いくつかまともにシケプリっぽいこと書きました. 程々に参考にしてください.

**■過去問**　過去の出題内容と必要な講義内容を簡単に一覧しておきます. 剛体の運動は講義でやってないので出ない, と思います.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 99 年 | ロケット | 一次元運動, 万有引力, エネルギー保存 | |
| | 雨滴 | 一次元運動, 質量変化, 運動量と力積の関係 | |
| | ビリヤード | 剛体の運動 | |
| 00 年 | 静止衛星 | 円運動, 万有引力, エネルギー保存 | |
| | バネ | 一次元運動（振動） | レポート課題 |
| | 机の上の小球 | 円運動, 極座標, 角運動量保存, エネルギー保存 | レポート課題 |
| 01 年 | 台から垂れ下がったロープ | エネルギーと仕事の関係 | |
| | ロケット | 一次元運動, 万有引力, エネルギー保存 | |
| | 円板 | 剛体の運動 | |
| 03 年 | バネ | 一次元運動（振動） | レポート課題 |
| | ロケット | 一次元運動, 万有引力, エネルギー保存 | |
| | 机の上の小球 | 円運動, 極座標, 角運動量保存, エネルギー保存 | レポート課題 |
| 04 年 | スカイダイヴィング | 一次元運動 | レポート課題 |
| | 雨滴 | 一次元運動, 質量変化, 運動量と力積の関係 | |
| | 回転するバネ | 円運動, 極座標, 角運動量保存, エネルギー保存 | |
| 06 年 | 斜面の上の物体 | | |
| | スウィングバイ | | |
| | 惑星の軌道 | 極座標, 角運動量保存, エネルギー保存 | 講義中にやった |
| 07 年 | 振り子 | 振動, エネルギー保存 | |
| | ロケット | 一次元運動, 万有引力, エネルギー保存 | |
| | 機関銃 | 一次元運動, 質量変化, 運動量と力積の関係 | |
| 08 年 | ロケット | 一次元運動, 万有引力, エネルギー保存 | |
| | 雨滴 | 一次元運動, 質量変化, 運動量と力積の関係 | |
| | 回転するバネ | 円運動, 極座標, 角運動量保存, エネルギー保存 | |

見ていただければ分かるとおり, 過去問と同じ題材が多いです（06 年なんかは新出ばっかですが）. ただし題材は同じでも, 小問の内容を微妙に変えてあることも多いようです.

**■頻出問題**　ロケットの問題と雨滴の問題が頻出のようです. ロケットの問題は去年と一昨年, 2 連続で出てるようなので, 今年も出る確率が高いのやら低いのやら分かりませんが…….

**ロケット（？）**　地表からロケットを発射させて, 無限遠まで脱出させます. 毎回出題内容は違いますが, 大体以下のどれかです.

- 無限遠への脱出可能速度を求める
- 速度, 座標を求める
- さらに座標のテイラー展開の意味を問われる

$$0 = \frac{1}{2}mv_e^2 - G\frac{mM}{R}$$
$$mg = G\frac{mM}{R^2}$$
$$\therefore v_e = \sqrt{2gR} \quad \text{いわゆる第二脱出速度}$$

速度 $v$ については, 地表からの高さ $z$ で表せという形で出るようです.

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R+z} = \frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM}{R}$$
$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gR\frac{z}{R+z}}$$

さらに座標については, 上で求めた脱出速度で発射させた場合のみについて聞かれるみたいです. この場合, もちろん上の速度の式で $v_0 = \sqrt{2gR}$ を代入してもいいですし, あるいはこのときはエネルギー保存の式が簡単な形になっているので, そちらから直接行ってもいいです.

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R+z} = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+z}}$$
$$z = R^{2/3}\left(\sqrt{R} + \frac{3}{2}\sqrt{2g}t\right)^{2/3} - R$$

あとは, テイラー展開です.

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = (2g)^{1/2}R^{2/3}\left(R^{1/2} + \frac{3}{2}\sqrt{2g}t\right)^{-1/3}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = -gR^{2/3}\left(R^{1/2} + \frac{3}{2}\sqrt{2g}t\right)^{-4/3}$$
$$\frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}t^3} = 2^{3/2}g^{3/2}R^{2/3}\left(R^{1/2} + \frac{3}{2}\sqrt{2g}t\right)^{-7/3}$$

$$z(0) = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(0) = \sqrt{2gR}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}(0) = -g \quad \frac{\mathrm{d}^3z}{\mathrm{d}t^3}(3) = (2g)^{3/2}R^{7/9}$$

$$\therefore z = \underset{\text{等速による近似}}{\sqrt{2gR}t} \quad \underset{\text{重力の 1 次近似/一様重力 } mg \text{ による近似}}{-\tfrac{1}{2}gt^2} \quad \underset{\text{2 次以上の重力の効果}}{+\tfrac{2}{3}g\sqrt{2g}R^{7/9}} + \mathrm{O}(t^4)$$

**雨滴**　水蒸気を付着させながら質量を増す雨滴の問題もよく出るようです. 設定は毎回一緒で, 静止している飽和水蒸気中を雨滴が落下しながら, 単位時間・単位体積あたり質量 $\sigma$ の水蒸気を付着させる. また雨滴の単位体積あたりの質量は $\rho$ である, というものです.

- 半径 $a = a_0 + kt$ $(k = \sigma/\rho)$ の導出
- 雨滴がうける力積を求める
- 雨滴が満たす微分方程式を求める

- 雨滴の速度や座標を求める

などなど.

$$\sigma = \frac{1}{S}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \quad S = 4\pi a^2$$

$$\begin{aligned} m = \rho V &= \frac{4}{3}\rho\pi a^3 \\ \therefore \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} &= 4\rho\pi a^2 \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} \\ \therefore 4\rho\pi a^2 \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= 4\sigma\pi a^2 \\ \therefore \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{\sigma}{\rho} \\ \therefore a &= a_0 + kt \end{aligned}$$

ここからは二つの方法があります. どちらも運動量と力積の関係を使います. 雨滴に付着する水蒸気は元は静止している（運動量が 0）でることに注意してください.

- 時刻 0 から $t$ までの間に受けた力積を求める.
  08 年問題文に従って, $v_0$ と $a_0$ は無視できるほど小さいとします. 質量 $m$ が変数であることに注意してください.

$$\begin{aligned} \text{力積} \int_0^t mg\,\mathrm{d}t &= \int_0^t \frac{4}{3}\rho\pi(kt)^3 g\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{k^3\rho\pi g}{3}t^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore mv - 0 &= \frac{k^3\rho\pi g}{3}t^4 \\ \iff \frac{4}{3}k^3\rho\pi t^3 v &= \frac{k^3\rho\pi g}{3}t^4 \\ \iff v &= \frac{gt}{4} \end{aligned}$$

- 微小時間について運動量の変化をとる方法
  微小時間について, 運動量の変化と力積の関係を適用して,

$$\begin{aligned} (m+\Delta m)(v+\Delta v) - mv &= mg\Delta t \\ m\Delta v + \Delta m\ v &= mg\Delta t \quad \text{二次の微小量を無視} \\ \therefore m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v &= mg \end{aligned}$$

  $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 4\sigma\pi a^2 = 4\sigma\pi(a_0+kt)^2$, $m = \frac{4}{3}\rho\pi(a_0+kt)^3$ より,

$$\therefore \frac{4}{3}\rho\pi(a_0+kt)^3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 4\sigma\pi(a_0+kt)^2 v = \frac{4}{3}\rho\pi(a_0+kt)^3 g$$

  これが雨滴の運動を表す微分方程式になります.

力尽きてきたので……上げてもらってる（はず）の過去問の 04 年のがご丁寧にも解答付きなんで, そちらを見てください. なんか微分方程式がやたら面倒くさいみたいです. 僕の能力を越えてるので解説できません.
とりあえず答えだけ引っ張ってきておきます（合ってるかたしかめてません）.

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{g}{4k}(a_0+kt)^4 - a_0^4(a_0+kt)^3 + \frac{a_0^3}{(a_0+kt)^3}v_0 \\
z &= z_0 + \frac{g}{4k}\left(a_0 t + \frac{1}{2}kt^2\right) - \frac{a_0^3}{2k}\left(v_0 - \frac{a_0 g}{4k}\right)\left(\frac{1}{(a_0+kt)^2} - \frac{1}{a_0^2}\right)
\end{aligned}
$$

**■質量が変化する問題**　上の雨滴の問題しかり, 配布された過去問の機関銃の問題しかり, 森松講師は質量が変化する問題が好きなのかもしれません.

質量が変化する場合, 普通の運動方程式 $m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F$ は使えません. 代わりに, $\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = F \iff \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v + m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F$ を使うことができます. が, これを使うと分裂・合体時の力積の取り扱いが微妙になりますので, **運動量の変化と力積の関係**を使ったほうがいいです. これは微小変化に適用して極限とると運動方程式と等価ですし, 上でやったみたいに 0 から $t$ までの幅にも適用できますし, 応用範囲が広いです.

雨滴の問題では合体する前の水蒸気は静止している設定でしたが, 配布されたものに載っている機関銃の問題などは, 分裂した微小部分も運動量を持っているので注意してください.

系への外力を $F$, 分裂・合体する微小部分の質量を $\Delta m$, 分裂後・合体前の微小部分の速度を $u$（相対速度で与えられる場合もあるので注意）として,

$$
\begin{aligned}
&\text{分裂} \quad (m-\Delta m)(v+\Delta v) + \Delta m u - mv = F\Delta t \\
&\text{合体} \quad (m+\Delta m)(v+\Delta v) - mv - \Delta m u = F\Delta t
\end{aligned}
$$

二次の微小量は無視して構いません.

**■双曲線関数**　第一回のレポート問題について質問を受けて思ったんですが, 双曲線関数は覚えておくと便利かもしれません.

$$
\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \qquad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \qquad
\begin{aligned}
\tanh t &= \frac{\sinh t}{\cosh t} \\
&= \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} \\
&= \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1} \\
&= \frac{1 - e^{-2t}}{1 + e^{-2t}}
\end{aligned}
$$

多分威力を発揮するのは微分においてで,

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cosh t = \sinh t \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sinh t = \cosh t \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tanh t = \frac{1}{\cosh^2 t}
$$

これら微分規則と下の式を使えば, 指数関数がたくさん出てくる関数の微分が楽にできます. たとえば第一回レポートの第二問なんかは大分楽になります（というか他に楽なやり方あったら教えてください）.

$$
\cosh 0 = 1 \quad \sinh 0 = 1 \quad \tanh 0 = 0
$$

微分規則の方は, 三角関数の微分の符号を全部 + にしただけですし, 0 での値は三角関数まんまです.