証明で使えるであろうテクニック集

数学の証明において、ちょっとした式変形や同値変形が解答を簡単にしてくれますね。でもそういうものこそなかなか閃かないもの･･･。ここでは数学演習の略解に載っていた、試験でも使えるかもしれないものを羅列します。困った時は順番に試してみてください。もしかしたら解けるかもしれません。

〇基本編

(0)絶対値を外す　中学レベルですかねこれは。

(1)三角不等式　必須です。

(2)二項定理　　これまた必須です。

(3)アルキメデスの原理　またもや必須。
　使用例としては任意の ε に対して $N\varepsilon>1$ が成り立つ N がとれる。
　あるいは１のかわりに証明で使っている適当な文字をおくこともあります。

(4)Σ計算　実際の数値を代入しての計算ではなく、Σ同士の引き算や足し算です。

(5)$ab-cd=ab-ad+ad-cd=a(b-d)+d(a-c)$なんていう計算も有効です。
　単純な式で出題された時にそれを思い切って複雑にするということも必要。ただ乱用すると
　普通に複雑になるだけの時も･･･

(6)背理法、対偶ってとっても便利です。どう考えても自明なものには背理法が有効ですと
　誰かが言っていた気がします。

〇集合編

小文字はある実数、大文字は実数の空でない部分集合を表すこととします。

(1)x は A の上界$\Longleftrightarrow \forall a\in A$、$x\geq a$　これは甘く見てはいけません。何気に使えます。

(2)$A\subset B$、A、B ともに上に有界であるとする。A、B の上界を U(A)、U(B)
　仮定$\Longrightarrow U(B)\subset UA$ または $\sup A\in B\Longrightarrow \sup A\leq \sup B$
　集合が集合を含んでいるかどうかというのは曖昧に見えて非常に強力です

(3)supA より小さい $\sup A-\alpha\,(\alpha>0)$は上界ではない。これを用いての加減乗除で上界でないなどの証明をあっさりしてくれます。またこの上界でない数と上限での区間に含まれる数 x をとるなどして単調性を使うなどというのも一興です。

〇数列編

(1)０に収束する数列として $\varepsilon n=1n$ とおいてみる。何かに収束するのを示す時には
　これを足したり引いたりすることもあります。

(2)n+1 と n の項で割るなり引くなりすると大小関係がわかり、単調数列かどうかもわかります。

〇関数編

(1)単調関数では適当に x、y をとり大小関係を付けて引き算をするのは基本ですね。

(2)連続関数の問題では、f が連続のときに、明らかに連続関数である別の関数を使って $F=f-g$ などとおくと、値域の変更ができて、考えやすくなったりします。

(3)$f(-x)=-f(x)$などの周期や奇関数、偶関数も忘れてはいけません。

(4)関数の問題では、新しい関数を解答の中で定義しても差し支えありません。与えられたものだ

けに固執せずに柔軟にいきましょう。
(5)平均値の定理や、コーシーの平均値の定理を使うためには、新しい関数を導入することも一つの手です。例えば f(x)= x2 とした時、g(t)=t3 として、fx=gx−g(0)x−0 とできます。
(6)連続関数 f(x)において、f′(x)>0 が定義域の任意の x でわかっているとき、y>□を用いて、
平均値の定理より fy−f(x)y−x=f′c>0 から fy>□x で、狭義単調がわかっちゃったり、
また狭義単調から導関数の符号もわかります。当たり前といえば当たり前ですけど。

○収束編
(1)fx−A<□ ここで、ε=A とおくと、f(x)>0 がわかります。−A とおくと負であることがわかります。また、ε のおきかたで、収束の定義から逆数をとれば発散も示せます。
(2)はさみうちは考えましょう。収束値を出す基本的原理です。

以上のものは僕の独断と偏見でかっこいい、なるほどと思ったものを載せました。見落としたり、不足したりっていうこともありますので、これが全部とは思わずに、試験中でも新たなスマートな解答を考え出してください。みなさん実は東大生なので、できると思います。基本的にそこら辺の人より数倍賢いはず。では試験頑張ってください。