力学ノート

理科一類 33 組

※明らかに既知と思われるところ (ベクトルの和とか) は除いてます.
※ところどころ補足入れてます. 間違ったこと書いていたらすみません.

※図はめんどいのではしょりまくってます.

2 運動の記述

2.1 スカラーとベクトル

スカラー 大きさのみを持つ量

ベクトル 大きさと向きを持つ量

2.2 ベクトルの演算

ベクトルのスカラー積 (内積)

$$(\text{ベクトル}) \cdot (\text{ベクトル}) = (\text{スカラー})$$

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \cos\theta \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned}$$

ベクトルのベクトル積 (外積)

$$(\text{ベクトル}) \times (\text{ベクトル}) = (\text{ベクトル})$$

$$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right| \left|\vec{B}\right| \sin\theta$$

向きは $\vec{A}, \vec{B}$ と直行する向きで, かつ $\vec{A}$ を $\vec{B}$ に向けて回転させたときに, 右ねじの進む向き.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

2.3 次元と単位系

- 基本的な次元
  - 長さ [L]
  - 時間 [T]
  - 質量 [M]

- SI 単位系
  - 時間 s(秒) 原子時計
  - 長さ m(メートル) 1/299792458 秒に光が進む距離
  - 質量 kg(キログラム) キログラム原器

2.4 質点の運動

質点→大きさをもたない.

- 時間 t [T]
- 質量 m [M]
- 位置 $\vec{r}(t)$ [L]
- 速度 $\vec{v}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}$ [LT^{-1}]
- 加速度 $\vec{a}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}$ [LT^{-2}]

3 ニュートンの運動法則

1. 慣性の法則
   全ての物体は, 力が働かなければ静止したままか,
   直線上を同じ速度で運動し続ける→慣性系の定義
2. 運動方程式
   運動量の変化は物体に働く力に等しい
   $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} = F$
3. 作用・反作用の法則
   全ての力に対して向きが反対で大きさが同じ力が存在する

微分方程式としての運動方程式

力 $\vec{F}$ が $\vec{r}, \vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, t$ の関数 → 運動方程式は微分方程式になる

$$
\begin{aligned}
& m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}(\vec{r}, \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, t) \\
\iff & \vec{F}(\vec{r}, \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}, t) - m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = 0
\end{aligned}
$$

微分方程式の解の存在と一意性の定理

→ （ある比較的ゆるやかな条件の下で）微分方程式には解が存在し,
初期条件を与えれば解は一意的（ただ一つ）である.

運動方程式が微分方程式 → **古典的因果律**

(過去の状態から未来の状態が非確率的に決定されること)

初期条件：時間 t_0, 位置 $\vec{r}(t_0)$, 速度 $\vec{v}(t_0) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(t_0)$

4　1次元の運動の解析

※編注：微分方程式など, 数学部分だけ全部まとめて最初にもってきました.

4.0　数学の準備

4.0.1　テイラー展開

関数 $y = f(x)$ について, $f(a+x)$ は次のように表せる.

$$
\begin{aligned}
f(a+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{f}^{(n)}(a)}{n!} x^n \\
&= f(a) + f'(a)x + \frac{1}{2} f''(a)x^2 + \frac{1}{6} f'''(a)x^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

これを $x = a$ における**テイラー展開**と呼ぶ. 特に $a = 0$ のとき, マクローリン展開といったりする.

$$
\begin{aligned}
\text{ex)} \quad e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

4.0.2　複素数の関数とオイラーの公式

実数関数→複素数関数への拡張

指数関数のテイラー展開 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ を逆に複素数の指数関数の定義に.

$$
e^z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n
$$

指数法則, 及び微分 $\dfrac{\mathrm{d}e^z}{\mathrm{d}z} = e^z$ など実数の指数関数が持つ性質がそのままあてはまる.
特に $z = i\theta$ のとき,

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (i\theta)^n \\
&= 1 + i\theta - \frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{6}i\theta^3 \cdots
\end{aligned}
$$

ところで $\cos\theta, \sin\theta$ のテイラー展開は,

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \cdots$$
$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \cdots$$

よって, 以下の式が成り立つ.

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

これを**オイラーの公式**という. **関数** $e^{i\theta}$ **は周期** 2π **をもつ**.
さらに以下の 2 式が成り立つ.

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

おまけ

$$\cosh\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} \quad \rightarrow \quad \cos i\theta = \cosh\theta$$
$$\sinh\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} \quad \rightarrow \quad \sin i\theta = i\sinh\theta$$

4.0.3 (定係数) 線形微分方程式

文字 x を t による関数として考える.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + bx = R(t) \qquad (*)$$

これを 2 階の定係数**線形微分方程式**という.

線形微分方程式
$\rightarrow$ $x_1(t), x_2(t)$ が解なら, その線形結合 $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$ も解となる.

一般的な二階線形微分方程式では, 定数を二つ含むものが一般解（あらゆる初期条件に対応した解）.

- $a = b = 0$ のとき.

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = R(t)$$
$$v = v_0 + \int_0^t R(t')\,\mathrm{d}t'$$
$$x = x_0 + v_0t + \int_0^t\int_0^{t'} R(t'')\,\mathrm{d}t''\,\mathrm{d}t'$$

- $b = 0, R(x) = c$ (const) のとき.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -av + c \\
&= -a\left(v - \frac{c}{a}\right) \\
\frac{\mathrm{d}v}{v - \frac{c}{a}} &= -a\mathrm{d}t \\
\int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}v}{v - \frac{c}{a}} &= -\int_0^t a\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \log\left|\frac{v - \frac{c}{a}}{v_0 - \frac{c}{a}}\right| &= -at \\
\left|\frac{v - \frac{c}{a}}{v_0 - \frac{c}{a}}\right| &= e^{-at}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore v &= \frac{c}{a} + (v_0 - \frac{c}{a})e^{-at} \qquad (e^{-at} > 0 \text{ より絶対値がとれる}) \\
x &= x_0 + \frac{c}{a}t - \frac{av_0 - c}{a^2}e^{-at}
\end{aligned}$$

  $R(x)$ が一般の関数のときは, $c = 0$ とした斉次方程式の一般解 $x = C_1 + C_2 e^{-at}$ を, 特殊解と足し合わせる (後述).

- $a = R(x) = 0$ のとき.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + bx &= 0 \\
\iff \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \pm \omega^2 x &= 0 \qquad (\omega = \sqrt{|b|})
\end{aligned}$$

  二階微分して形が同じになる → 指数関数 or 三角関数 (or 双曲線関数).

  (i) $b < 0$ のとき. 三角関数 $\cos\omega t, \sin\omega t$ が解 → 一般解はその線形結合で,

$$x(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$$

  (ii) $b > 0$ のとき. 指数関数 $e^{\omega t}, e^{-\omega t}$ が解 → 一般解はその線形結合で,

$$x(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$$

  双曲線関数 $\cosh\omega t, \sin\omega t$ でも ok. （ただし物理的意味は分かりづらい）

- 一般の斉次方程式
  斉次方程式 $\to R(x)=0$.

$$\text{特性方程式：}\lambda^2+a\lambda+b=0 \tag{**}$$

  (i) (**) が解を 2 つ持つとき．（実数・複素数は問わない）
  その 2 つの解を α_1, α_2 とすれば, 微分方程式の一般解は,

$$\boxed{x(t)=C_1e^{\alpha_1 t}+C_2e^{\alpha_2 t}}$$

  (ii) (**) が解を一つだけ持つとき.
  その解を α とすれば,

$$\boxed{x(t)=C_1e^{\alpha t}+C_2te^{\alpha t}}$$

  ともに代入することで確かめられる.

- 非斉次方程式の場合

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+bx=R(x) \tag{*}$$

  1. まず対応する以下の斉次方程式の一般解 $x_o(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)$ を求める.
  $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+a\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+bx=0$$
  2. 次に非斉次微分方程式 (*) の特殊解 (任意定数を含まない解) $x_s(t)$ をとにかく一つ求める．この解は特定の初期条件を満たす必要はない.
  3. すると(*) の**一般解は** $x_o(t)$ **と** $x_s(t)$ **の和**になる.
  $$\boxed{\begin{aligned}x(t)&=x_s(t)+x_o(t)\\&=x_s(t)+C_1x_1(t)+C_2x_2(t)\end{aligned}}$$

  式 (*) に代入することで確かめられる．(*) の特殊解 $x_s(t)$ の見つけ方は, 周期性に着目する方法などがある.

4.1 抵抗のある場合の落下運動

鉛直下向きを正とする．速度に比例する抵抗が働く場合を考える．比例定数を $m\gamma$ とする.

$$F=\underset{\text{重力}}{mg}\ \underset{\text{抵抗力}}{-mr\gamma v}$$

$$\text{運動方程式}\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{F}{m}=g-\gamma v$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= g - \gamma v \\
&= -\gamma \left(v - \frac{g}{\gamma} \right) \\
\iff \frac{1}{v - \frac{g}{\gamma}} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= -\gamma
\end{aligned}
$$

$$
\int_{v_0}^{v} \frac{1}{v - \frac{g}{\gamma}} \, \mathrm{d}v = -\gamma t
$$

$$
\begin{aligned}
\iff \quad & \log \left| v - \frac{g}{\gamma} \right| - \log \left| v_0 - \frac{g}{\gamma} \right| = -\gamma t \\
\iff \quad & \left| v - \frac{g}{\gamma} \right| = \left| v_0 - \frac{g}{\gamma} \right| e^{-\gamma t} \\
\iff \quad & v - \frac{g}{\gamma} = \pm \left(v_0 - \frac{g}{\gamma} \right) e^{-\gamma t}
\end{aligned}
$$

初期条件 $t = 0 \Rightarrow v = v_0$ より, 負の解は捨てられて,

$$
\begin{aligned}
v - \frac{g}{\gamma} &= \left(v_0 - \frac{g}{\gamma} \right) e^{-\gamma t} \\
\iff v &= \frac{g}{\gamma} + \left(v_0 - \frac{g}{\gamma} \right) e^{-\gamma t}
\end{aligned}
$$

$t \to \infty$ で $v \to \dfrac{g}{\gamma}$ である. この値を終端速度という.

$v_0 = 0$ であるとする. v の指数関数部分の二次までのテイラー展開を考えると, 各項はおおよそ以下のような意味になる.

$$
\begin{array}{ccccc}
v & = & \frac{g}{\gamma} & - & \frac{g}{\gamma} e^{-\gamma t} \\
 & = & \frac{g}{\gamma} & - & \frac{g}{\gamma} \left(1 - \gamma t + \frac{1}{2} \gamma^2 t^2 + O(t^3) \right) \\
 & = & gt & - & \frac{1}{2} \gamma g t^2 + O(t^3) \\
 & & \text{自由落下} & & \text{自由落下からのずれ}
\end{array}
$$

4.2 振動

4.2.1 単振動

壁からのびたばねにつながれた物体の運動を考える. ばね定数を $k(> 0)$ とする.

$$
\begin{aligned}
F &= -kx \\
a &= \frac{F}{m} = -\frac{k}{m} x
\end{aligned}
$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

$\cos\omega_0 t, \sin\omega_0 t$ がこの解となるから, 一般解は,

$$x(t) = C\cos\omega_0 t + D\sin\omega_0 t$$

さらに初期条件 $x(0) = x_0,\ \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = v_0$ より,

$$\begin{aligned} x_0 &= C \\ v_0 &= \omega_0 D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad x(t) &= x_0\cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t \\ &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}\cos(\omega_0 t + \theta) \qquad (\text{ただし } \theta = -\tan^{-1}\frac{v_0}{\omega_0 x_0}) \\ &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}\sin(\omega_0 t + \varphi) \qquad (\text{ただし } \varphi = \tan^{-1}\frac{\omega_0 x_0}{v_0},\ \varphi = \frac{\pi}{2} + \theta) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccl} \text{角振動数} & : & \omega_0 & & \\ \text{振動数} & : & \nu & = & \frac{\omega_0}{2\pi} \\ \text{周期} & : & T & = & \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{\nu} \\ \text{振幅} & : & A & = & \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \end{array}$$

4.2.2 減衰振動

床との間に, 物質の速度に比例する抵抗が働いている場合を考える. 比例定数を $m\gamma$ とする.

$$\begin{aligned} F &= -kx - m\gamma v \\ a &= -\frac{k}{m}x - \gamma v \end{aligned}$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおくと,

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0 \tag{*}$$

次の特性方程式を考える.

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{**}$$

- $\gamma^2 - 4\omega_0^2 \neq 0$ のとき, (**) の解は以下の二つ.

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\frac{\gamma}{2} + \left(\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
\lambda_2 &= -\frac{\gamma}{2} - \left(\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

これより, 微分方程式 (*) の一般解は以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \\
v(t) &= C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}
\end{aligned}
$$

初期条件 $x(0) = x_0, v(0) = v_0$ より, 次の連立方程式が得られる.

$$
\begin{cases}
C_1 + C_2 &= x_0 \\
C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 &= v_0
\end{cases}
$$

$$
\therefore \quad (C_1, C_2) = \frac{(-\lambda_2 x_0 + v_0, \lambda_1 x_0 - v_0)}{\lambda_1 - \lambda_2}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad x(t) &= \frac{(-\lambda_2 x_0 + v_0)e^{\lambda_1 t} + (\lambda_1 x_0 - v_0)e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\
&= \frac{x_0(-\lambda_2 e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) + v_0(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t})}{\lambda_1 - \lambda_2}
\end{aligned}
$$

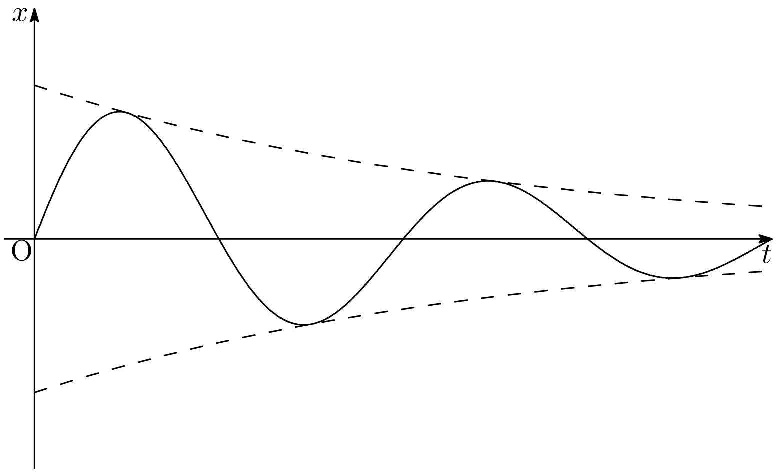
指数部分が実数になる場合と複素数になる場合で場合わけする.

(i) $\omega_0 > \frac{\gamma}{2}$ のとき (抵抗が小さい場合)

$\omega_1 = \left(\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ とおくと, $\lambda_1 = -\dfrac{\gamma}{2} + i\omega_1, \lambda_2 = -\dfrac{\gamma}{2} - i\omega_1, \lambda_1 - \lambda_2 = 2i\omega_1$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{x_0\left((\frac{\gamma}{2} + i\omega_1)e^{(-\frac{\gamma}{2} + i\omega_1)t} + (-\frac{\gamma}{2} + i\omega_1)e^{(-\frac{\gamma}{2} - i\omega_1)t}\right) + v_0\left(e^{(-\frac{\gamma}{2} + i\omega_1)t} - e^{(-\frac{\gamma}{2} - i\omega_1)t}\right)}{2i\omega_1} \\
&= x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\frac{e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}}{2} + \frac{\gamma}{2}\frac{e^{i\omega_1 t} - e^{-i\omega_1 t}}{2i\omega_1}\right) + v_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\frac{e^{i\omega_1 t} - e^{-i\omega_1 t}}{2i\omega_1} \\
&= e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(x_0\left(\cos\omega_1 t + \frac{\gamma}{2}\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}\right) + v_0\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}\right)
\end{aligned}
$$

これはおおよそ, 振幅が指数関数的に減少する単振動とみなせる.



(ii) $\omega_0 < \frac{\gamma}{2}$ のとき (抵抗が大きい場合)

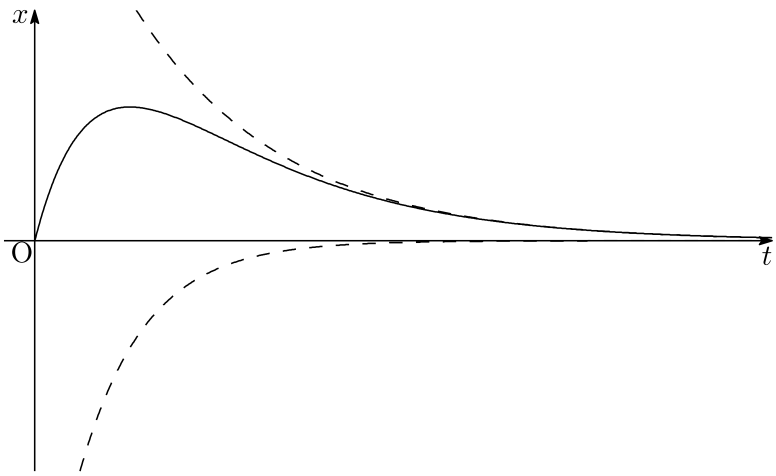
$$w_1 = \left((\tfrac{\gamma}{2})^2 - \omega_0^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ とおくと}, \lambda_1 = -\frac{\gamma}{2} + w_1, \lambda_2 = -\frac{\gamma}{2} - w_1, \lambda_1 - \lambda_2 = 2w_1$$

$$x(t) = \frac{x_0\left((\frac{\gamma}{2} + w_1)e^{(-\frac{\gamma}{2}+w_1)t} + (-\frac{\gamma}{2} + w_1)e^{(-\frac{\gamma}{2}-w_1)t}\right) + v_0\left(e^{(-\frac{\gamma}{2}+w_1)t} - e^{(-\frac{\gamma}{2}-w_1)t}\right)}{2w_1}$$

$$= x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + \frac{\gamma}{2}\frac{e^{w_1 t} - e^{-w_1 t}}{2i\omega}\right) + v_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\frac{e^{w_1 t} - e^{-w_1 t}}{2i\omega}$$

$$= \frac{\left(\frac{\gamma}{2} + w_1\right)x_0 + v_0}{2w_1}e^{(-\frac{\gamma}{2}+w_1)t} + \frac{\left(-\frac{\gamma}{2} + w_1\right)x_0 - v_0}{2w_1}e^{(-\frac{\gamma}{2}-w_1)t}$$

$$\left(= e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(x_0\left(\cosh w_1 t + \frac{\gamma}{2}\frac{\sinh w_1 t}{w_1}\right) + v_0\frac{\sinh w_1 t}{w_1}\right)\right)$$



ふたつの場合の式を並べてみる.

$$x_1(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\cos\omega_1 t + \frac{\gamma}{2}\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}\right) + v_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1}$$

$$x_2(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(\cosh w_1 t + \frac{\gamma}{2}\frac{\sinh w_1 t}{w_1}\right) + v_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\frac{\sinh w_1 t}{w_1}$$

これは, $\omega_1 \to iw_1$ と置き換えたものとなっている.

- $\gamma^2 - 4\omega_0^2 = 0$ のとき, 特性方程式は解を 1 つしかもたない. 上に述べたように $x = Ce^{\lambda t} + D\lambda e^{\lambda t}$ と解いてもよいが, ここでは $\omega_0 < \dfrac{\gamma}{2}$ のときの解で $\omega_0 - \dfrac{\gamma}{2} \to 0$ とした極限をとってみる.
  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\dfrac{\gamma}{2}\right)^2} \to 0$ であるから, $\cos\omega_1 t \to 1$, $\dfrac{\sin\omega_1 t}{\omega_1} \to t$ で,
  $$x(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(x_0(1 + \frac{\gamma}{2}t) + v_0 t\right)$$

4.2.3 強制振動

さらに上記の状態に加え, 下記のような周期的な外力が加わっているとする.

$$F = -kx - m\gamma v + F_{ext}(t), \quad F_{ext}(t) = F_0 \cos\omega t$$

$$\text{運動方程式} \quad a = \frac{F}{m} = -\omega_0^2 x - \gamma v + \frac{F_{ext}(t)}{m} \quad (\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}})$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{F_{ext}(t)}{m} \tag{*}$$

対応する次の斉次方程式を考える.

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0$$

この一般解は前節で求めた通りである. これを $x_0(t)$ と置くことにする（初期条件を当てはめる前の, 任意定数を二つ含むもの）. このとき, (*) の解は, 特殊解の一つを $x_s(t)$ として,

$$x(t) = x_s(t) + x_o(t)$$

実際, これを (*) の左辺に代入すると, $x_0(t)$ が $(\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2)x_0(t) = 0$ を満たすことに注意して,

$$\begin{aligned}(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2)(x_s(t) + x_0(t)) &= (\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2)x_s(t) + (\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2)x_0(t) \\ &= (\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2)x_s(t)\end{aligned}$$

これより, $x_s(t)$ が (*) の解ならば, $x_s(t) + x_0(t)$ も (*) の解となることが分かる. さらに, 任意定数を二つ含むのでこれが一般解であることが分かる.

(*) の一般解を考えるにあたり, (*) を複素数に拡張した以下の方程式を考える. 以下で $z(t)$ は複素数関数である.

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z = \frac{\widehat{F}_{ext}(t)}{m} \tag{**}$$

ただし, $\widehat{F}_{ext}(t) = F_0 e^{i\omega t}$ で, これは $Re\ \widehat{F}_{ext}(t) = F_{ext}(t)$ となるように $F(t)$ を複素数に拡張したものである.

$\left(\right.$ 複素数に拡張して考えるのは, その方がいくらか単純だからである. 複素数の場合, 以下で行うように $z = Ce^{i\omega t}$ とおくが, 実数のまま考える場合, $x = C\cos\omega t + D\sin\omega t$ と, 二つの定数を含む仮定が必要で, 式がややこしくなる. なお, cos と sin の両方を考える必要があるのは一階微分と二階微分の両方が含まれているからで, これがたとえば $\gamma = 0$, すなわち抵抗がない場合 (宿題でやった状況) ならば, $x = C\cos\omega t$ （もし外力が sin で表されるならば $C\sin\omega t$）とおけばよいので, 複素数に拡張する必要はない. $\left.\right)$

(**) の両辺の実部をとると (*) と一致する. よって, (**) の解 $z(t)$ の実部をとると (*) の解となる.

(**) の右辺は角振動数 ω で変化する. そこで, 左辺も同じ角振動数で変化するはずだから, $Ce^{i\omega t}$ という形の解をもっていてもおかしくない. そこで $z(t) = Ce^{i\omega t}$ とおいてみて, これが方程式の解となるように定数 C を定めてみる.

$$
\begin{aligned}
(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2)(Ce^{i\omega t}) &= (i\omega)^2 Ce^{i\omega t} + (i\omega)\gamma Ce^{i\omega t} + \omega_0^2 Ce^{i\omega t} \\
&= C(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)e^{i\omega t}
\end{aligned}
$$

よって, $C(-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2)e^{i\omega t} = \dfrac{\widehat{F}_{ext}(t)}{m} = \dfrac{F_0 e^{i\omega t}}{m}$ ならば, z は (**) の解となる.

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{F_0}{m}\frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2} \\
&= \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore z &= \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} e^{i\omega t} \\
&= \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}(\cos\omega t + i\sin\omega t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore x &= Re\ z \\
&= \frac{F_0}{m}\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}\{(\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + \gamma\omega\sin\omega t\} \\
&= \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t + \delta) \quad (\tan\delta = \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2})
\end{aligned}
$$

以上より, (*) の一般解は, 以下のようになる.

$$
x(t) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t + \delta) + x_0 t
$$

ここでさらに初期条件から $x_0(t)$ に含まれる定数を求めることで, 最終的な解となる.

$\omega_0 > \dfrac{\gamma}{2}$ の場合だけやると, このとき, $x_0(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t}(C\cos\omega_1 t + D\sin\omega_1 t)$ （定数を確定させていない形であることに注意）であるから,

$$x(t) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}\{(\omega_0^2-\omega^2)\cos\omega t + \gamma\omega\sin\omega t\} \\ + e^{-\frac{\gamma}{2}t}(C\cos\omega_1 t + D\sin\omega_1 t)$$

$$v(t) = \frac{F_0}{m}\frac{\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}\{-(\omega_0^2-\omega^2)\sin\omega t + \gamma\omega\cos\omega t\} \\ + e^{-\frac{\gamma}{2}t}((\omega_1 D - \frac{\gamma}{2}C)\cos\omega_1 t - (\omega_1 C + \frac{\gamma}{2})\sin\omega_1 t)$$

$$\therefore x_0 = x(0) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}(\omega_0^2-\omega^2) + C$$
$$v_0 = v(0) = \frac{F_0}{m}\frac{\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}\gamma\omega\cos\omega t + \omega_1 D - \frac{\gamma}{2}C$$

$\omega_0 \leq \dfrac{\gamma}{2}$ の場合も同様に行う.

ところで, 減衰振動の一般解 $x_0(t)$ は, $t \to \infty$ で $x_0(t) \to 0$ となる. よって,

$$x(t) \to x_s(t) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}\cos(\omega t + \delta) \qquad (t \to \infty)$$

これは充分時間が経てば, 物体の運動周期が外力の周期と同じになることを意味している.

この振動に関して,

$$\begin{aligned}(\text{振幅})^2 &= \frac{F_0^2}{m^2}\frac{1}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} \\ &= \frac{F_0^2}{m^2}\frac{1}{\{\omega^2-(\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{2})\}^2+\gamma^2\omega_0^2-\frac{1}{4}\gamma^4}\end{aligned}$$

これより, $\omega^2 = \omega_0^2 - \dfrac{\gamma^2}{2}$ のときに (振幅)^2 は最大値 $\dfrac{F_0^2}{m^2}\dfrac{1}{\gamma^2\omega_0^2-\frac{1}{4}\gamma^4}$ をとる.

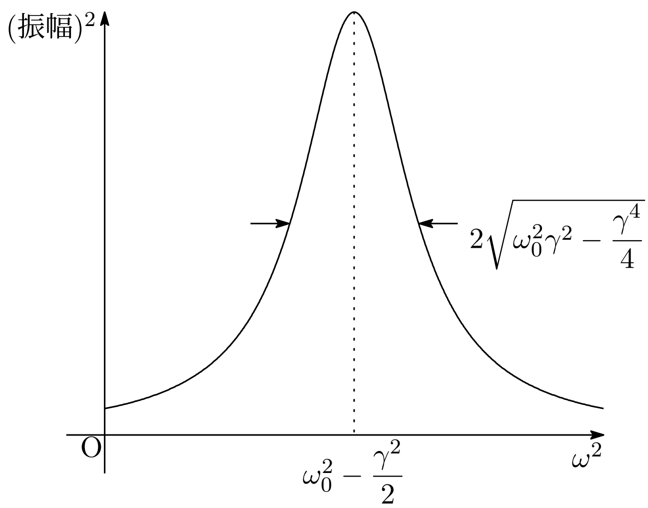
(振幅)^2 が最大値の半分になるとき,

$$\begin{aligned}\{\omega_{\frac{1}{2}}^2-(\omega_0^2-\frac{\gamma^2}{2})\}^2 &= \gamma^2\omega_0^2-\frac{1}{4}\gamma^4 \\ \therefore \omega_{\frac{1}{2}}^2-\omega_{max}^2 &= \pm\sqrt{\gamma^2\omega_0^2-\frac{1}{4}\gamma^4}\end{aligned}$$

これが (振幅)^2 のグラフの幅の目安となる. 以上より, 次のことが分かる.

- $\gamma \ll \omega_0$ とすると, $\omega \approx \omega_0$ のとき, 振幅が最大になる.
  $\to$ ω_0 は物体の持つ固有振動数で, これを共鳴という.

- γ を小さくすると, グラフの幅は狭くなって, 最大値は大きくなる.



5　運動とエネルギー

5.1　仕事と運動エネルギー

$$\begin{aligned} \text{一定の力 } \vec{F} \text{ が質点にする仕事 } W_C &= \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \\ \text{仕事} &= \text{力} \times \text{距離} \end{aligned}$$

一般の一定でない力についても, 微小区間で力は一定とみなせるから,

$$\Delta W_C = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

$$\therefore W_C \approx \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r}_2 + \cdots + \vec{F}_N \cdot \Delta\vec{r}_N$$

$$W_C = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \vec{F}(\vec{r}_k) \cdot \Delta\vec{r}_k = \int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

運動エネルギー　: $T = \dfrac{1}{2}mv^2$

$$\Delta T = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\Delta t = m\vec{v} \cdot \vec{a}\Delta t = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \ \text{：仕事}$$

→ 運動エネルギーの変化は仕事に等しい.

$$\boxed{T_B - T_A = W_C}$$

ex) 一様重力

$$F = -mg$$

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = v_0 - gt$$

$$
\begin{aligned}
T_B - T_A &= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 \\
&= \frac{1}{2}m(v_0 - gt_B)^2 - \frac{1}{2}m(v_0 - gt_A)^2 \\
&= -mv_0 g(t_B - t_A) + \frac{1}{2}mg^2(t_B - t_A) \\
&= -mg\{(v_0 t_B - \frac{1}{2}gt_B^2) - (v_0 t_A - \frac{1}{2}gt_A^2)\} \\
&= -mg(x_B - x_A) \\
&= W_C
\end{aligned}
$$

5.2 保存力とポテンシャルエネルギー

仕事が経路によらない→**保存力**

始点と終点が共通の任意の経路 C_1, C_2 に対して, $\displaystyle\int_{C_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

あるいは, 任意の閉じた経路 C に対して, $\displaystyle\oint_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$

ある力 $\vec{F}$ が保存力ならば, $\vec{F}$ **は位置ベクトルの関数として定まる**. すなわち, $\vec{F}(\vec{r})$ は力の場である.（位置ベクトルの関数として定まる量を場という）

ex)　バネによる復元力　○
　　　抵抗　×
　　　外力　×

ポテンシャルエネルギー (位置エネルギー)

基準点 $\vec{r}_0$ に対して, 保存力 $\vec{F}(\vec{r})$ のポテンシャルエネルギー $V(\vec{r})$ とは、

$$
\boxed{V(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} (-\vec{F}(\vec{r})) \cdot \mathrm{d}\vec{r}}
$$

ex1) 一様重力 → $\displaystyle V(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} mg\vec{e}_z \cdot \mathrm{d}\vec{z} = mg\int_0^z \mathrm{d}z = mgz$

ex2) 単振動 (バネ) → $\displaystyle V(x) = \int_0^x kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx^2$

逆にポテンシャルエネルギー $V(\vec{r})$ から保存力の大きさ $\vec{F}(\vec{r})$ を求める際は、

$$
\boxed{\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})}
$$

☆勾配 (gradient)

$$\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} V(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \ : \ \text{ナブラ}$$

注：ナブラ $\vec{\nabla}$ はベクトル, ポテンシャルエネルギー $V(\vec{r})$ はスカラー, その勾配 $\vec{\nabla}V(\vec{r})$ はベクトル.

$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$ が成り立つことを示す.

$$\begin{aligned} V(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - V(\vec{r}) &= \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial z}\Delta z \ : \ \text{全微分} \\ &= \vec{\nabla}V(\vec{r}) \cdot \Delta\vec{r} \end{aligned}$$

ポテンシャルエネルギーの定義から,

$$\begin{aligned} V(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - V(\vec{r}) &= \int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\Delta\vec{r}} (-\vec{F}(\vec{r})) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\ &= -\vec{F}(\vec{r}) \cdot \Delta\vec{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{\nabla}V(\vec{r}) \cdot \Delta\vec{r} &= -\vec{F}(\vec{r}) \cdot \Delta\vec{r} \\ -\vec{\nabla}V(\vec{r}) \cdot \Delta\vec{r} &= \vec{F}(\vec{r}) \end{aligned}$$

中心力

中心力 → 作用線が常にある一点を通り, 大きさが中心からの距離のみで決まる.

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= F(r)\vec{e}_r \quad \leftarrow \text{このようなスカラー関数 } F(r) \text{ が存在することが中心力の条件} \\ &= F(r)\frac{\vec{r}}{r} \end{aligned}$$

ex) 万有引力, クーロン力 (逆二乗力)

$$\vec{F}(\vec{r}) = GMm\frac{1}{r^2}\vec{e}_r = GMm\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{F}(\vec{r}) = kq_1q_2\frac{1}{r^2}\vec{e}_r = kq_1q_2\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$\vec{F}(\vec{r}) = c\dfrac{\vec{r}}{r^3}$ のポテンシャルエネルギーは $\boxed{V(r) = \dfrac{c}{r}}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} &= \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r} \\
&= \left(\frac{1}{2r}\right)(2x)\,(-\frac{1}{r^2}) \quad (\because r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}) \\
&= -\frac{x}{r^3}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore -\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \begin{pmatrix} c\dfrac{x}{r^3} \\ c\dfrac{y}{r^3} \\ c\dfrac{z}{r^3} \end{pmatrix} = c\frac{\vec{r}}{r^3}
$$

一般の中心力 $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\vec{e}_r$ について，

$$
V(r) = -\int_{r_0}^{r} F(r)\,\mathrm{d}r \qquad r_0\text{：中心から基準点までの距離}
$$

$$
\begin{aligned}
-\vec{\nabla}V(r) &= -\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}V(\vec{r})}{\mathrm{d}r}\dfrac{\partial r}{\partial x} \\ \dfrac{\mathrm{d}V(\vec{r})}{\mathrm{d}r}\dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\mathrm{d}V(\vec{r})}{\mathrm{d}r}\dfrac{\partial r}{\partial z} \end{pmatrix} \\
&= -\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\vec{\nabla}r \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_{r_0}^{r} F(r)\,\mathrm{d}r\right)\ \vec{\nabla}(x^2+y^2+z^2) \\
&= F(r)\frac{\vec{r}}{r} \\
&= F(r)\vec{e}_r
\end{aligned}
$$

5.3 力学的エネルギー保存の法則

$\vec{F}(\vec{r})$ を保存力とする．

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{r} \\
&= \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{r} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{r})\cdot \mathrm{d}\vec{r} \\
&= -V(\vec{r}_2) + V(\vec{r}_1)
\end{aligned}
$$

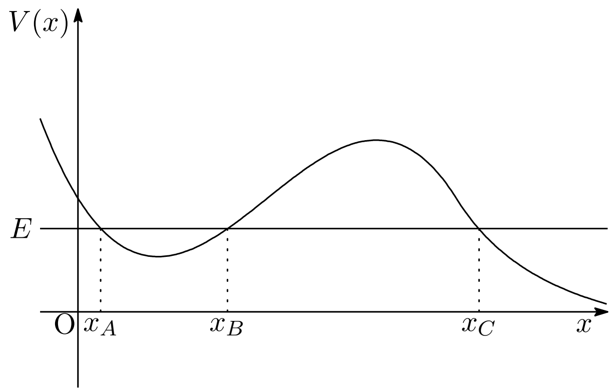
$$
\boxed{\frac{1}{2}mv_1^2 + V(\vec{r}_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 + V(\vec{r}_2) \quad \textbf{力学的エネルギー保存の法則}}
$$

力学的エネルギー = 運動エネルギー + ポテンシャルエネルギー

5.4　エネルギー保存と運動

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V(x) = E \quad \text{←全力学的エネルギー}$$

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) \geq 0 \text{ より } \boxed{E - V(x) \geq 0}$$



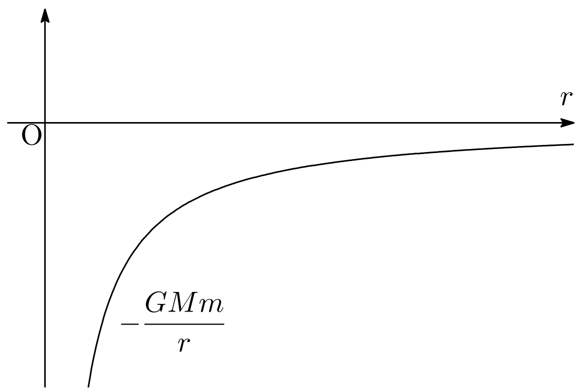
運動の可能な範囲

$$x_A \leq x \leq x_B$$
$$x_C \leq x$$

ロケット

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \quad M:\text{ 地球の質量}$$
$$m:\text{ ロケットの質量}$$

E が正ならば, 運動の範囲に制限がない.
→速度がある程度あれば, どこまででも飛んでゆける.



$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R} = 0$$

$$\begin{aligned}
\therefore v_0 &= \sqrt{\frac{2GM}{R}} \qquad R:\text{ 地球の半径} \\
&= \sqrt{2gR} \qquad (\because g = \frac{GM}{R^2}) \\
&\fallingdotseq \sqrt{2 \times 9.8\,\mathrm{m/s^2} \times (6.4 \times 10^6)\,\mathrm{m}} \\
&\fallingdotseq 1.1 \times 10^4\,\mathrm{m/s} \\
&\fallingdotseq 4.0 \times 10^4\,\mathrm{km/h}
\end{aligned}$$

単振動

$$V(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V(x) &= E \\
\therefore \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))} \\
\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 1 \\
\pm\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} &= \int_0^t \mathrm{d}t \\
&= t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{m}{2(E - \frac{1}{2}kx^2)}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sqrt{\frac{m}{2E(1 - \sin^2\alpha)}}\sqrt{\frac{2E}{k}}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha \qquad \left(x = \sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\alpha\right) \\
&= \sqrt{\frac{m}{k}}\int_{\alpha_0}^{\alpha} \mathrm{d}\alpha \\
&= \sqrt{\frac{m}{k}}(\alpha - \alpha_0) \\
&= \sqrt{\frac{m}{k}}\left(\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right) - \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x_0\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore t &= \sqrt{\frac{m}{k}}\left(\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x\right) - \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x_0\right)\right) \\
\therefore x &= \sqrt{\frac{2E}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \delta\right) \qquad \left(\delta = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{2E}}x_0\right)\right)
\end{aligned}
$$

以上のように, エネルギー保存の式から運動の軌跡を求められる.

6 中心力による三次元の運動

6.1 角運動量の保存と運動

角運動量 angular momentum

$$
\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad \left|\vec{l}\right| = |\vec{r}||\vec{p}|\sin\theta
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \\
&= \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} \\
&= m(\vec{v} \times \vec{v}) + \vec{r} \times \vec{F} \\
&= \vec{r} \times \vec{F} \quad \leftarrow \text{力のモーメント（トルク）}
\end{aligned}
$$

角運動量の時間変化は力のモーメントに等しい.
cf. 運動量の時間変化は力に等しい (運動方程式)

角運動量と面積速度の関係

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}|$$
$$\therefore \left|\vec{l}\right| = 2m\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$$

中心力と角運動量

物体に働く力が中心力だけのとき

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}) &= F(r)\vec{e}_r \\ \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) &= r\vec{e}_r \times F(r)\vec{e}_r \\ &= 0 \\ \therefore \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} &= 0\end{aligned}$$

中心力のもとで, 角運動量は保存する

ところで, $\vec{l} \perp \vec{r}, \vec{p}$ だから恒等的に $\vec{l} \cdot \vec{r} = \vec{l} \cdot \vec{p} = 0$. よって $\vec{l}$ が一定で時間変化しないとき, $\vec{l} \cdot \vec{r} = 0$ より**運動は $\vec{l}$ と直行する平面内に限られる**.

$\vec{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l \end{pmatrix}$ (l:定数) となるように座標系をとると, $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ で $\vec{l} \cdot \vec{r} = 0$ より $lz = 0$

$l \neq 0$ ならば $z = 0$. すなわち, 質点は xy 平面内を移動する.

座標系

ex) 二次元の円運動

$$\begin{array}{ll} \text{デカルト座標} & \text{極座標} \\ \begin{cases} x = R\cos\omega t \\ y = R\sin\omega t \end{cases} & \begin{cases} r = R \\ \varphi = \omega t \end{cases} \end{array}$$

二次元

- デカルト座標

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \\ \vec{v} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y \\ \vec{a} &= \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_y\end{aligned}$$

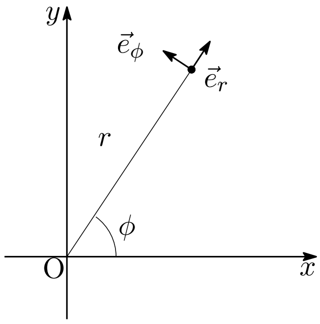
運動方程式：$F = ma$

$$\begin{cases} F_x = m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\ F_y = m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \end{cases}$$

- 極座標

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \end{cases}$$



$$\vec{e}_r = \cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} &= -\sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x + \cos\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y \\ &= \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} &= -\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x - \sin\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y \\ &= -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r \end{aligned}$$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \left(\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_r + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}\right) + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi + r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_\varphi + r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}t}\right) \\ &= \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_r + 2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi + r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_\varphi - r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\vec{e}_r \\ &= \left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\vec{e}_r + \left(2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right)\vec{e}_\varphi \\ &= \left[\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)\right]\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

極座標での運動方程式

$$\begin{cases} F_r = m\left[\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] \\ F_\varphi = m\dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)\right] \end{cases}$$

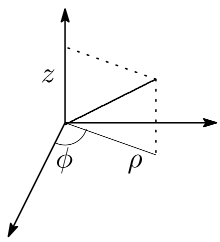
三次元

- デカルト座標

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \\
\vec{v} &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z \\
\vec{a} &= \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_y + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_z
\end{aligned}
$$

- 円筒座標

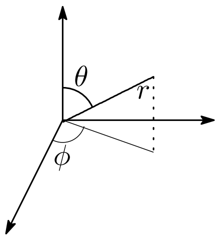
$$
\begin{cases}
x = \rho\cos\varphi \\
y = \rho\sin\varphi \\
z = z
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\rho = \sqrt{x^2+y^2} \\
\varphi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \\
z = z
\end{cases}
$$



$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z \\
\vec{v} &= \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\rho + \rho\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z \\
\vec{a} &= \left[\frac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}t^2} - \rho\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)\right]\vec{e}_\varphi + \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_z
\end{aligned}
$$

- 極座標 （具体的な速度・加速度の表式はたしか覚えなくていいって言ってたと思います）

$$
\begin{cases}
x = r\sin\theta\cos\varphi \\
y = r\sin\theta\sin\varphi \\
z = r\cos\theta
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\rho = r\sin\theta \\
z = r\cos\theta
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
r = \sqrt{\rho^2+z^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
\theta = \tan^{-1}\frac{\rho}{z} = \tan -1\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\
\varphi = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}
\end{cases}
$$



$$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z$$
$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\vec{e}_y - \sin\theta\vec{e}_z$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_x + \cos\varphi\vec{e}_y$$

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= r\vec{e}_r \\
\vec{v} &= \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi \\
\vec{a} &= \left[\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\left\{\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\}\right]\vec{e}_r \\
&\quad + \left[2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\vec{e}_\theta \\
&\quad + \left[2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + 2r\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + r\sin\theta\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\right]\vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

中心力による三次元の運動

中心力 → 角運動量保存 → 平面運動

二次元極座標で記述する．

$$m\left[\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] = F(r) \tag{1}$$
$$m\frac{1}{r}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)\right] = 0 \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\vec{l} &= \vec{r}\times\vec{p} \\
&= r\vec{e}_r \times m(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi) \\
&= mr^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z
\end{aligned}$$

角運動量の保存 →向きと大きさの保存

- 向きの保存 → 平面運動
- 大きさの保存 → $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right) = 0$ → 運動方程式の φ 方向の式 (2) と等価！

6.2 中心力におけるエネルギー保存

$$
\begin{aligned}
\text{運動エネルギー}\ T &= \frac{1}{2}m\vec{v}^2 \\
&= \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{l^2}{2mr^2} \quad \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{l}{mr^2} \quad l:\text{角運動量の大きさ}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T + V(r) &= E \\
\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + V(r) &= E
\end{aligned}
$$

$$
\left(
\begin{gathered}
\text{両辺 t で微分して,}\quad m\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - \frac{l^2}{mr^3}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 0 \\
m\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - \frac{l^2}{mr^3} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = 0 \\
\therefore m\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} - mr\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = F_r \\
(\because \frac{l^2}{mr^3} = mr\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2) \\
\text{運動方程式の } r \text{ 方向の式とエネルギー保存の式は等価！}
\end{gathered}
\right)
$$

一次元におけるエネルギー保存との対比から,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V(x) = E \\
&\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2} + V(x)}_{\text{これを有効ポテンシャル } V_{eff}(r) \text{ という}} = E
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{V_{err}(r) = \frac{l^2}{2mr^2} + V(x)}
$$

有効ポテンシャルを用いるとエネルギー保存の式は次のように書ける.

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + V_{eff}(r) = E$$
$$E - V_{eff}(r) \geq 0$$

これから r のとりうる範囲が分かる.

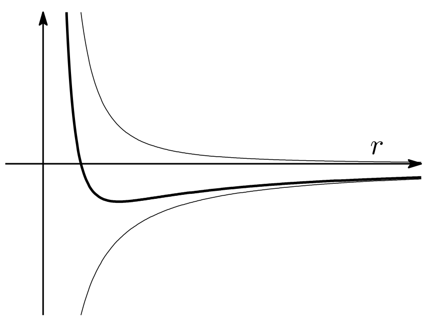
$$\left(\begin{array}{l} \text{素の式で書くと}\quad E - \dfrac{l^2}{2mr^2} + V(x) = \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 \geq 0 \\ r\ \text{をそのまま含む項と定数項が左辺},\ r\ \text{の微分を含む項が右辺}. \\ \text{運動エネルギー}\ \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \dfrac{l^2}{2mr^2}\ \text{を全て右辺に持っていくと}, \\ \hfill \text{範囲が甘くなってしまう}. \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r))} \\ \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V_{eff}(r))}}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= 1 \\ \therefore \pm\int_{r_0}^{r}\sqrt{\frac{m}{2(E - V_{eff}(r))}}\,\mathrm{d}r &= \int_0^t \mathrm{d}t \\ &= t \qquad \text{これを解けば運動の軌跡が分かる} \end{aligned}$$

ex) ニュートンの万有引力

$$\begin{aligned} F(r) &= -\frac{k}{r^2} \quad (k = GMm) \\ V(r) &= -\frac{k}{r} \\ V_{eff}(r) &= -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2} \end{aligned}$$

$V_{eff}(r)$ の最小値と, 最小値を与える r の値を求める.



$$\frac{\mathrm{d}V_{eff}(r)}{\mathrm{d}r} = \frac{k}{r^2} - \frac{l^2}{mr^3} = 0$$
$$r = \frac{l^2}{km} \equiv d \quad (\equiv\text{: 〜と定義する})$$

$$V_{eff}(d) = -\frac{k^2m}{2l^2}$$

$E - V_{eff}(r) \geq 0$ より, $E \geq V_{eff}(r) \geq -\dfrac{k^2m}{2l^2}$

エネルギー E, 角運動量 l の与えられたときに, r のとりうる値の範囲は,

$$E + \frac{k}{r} - \frac{l^2}{2mr^2} \geq 0$$

最小, 最大の r に対して,

$$\begin{aligned} E + \frac{k}{r} - \frac{l^2}{2mr^2} &= 0 \\ \left(\frac{1}{r}\right)^2 - \frac{2mk}{l^2}\frac{1}{r} - \frac{2mE}{l^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{r} &= \frac{mk}{l^2} pm \sqrt{\left(\frac{mk}{l^2}\right)^2 + \frac{2mE}{l^2}} \\ &= \frac{mk}{l^2} pm \frac{mk}{l^2}\sqrt{1 + \frac{2mE}{l^2}\left(\frac{l^2}{mk}\right)^2} \\ &= \frac{1}{d}(1 \pm e) \quad (e = \sqrt{1 + \frac{2mE}{l^2}d^2}) \end{aligned}$$

- $E < 0$ のとき ($0 < e < 1$ のとき)

$$\frac{d}{1+e} \leq r \leq \frac{d}{1-e}$$

- $0 \leq E$ のとき ($1 < e$ のとき)

$$\frac{d}{1+e} \leq r$$

6.3　惑星の運動

ケプラーの惑星に関する法則

1. 太陽を一つの焦点とする楕円運動
2. 面積速度一定 → 角運動量保存
3. 公転周期の二乗は平均距離の三乗に比例

惑星の軌道

$$\text{運動方程式：} \begin{cases} m\left[\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right] = F(r) \\ m\dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)\right] = 0 \end{cases}$$

軌道の方程式（ r と φ の関係式）を求める. 式を次のように書き換える

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - \frac{l^2}{mr^3} = F(r)$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi} \qquad \frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$= \frac{l}{mr^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \qquad = \frac{l}{mr^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}\left(-\frac{l}{m}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\varphi}\right)$$

$$= -\frac{l}{m}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\varphi} \qquad = -\frac{l^2}{m^2r^2}\frac{\mathrm{d}^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\varphi^2}$$

$F(r) = -\dfrac{k}{r^2}$ のとき, ↑を用いて運動方程式を変形して,

$$-m\frac{l^2}{m^2r^2}\frac{\mathrm{d}^2\left(\dfrac{1}{r}\right)}{\mathrm{d}\varphi^2} - \frac{l^2}{mr^3} = -\frac{k}{r^2}$$

$s = \dfrac{1}{r}$ とおけば,

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}\varphi^2} + s = \frac{mk}{l^2} = \frac{1}{d}$$

(左辺) $= 0$ の一般解は $s = A\cos(\varphi + \varphi_0)$. また $s = \dfrac{1}{d}$ を特殊解として持つから, 上の微分方程式の一般解は,

$$s = \frac{1}{d} + A\cos(\varphi + \varphi_0)$$

s は $\varphi = -\varphi_0$ のとき最大（r が最小）

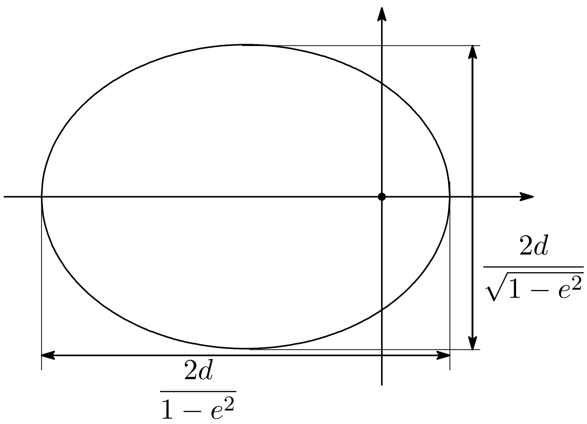
$\varphi_0 = 0$ として考える.

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{d} + A\cos\varphi \\ &= \frac{1 + dA\cos\varphi}{d} \\ &= \frac{1 + e\cos\varphi}{d} \qquad (e = Ad) \\ \therefore r &= \frac{d}{1 + e\cos\varphi} \qquad \text{二次曲線の極座標表示} \end{aligned}$$

- $0 \leq e < 1$ のとき, $\quad \dfrac{d}{1+e} \leq r \leq \dfrac{d}{1-e}$ 　: 楕円
- $e = 1$ のとき, $\quad \dfrac{d}{2} = \dfrac{d}{1+e} \leq r$ 　: 放物線
- $1 < e1$ のとき, $\quad \dfrac{d}{1+e} \leq r$ 　: 双曲線

直交座標系では, $\quad r + er\cos\varphi = d$ より $\quad r + ex = d$

$$\begin{aligned} r &= d - ex \\ r^2 &= (d - ex)^2 \\ x^2 + y^2 &= (d - ex)^2 \\ (1 - e^2)x^2 + 2dex + y^2 &= d^2 \end{aligned}$$



- $0 \leq e < 1$ のとき, 楕円

$$\frac{\left(x+\dfrac{de}{1-e^2}\right)^2}{\dfrac{d^2}{(1-e^2)^2}}+\frac{y^2}{\dfrac{d^2}{1-e^2}}=1$$

- $e=1$ のとき, 放物線

$$2dx+y^2=d^2$$
$$x=-\frac{y^2}{2d}+\frac{1}{2}d$$

公転周期と平均距離 : $T^2 \propto a^3$

$$\begin{aligned}\text{面積速度 } \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{2}r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{l}{2m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T&=\frac{(\text{楕円の面積})}{(\text{面積速度})}\\&=\frac{\pi ab}{\dfrac{l}{2m}} \qquad a=\frac{d}{1-e^2}, b=\frac{d}{\sqrt{1-e^2}}\\&=\frac{\pi a\sqrt{ad}}{\dfrac{\sqrt{kmd}}{2m}} \qquad \left(d=\frac{l^2}{km} \iff l=\sqrt{kmd}\right)\\&=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}a^{\frac{3}{2}}\\&=\frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{\frac{3}{2}} \qquad k=GMm\end{aligned}$$

7 運動の相対性と慣性力

導出は別に分からなくても大丈夫, と思う. 最終的な結果さえ覚えておけば.

$$\begin{aligned}\vec{A}&=A_x\vec{e}_x+A_y\vec{e}_y+A_z\vec{e}_z \quad \text{慣性系}\Sigma\\&=A'_x\vec{e}_x{}'+A'_y\vec{e}_y{}'+A'_z\vec{e}_z{}' \quad \text{非慣性系}\Sigma'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x+\frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y+\frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z\\\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}A'_x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x{}'+\frac{\mathrm{d}A'_y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y{}'+\frac{\mathrm{d}A'_z}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z{}'\\&\quad+A'_x\frac{\mathrm{d}\vec{e}_x{}'}{\mathrm{d}t}+A'_y\frac{\mathrm{d}\vec{e}_y{}'}{\mathrm{d}t}+A'_z\frac{\mathrm{d}\vec{e}_z{}'}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

$$\vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j{}' = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad \text{クロネッカーのデルタ}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{e}_i{}' \cdot \vec{e}_j{}'\right) = 0 \text{ より } \frac{\mathrm{d}\vec{e}_i{}'}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{e}_j{}' + \vec{e}_i{}' \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{e}_j{}'}{\mathrm{d}t} = 0$$

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_i{}'}{\mathrm{d}t}$ もまたベクトルで, その $\vec{e}_j{}'$ 方向成分を c_{ij} とおく（つまり $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_i{}'}{\mathrm{d}t} = \sum_j c_{ij}\vec{e}_j{}'$）と, 上式より $c_{ij} + c_{ji} = 0$

$$\begin{aligned} \therefore c_{xx} &= c_{yy} = c_{zz} = 0 \\ c_{yz} &= -c_{zy} \equiv \omega_x \\ c_{zx} &= -c_{xz} \equiv \omega_y \\ c_{xy} &= -c_{yx} \equiv \omega_z \end{aligned}$$

さらに $\vec{\omega} = \omega_x\vec{e}_x{}' + \omega_y\vec{e}_y{}' + \omega_z\vec{e}_z{}'$ と定義する.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\vec{e}_x{}'}{\mathrm{d}t} &= c_{xx}\vec{e}_x{}' + c_{xy}\vec{e}_y{}' + c_{xz}\vec{e}_z{}' \\ &= \omega_z\vec{e}_y{}' - \omega_y\vec{e}_z{}' \\ &= \vec{\omega} \times \vec{e}_x{}' \end{aligned}$$

同様に $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_y{}'}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{e}_y{}', \dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_z{}'}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{e}_z{}'$

これは角速度ベクトルを $\vec{\omega}$ とする回転を表す.

（角速度ベクトル：大きさが角速度で向きが回転軸の向きで回転方向に対して右ねじの方向のベクトル）

ex) $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z{}'$

$$\begin{aligned} \Delta t \text{ の間の変化は,} \quad \Delta\vec{e}_x{}' &= \omega\vec{e}_z{}' \times \vec{e}_x{}'\Delta t \\ &= \omega\Delta t\vec{e}_y \\ \Delta\vec{e}_y{}' &= \omega\vec{e}_z{}' \times \vec{e}_y{}'\Delta t \\ &= -\omega\Delta t\vec{e}_x \\ \Delta\vec{e}_z{}' &= \omega\vec{e}_z{}' \times \vec{e}_z{}'\Delta t \\ &= 0 \end{aligned}$$

Δt の間に角度は $\omega\Delta t$ だけ変化する.

$\dfrac{\mathrm{d}A'_x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x{}' + \dfrac{\mathrm{d}A'_y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y{}' + \dfrac{\mathrm{d}A'_z}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z{}' \equiv \dfrac{\delta\vec{A}}{\delta t}$ として, また $A'_x\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_x{}'}{\mathrm{d}t} + A'_y\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_y{}'}{\mathrm{d}t} + A'_z\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_z{}'}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{A}$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta\vec{A}}{\delta t} + \omega \times \vec{A}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} &\quad: \text{慣性系から見た微分} \\
\frac{\delta \vec{A}}{\delta t} &\quad: \uparrow \text{から単位ベクトルの回転の効果を除いたもの} \\
\omega \times \vec{A} &\quad: \text{単位ベクトルが回転しているせいで発生するずれ}
\end{aligned}
$$

これが回転の効果を考慮する式なので, 位置ベクトルから原点の位置ベクトル $\vec{R}$ を引いた, あとこれを使ってしこしこ計算してやれば求める相対速度, 相対加速度が出てくる.

ここから具体的に相対位置ベクトル, 相対速度ベクトル, 相対加速度ベクトルを求める.

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{R}}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\delta \vec{r}\,'}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \frac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}}$$

$$
\left(
\begin{aligned}
\frac{\delta \vec{r}}{\delta t} &\quad : \quad \text{原点移動の効果を考慮してない} \\
\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t} &\quad : \quad \text{回転の効果を考慮してない} \\
\frac{\delta \vec{r}\,'}{\delta t} &\quad : \quad \text{両方考慮してる} \rightarrow \text{相対速度}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\delta \vec{r}\,'}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right) + \frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} \\
&= \frac{\delta^2 \vec{r}\,'}{\delta t^2} + \omega \times \frac{\delta \vec{r}\,'}{\delta t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times \left(\frac{\delta \vec{r}\,'}{\delta t} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'\right) + \frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} \\
&= \frac{\delta^2 \vec{r}\,'}{\delta t^2} + 2\omega \times \frac{\delta \vec{r}\,'}{\delta t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + \frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' + 2\vec{\omega} \times \frac{\delta \vec{r}\,'}{\delta t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + \frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2}}$$

慣性系 Σ においては運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$ が成り立つから,

$$\boxed{m\vec{a}\,' = \vec{F} \underbrace{- 2m\vec{\omega} \times \vec{v}\,' - m\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}\,' - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') - m\frac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2}}_{\text{慣性力}}}$$

$$
\begin{array}{lll}
-2m\vec{\omega}\times\vec{v}' & : & \text{コリオリ力} \rightarrow \text{回転観測系で運動する物体に対して働く} \\
 & & \text{回転軸と物体の進行方向に垂直な向き} \\
-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') & : & \text{遠心力} \rightarrow \text{回転観測系の物体に対して働く} \\
 & & \text{回転軸から外側に向かう向き} \\
-m\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r} & : & \text{角速度が変化する際に働く} \\
 & & \rightarrow \text{普通, 観測系は一定回転するので考慮しなくてよい} \\
-m\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} & : & \text{並進力}
\end{array}
$$

コリオリ力は上 (右ねじの先っちょ側) から見て進行方向右向きに働く

→ 南半球だと裏から見てる形になるので左向き

ex1) $\omega = 0, \vec{R} = \vec{v}_0 t \quad \vec{v}_0$ は定ベクトル $\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2}$

$$\therefore m\vec{a}' = F \quad \text{ガリレイ不変性}$$

この変換 $\vec{r} = \vec{r}' + vt$ をガリレイ変換という.

ex2) $\vec{\omega} = 0, \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{\alpha}$

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}$$

電車の中に糸で吊るされた質点

慣性系

$$\begin{cases} T\cos\theta - mg &= 0 \\ T\sin\theta &= m\alpha \end{cases}$$

非慣性系

$$\begin{cases} T\cos\theta - mg &= 0 \\ T\sin\theta - m\alpha &= 0 \end{cases}$$

→静止しているように見える

ex3) $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}, \vec{R} = 0$

$$\begin{aligned} m\vec{a}' &= \vec{F} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') \\ &= \vec{F} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' - m\vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{r}') + m\omega^2\vec{r}' \end{aligned}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} \quad \text{ベクトル三重積}$$

$$\text{xy 平面内での運動} \rightarrow \vec{\omega}\cdot\vec{r}' = 0$$

$$\therefore m\vec{a}' = \vec{F} - 2m\vec{\omega}\times\vec{v}' + m\omega^2\vec{r}'$$

$$\begin{cases} m\dfrac{\mathrm{d}^2x'}{\mathrm{d}t^2} = F'_x + m\omega^2 x' + 2m\omega\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} \\ m\dfrac{\mathrm{d}^2y'}{\mathrm{d}t^2} = F'_x + m\omega^2 x' - 2m\omega\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

補足：実際, xy 平面内の運動でなくても,

$$m(\vec{\omega}\cdot\vec{r}')\vec{\omega} = m\omega z'\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m\omega^2 z' \end{pmatrix} \quad \text{であるから,}$$

$$-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = m\omega^2\vec{r}' - m(\vec{\omega}\cdot\vec{r}')\vec{\omega}$$

$$= \begin{pmatrix} m\omega^2 x' \\ m\omega^2 y' \\ 0 \end{pmatrix}$$

となって, 遠心力の x', y' 方向成分は変わらず, z' 方向には遠心力は働かない.

- 慣性系で角速度 ω （観測系の角速度と同じ角速度）で回転している質点
  - 慣性系

$$\begin{cases} x = r\cos\omega t \\ y = r\sin\omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -m\omega^2 x \\ F_y = m\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -m\omega^2 y \end{cases}$$

  - 非慣性系

$$\begin{cases} x' = r \\ y' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x' + m\omega^2 x = 0 \\ F_y' + m\omega^2 y = 0 \end{cases}$$

- 慣性系で静止している質点
  - 慣性系

$$\begin{cases} x = \text{const.} \\ y = \text{const.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \end{cases}$$

  - 非慣性系 $\rightarrow$ 座標系の回転と反対向きに回転して見える
    $\vec{v}'$ は半径に直角向きに見える
    半径 r の円運動 $\rightarrow v = \omega r$

$$m\omega^2 r - 2m\omega(\omega r) = -m\omega^2 r$$

$\uparrow$ これが向心力になって回転しているように見える

8　多体問題と保存法則

8.1　二体問題

2 物体間の相対座標にのみ依存するような力を考える

$$\begin{cases} m_1 \dfrac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) & (1) \\ m_2 \dfrac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}_{21}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) & (2) \end{cases}$$

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \ \text{：作用・反作用の法則}$$

- (1) + (2)

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} + m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

$$\therefore (m_1 + m_2) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \left(\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \right) = 0$$

$M = m_1 + m_2,\ \vec{R} = \dfrac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ とすると, $\boxed{M \dfrac{\mathrm{d}^2 \vec{R}}{\mathrm{d}t^2} = 0}$：重心運動には力が働かない.

$\vec{p} = M \dfrac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t} = m_1 \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t} + m_2 \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_2}{\mathrm{d}t} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$：全運動量（重心運動量）

- $(1) \times m_2 - (2) \times m_1$

$$m_1 m_2 \left(\frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} \right) = m_2 \vec{F}_{12} - m_1 \vec{F}_{21}$$

$$m_1 m_2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = (m_1 + m_2) \vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\boxed{\mu \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}(\vec{r})}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{：換算質量} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad \text{：相対座標}$$

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \mu \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\vec{r}_2}{\mathrm{d}t} \right) \\ &= \frac{m_2 \vec{p}_1 - m_1 \vec{p}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{を相対運動量という} \end{aligned}$$

	重心運動	相対運動
質量	$M = m_1 + m_2$	$\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$
座標	$\vec{R} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$	$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$
運動量	$\vec{P} = M\dfrac{\mathrm{d}\vec{R}}{\mathrm{d}t}$	$\vec{p} = \mu\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$
	$= \vec{p}_1 + \vec{p}_2$	$= \dfrac{m_2\vec{p}_1 - m_1\vec{p}_2}{m_1 + m_2}$
運動方程式	$M\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{R}}{\mathrm{d}t^2} = 0$	$\mu\dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{F}(\vec{r})\ (= \vec{F}_{12}(\vec{r}))$

二体問題は重心運動と相対運動に帰着される

$$
\begin{aligned}
\text{全体の角運動量 } l_1 + l_2 &= \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 \\
&= \left(\vec{R} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}\right) \times \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{P} + \vec{p} \\
&+ \left(\vec{R} - \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}\right) \times \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{P} - \vec{p} \\
&= \vec{R} \times \vec{P} + \vec{r} \times \vec{p} \\
&= \underset{\uparrow \text{重心}}{\vec{L}} \quad + \quad \underset{\uparrow \text{相対}}{\vec{l}}
\end{aligned}
$$

$\vec{F}$: 保存力 $\to$ $V(\vec{r})$ が定義できて、 $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$
力学的エネルギー

$$
\begin{aligned}
&\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(\vec{r}) \\
&= \frac{1}{2m_1}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{P} + \vec{p}\right)^2 + \frac{1}{2m_2}\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{P} - \vec{p}\right)^2 + V(\vec{r}) \\
&= \frac{1}{2(m_1+m_2)}P^2 + \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)p^2 + V(\vec{r}) \\
&= \underset{\text{重心}}{\frac{P^2}{2M}} + \underset{\text{相対}}{\frac{p^2}{2\mu}} + V(\vec{r})
\end{aligned}
$$

保存法則

- 運動量の保存

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{12} \\
\dfrac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{21}
\end{cases}
\quad \to \quad
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \\
&\therefore \vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const.}
\end{aligned}
$$

- 角運動量の保存（中心力）

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}l_1}{\mathrm{d}t} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} \\ \dfrac{\mathrm{d}l_2}{\mathrm{d}t} = \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(\vec{l}_1 + \vec{l}_2)}{\mathrm{d}t} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{21} \\ &= \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- エネルギーの保存（保存力）

$$\begin{cases} \\ \dfrac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{12} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{21} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_2}{\mathrm{d}t} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}(\vec{T}_1 + \vec{T}_2)}{\mathrm{d}t} &= \vec{F}_{12} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t} + \vec{F}_{21} \frac{\mathrm{d}\vec{r}_2}{\mathrm{d}t} \\ &= \vec{F}(\vec{r}) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(\vec{r}) \\ \therefore T_1 + T_2 + V(r) &= \mathrm{const.} \end{aligned}$$

8.2 多体問題

- 運動量の保存

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \quad F_{ij} : i \leftarrow j$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \vec{p}_i\right) = \sum_i \left(\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}\right) = 0 \quad (\because \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji})$$

$$\therefore \sum_i \vec{p}_i = \mathrm{const.} \quad \text{全運動量は保存する}$$

- 角運動量の保存（中心力）

$$\frac{\mathrm{d}\vec{l}_i}{\mathrm{d}t} = \vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i \vec{l}_i\right) = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}\right) = 0$$

$$\therefore \sum_i \vec{l}_i = \mathrm{const.} \quad \text{全角運動量は保存する}$$

- エネルギーの保存（保存力）

$$\frac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}t} = \left(\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i T_i\right) = \sum_i \left(\left(\sum_{j\neq i} \vec{F}_{ij}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}\right) = 0$$

$$\therefore \sum_i T_i + \sum_{i<j} V_{ij} = \mathrm{const.} \quad \text{全力学的エネルギーは保存する}$$

参考：**保存則と対称性**

保存則		対称性
運動量の保存	$\longleftrightarrow$	空間の一様性（並進不変）
角運動量の保存	$\longleftrightarrow$	方向の一様性（回転不変）
エネルギーの保存	$\longleftrightarrow$	時間の一様性（時間へ威信不変）