ここに数式を入力します。

2009 年度前期　数学１A　予想問題（教科書　§１,§６）

1.次の数列または関数の極限を求めよ。

(1)　$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$

(2)　$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}$

(3)　$\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n}{n^k}$

(4)　$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

(5)　$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+5x}+x)$

2.次の級数の収束・発散を判定せよ。収束の場合は絶対収束かどうかも調べよ。

(1)　$\sum\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

(2)　$\sum n\sin\frac{1}{n}$

(3)　$\sum\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

3,次の冪級数の収束半径を求めよ。

(1)　$\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2}x^n \ (a>0)$

(2)　$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\frac{(2n)!}{n!}x^n$

(3)　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}x^n$

(4)　$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$

4.A を空でなく有界なRの部分集合。このとき、集合$\{x-y; x,y\in A\}$の下限は$\inf A-\sup A$であることを示せ。

5.次の①②③の条件の同値を示せ。

①$a \le b$

②$\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon$

③$\forall \varepsilon > 0, a \le b + \varepsilon$

6.次の場合にＥの上限・下限を求めよ。

(1)$E = \left\{ \frac{m}{m+n} ; m, n \in \mathbb{N} \right\}$

(2)$E = \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} ; m, n \in \mathbb{N} \right\}$

7.$a, b \in \mathbb{R}, \{a_n\}, \{b_n\}$ は実数列。$a_n \to a (n \to \infty)$かつ$b_n \to b (n \to \infty)$であるとする。(1),(2)を示せ。

(1)$|a_n| \to |a| \ (n \to \infty)$

(2)$\min\{a_n, b_n\} \to \min\{a, b\} \ (n \to \infty)$

8.r は $r \geq 0$をみたす実数あるいは$+\infty$,$\{a_n\}$は実数列。$a_n \neq 0$ 及び,$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \to r \ (n \to \infty)$ が成り立つとする。(1),(2)を示せ。

(1)$0 \le r < 1 \Longrightarrow a_n \to 0 (n \to \infty)$

(2)$1 < r \Longrightarrow |a_n| \to +\infty (n \to \infty)$

9.次の定理を示せ。

定理(コーシーの収束条件)：

実数列$\{a_n\}$が収束するための必要十分条件は$\{a_n\}$がコーシー列となることである

ここに数式を入力します。

10. 実数列$\{a_n\}$の各$n \epsilon \mathbb{N}$に対して, $a_n > 0$かつ$1 \le (a_n)^n \le n$ が成り立つとき,$a_n \to 1\ (n \to \infty)$であることを示せ。

11. $a \epsilon I,\ I = [a, +\infty)$とおく。F はI上の実数値連続関数。
$f(x) \to +\infty\ (x \to +\infty)$が成り立つと仮定する。このとき関数f はI上での最小値を持つことを示せ。

12. 3次方程式,5次方程式など一般に奇数次方程式は実解をもつことを示せ。

ここに数式を入力します。

解答(考え方を[　]で示します)

1.(1)$\frac{1}{3}$ $[\int_0^n x^2 dx \leq \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} \leq \int_1^{n+1} x^2 dx]$

(2)1 [$\sqrt[n]{n} > 1$ より $\sqrt[n]{n} = 1 + h$ とおいて二項定理を用いる。]

(3)+∞ [$k = 1$ のとき $a > 1$ より $a = 1 + h$ とおいて二項定理。

$k > 1$ のとき$a^{\frac{1}{k}}(> 1) = a'$とおけば $k = 1$ の結果から$\frac{a'}{n} \to +\infty$

$$\text{ゆえに}\frac{a}{n^k} = \left(\frac{a'}{n}\right)^k \to +\infty]$$

(4)$\frac{1}{2}$ $[\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)} = (\frac{\sin x}{x})\frac{1}{1+\cos x}]$

(5)$-\frac{5}{2}$ [$x = -t$ と変数を変換したのち, 有理化]

2.(1)収束するが絶対収束しない

$$[0 < S_2 < S_4 < \cdots < S_{2n} < \cdots < S_{2n-1} < \cdots < S_3 < S_1,$$

$$\text{かつ}S_{2n-1} - S_{2n} = \frac{-1}{4n-1} \to 0(n \to \infty)\text{より}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = S \text{ したがって } \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

$$\text{また}\sum\frac{1}{2n-1} \geq \sum\frac{1}{n} \to \infty\ (n \to \infty)\text{より絶対収束でない}]$$

(2)発散$[n \sin\frac{1}{n} \to 1 \neq 0(n \to \infty)]$

(3)発散$[\sum\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \sum\frac{1}{n} \to \infty(n \to \infty)]$

3.(1)0$[\sqrt[n]{|a^{n^2}|} = a^n \to \infty(n \to \infty)]$ここに数式を入力します。

(2)0$[\,|\,(-1)^{n+1}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!}/(-1)^n\frac{(2n)!}{n!}\,| = 2(2n+1) \to \infty)]$

(3)1$[\,|\,\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\,| \to 1]$

ここに数式を入力します。

(4)4[$\left|\frac{(n+1)!^2}{(2n+2)!}\middle/\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right| = \frac{n+1}{2(2n+1)} \to \frac{1}{4}$]

4.片岡 1.7[下限に収束する数列がつくれるのはボルツァノ・ワイヤストラウスの定理によります。この手法は片岡の他の問題でも使われているので要チェックです]

5.片岡 1.3[他の問題の中で何回も定理として用いられているので挙げておきました]

6.片岡 1.5[プリントにある上限・下限である条件を用います。アルキメデスの原理をうまく適用することで上限より小さい上界(下限より大きい下界)の非存在が厳密に示せます]

7.仮定から$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2 \epsilon \mathbb{N}; n \geq N_1 \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon \cdots$①

$; n \geq N_2 \Longrightarrow |b_n - b| < \varepsilon \cdots$②

(1)　$n \geq N_1$のとき, ①より$|a_n| - |a| \leq |a_n - a| < \varepsilon$,

$$|a| - |a_n| \leq |a - a_n| < \varepsilon$$

$$\therefore \left||a_n| - |a|\right| < \varepsilon$$

まとめると,$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \epsilon \mathbb{N}; n \geq N_1 \Longrightarrow ||a_n| - |a|| < \varepsilon$

したがって$|a_n| \to |a| (n \to \infty)$

(2)　(i)$a_n \leq b_n, a \leq b$ のとき

$$|\min\{a_n, b_n\} - \min\{a, b\}| = |a_n - a| \leq \max\{|a_n - a|, |b_n - b|\}$$

ここに数式を入力します。

(ii)$a_n > b_n, a \le b$ のとき

$\min\{a_n, b_n\} - \min\{a, b\} = b_n - a$

$b_n - b \le b_n - a \le a_n - a$

$\therefore |\min\{a_n, b_n\} - \min\{a, b\}| \le \max\{|a_n - a|, |b_n - b|\}$

(iii)$a_n \le b_n, a > b$のとき

$\min\{a_n, b_n\} - \min\{a, b\} = a_n - b$

$a_n - a \le a_n - b \le b_n - b$

$\therefore |\min\{a_n, b_n\} - \min\{a, b\}| \le \max\{|a_n - a|, |b_n - b|\}$

(iv)$a_n > b_n, a > b$のとき

$|\min\{a_n, b_n\} - \min\{a, b\}| = |b_n - b| \le \max\{|a_n - a|, |b_n - b|\}\}$

以上より $|\min\{a_n, b_n\} - \min\{a, b\}| \le \max\{|a_n - a|, |b_n - b|\}$

N=$\max\{N_1, N_2\}$とすると

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \epsilon \mathbb{N}; n \ge N \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon \Longrightarrow |a_n - a| < \varepsilon, |b_n - b| < \varepsilon$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N \epsilon \mathbb{N}; n \ge N \Longrightarrow |\min\{a_n, b_n\} - \min\{a, b\}| < \varepsilon$

よって $\min\{a_n, b_n\} \to \min\{a, b\}$ $(n \to \infty)$

8.片岡 2.11[(1)$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$を$r' = r + \varepsilon$で押さえ,第 N 項以降を$r'$におきかえることで$|a_n|$を 0 に収束する式で押さえます]

9.教 p13 の 9.[十分条件であることを示す際に区間縮小法を用います]

ここに数式を入力します。

10.片岡 2.13[$a_n = 1 + h_n$とおいて二項定理を用いるんですが,展開式から取り出してくる項を工夫することでh_nを 0 に収束する式できれいに押さえられ,これを用いてa_nと 1 との差が 0 に収束することを示します]

11.片岡 7.6[最小値の定理を使うには閉区間でなければならないので,最小値≤f(a)であることを用いて最小値が存在する閉区間を絞ってやります]

12.教 p37 の 2