.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\delta\vec{r}\,'}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\delta\vec{r}\,'}{\delta t}\right) + \frac{\mathrm{d}(\vec{\omega} \times \vec{r}\,')}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\delta\vec{r}\,'}{\delta t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \left(\frac{\delta^2\vec{r}\,'}{\delta t^2} + \vec{\omega} \times \frac{\delta\vec{r}\,'}{\delta t}\right) + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \left(\frac{\delta\vec{r}\,'}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right) \\
&= \frac{\delta^2\vec{r}\,'}{\delta t^2} + 2\vec{\omega} \times \frac{\delta\vec{r}\,'}{\delta t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')
\end{aligned}$$

$$\therefore \vec{a} = \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

よって運動方程式 $m\vec{a} = F$ に代入した, 以下の方程式が成り立ちます.

$$m\vec{a}\,' = \vec{F} + 2m\vec{v}\,' \times \vec{\omega} - m\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}\,' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

（回転しているが移動していない観測者の運動方程式）

注：外積は項の順序を変えると符号が逆転します.

1.2.2 原点移動も回転もする場合

ちょっと授業とびみょうに違う路線でいってみます.

3 つの観測者を考えます. 慣性系観測者 Σ, 移動する観測者 X, そして “X とともに移動しながら” 回転する観測者 Y です.

X と Y の間には原点のずれはありません. また, X は回転していません. そこで, 先に求めた, 非回転系と回転系の間の座標, 速度, 加速度の変換式, あれが, X と Y の間に適用

できます.

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_{\mathrm{X}} &= \vec{r}_{\mathrm{Y}} \\
\vec{v}_{\mathrm{X}} &= \vec{v}_{\mathrm{Y}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{Y}} \\
\vec{a}_{\mathrm{X}} &= \vec{a}_{\mathrm{Y}} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\mathrm{Y}} + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}_{\mathrm{Y}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{Y}})
\end{aligned}
$$

また, 慣性系 Σ から見た観測者 X の原点の位置ベクトルを $\vec{R}$ とすれば, Σ と X の間に高校物理でやった通りの次の関係が成り立ちます.

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{r}_{\mathrm{X}} + \vec{R} \\
\vec{v} &= \vec{v}_{\mathrm{X}} + \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} \\
\vec{a} &= \vec{a}_{\mathrm{X}} + \frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}
$$

よって, 慣性系 Σ と, 原点移動 + 回転をしている非慣性系 Y を結びつける式は, 以下の通りになります. ($\vec{r}_{\mathrm{Y}} \to \vec{r}\,'$, $\vec{v}_{\mathrm{Y}} \to \vec{v}\,'$, $\vec{a}_{\mathrm{Y}} \to \vec{a}\,'$ と書き換えました)

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= \vec{r}\,' + \vec{R} \\
\vec{v} &= \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} \\
\vec{a} &= \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')
\end{aligned}
$$

以上から, 一般の非慣性系における運動方程式は以下のようになります.

$$
\boxed{m\vec{a}\,' = \vec{F} + 2m\vec{v}\,' \times \vec{\omega} - m\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}\,' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') - m\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2}}
$$

2　慣性力

上の式での右辺の $\vec{F}$ 以外の項を, 見かけ上の力, とか, 慣性力, とか言います.

$2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$	: コリオリ力
	: 観測者から見て物体が運動しているときに生じます.
$m\left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right) \times \vec{\omega}$	: 遠心力
	: 観測者から見て物体が原点にないときに生じます.
$-m\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}'$	: *Euler force*, or *azimuthal acceleration*
	: 回転軸か角速度が変化するときに生じるます.
	: 普通, 定回転を扱うので考える必要はないです.
$-m\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2}$	: 並進力？
	: 観測者が加速度運動をしているときに生じます.

無駄に一般化して, 回転に伴う慣性力と移動に伴う慣性力をまとめて扱いましたが, 普通の問題ではどっちかだけなんで, あんまり両方並べる意味はないとは思いますが…….

2.1　コリオリ力

$$\vec{f}_{\mathrm{Coriolis}} = 2m\vec{v}' \times \vec{\omega}$$

回転軸に垂直な平面上で働きます. 大きさは相対速度ベクトルの, その平面内の成分に比例します.

z 軸まわりの回転（$\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z'$）のときは,

$$\vec{f}_{\mathrm{Coriolis}} = 2mv_y'\omega\vec{e}_x' - 2mv_x'\omega\vec{e}_y'$$

またこのとき, コリオリ力は進行方向右側を向きます（$\vec{v}'$ を z 軸に向けて回転させたときに右ねじが進む向きです）.

一般に, コリオリ力の向きは, 上（角速度ベクトル $\vec{\omega}$ のさきっちょ側）から見て進行方向右向きです.

地球はちょうど北極側が角速度ベクトルの先っぽになるような回転をしているので, 北半球では進行方向右側, 南半球では進行方向左側を向きます.

2.2　遠心力

$$\vec{f}_{\text{centrifugal}} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

ベクトル三重積の公式が適用できて,

$$\begin{aligned} &= -m\left\{(\vec{\omega}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{\omega} - (\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})\,\vec{r}\,'\right\} \\ &= -m\left\{(\vec{\omega}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{\omega} - \omega^2\vec{r}\,'\right\} \\ &= m\omega^2\vec{r}\,' - m\,(\vec{\omega}\cdot\vec{r}\,')\,\vec{\omega} \end{aligned}$$

項が二つあって複雑なようですが, たとえば z 軸まわりの回転（$\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z\,'$）のときは,

$$\begin{aligned} \vec{f}_{\text{centrifugal}} &= m\omega^2(x'\vec{e}_x\,' + y'\vec{e}_y\,' + z'\vec{e}_z\,') - m\omega^2 z'\vec{e}_z\,' \\ &= m\omega^2 x'\vec{e}_x\,' + m\omega^2 y'\vec{e}_y\,' \end{aligned}$$

このように, 回転軸に垂直な平面上で働くことがわかります.

一般に, 質点の回転軸からの距離（原点からの距離でないことに注意）を r とすれば, 遠心力の大きさは,

$$f_{\text{centrifugal}} = m\omega^2 r$$

2.3　z 軸のまわりを回転している観測者

長々と一般的な話をしてきましたが, 実際に問題に出る場合は大抵回転軸は z 軸だろうし, 回転と原点移動が同時に行われることもないだろうし, 角速度が変化することもないだろうし, おまけに大抵は xy 平面上の運動であろうから, 運動方程式はもっと具体的な形で記述できます.

すなわち, 角速度が ω で z 軸まわりの定回転をしている観測者が, 運動が xy 平面上のみに限られる質点を観察したときの運動方程式は,

$$\boxed{\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2} &= F_x' + m\omega^2 x - 2\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\omega \\ m\frac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2} &= F_y' + m\omega^2 y + 2\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\omega \end{aligned}}$$

結局, これだけ覚えとけばいいと思います.