NO.

DATE

数学II（2008年度夏学期期末試験解説）

$\boxed{1}$ 数II演習(3)の $\boxed{1}$ および数II演習(5)の $\boxed{3}$ 参照。

$\boxed{2}$ 拡大係数行列 $(A, \mathbb{b})$ を階段行列に変形する。

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & 1 \\ bc & ca & ab & abc \end{pmatrix}
\xrightarrow{(1)}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & 1-a \\ 0 & c(a-b) & b(a-c) & bc(a-1) \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{(2)}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & 1-a \\ 0 & 0 & (b-c)(a-c) & c(a-1)(b-1) \end{pmatrix}
$$

(1) (第1行)×$(-a)$, (第1行)×$(-bc)$をそれぞれ第2行, 第3行へ加える。
(2) (第2行)×cを第3行に加える。

ここで, 係数行列Aの行列式は $|A| = 1\cdot(b-a)\cdot(b-c)(a-c) = (a-b)(b-c)(c-a)$。
条件より $|A| \neq 0$ ∴ $a \neq b$ かつ $b \neq c$ かつ $c \neq a$ …(※).
これより $\mathrm{rank}(A, \mathbb{b}) = \mathrm{rank}\,A = 3$ となるからこの連立一次方程式は必ず解をもつ。
さらに変数は x, y, z の3つであるから, 解は一意に定まる。

条件(※)を考慮しながら, さらに変形を進める。

$$
\xrightarrow{(3)}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c(a-1)(b-1)}{(b-c)(a-c)} \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{(4)}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1-\frac{c(a-1)(b-1)}{(b-c)(a-c)} \\ 0 & b-a & 0 & 1-a+\frac{c(a-1)(b-1)}{(b-c)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c(a-1)(b-1)}{(b-c)(a-c)} \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{(5)}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1-\frac{c(a-1)(b-1)}{(b-c)(a-c)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1-a}{b-a}+\frac{c(a-1)(b-1)}{(b-a)(b-c)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c(a-1)(b-1)}{(b-c)(a-c)} \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{(6)}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{c(a-1)(b-1)}{(b-c)(a-c)}-\frac{1-a}{b-a}-\frac{c(a-1)(b-1)}{(b-a)(b-c)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1-a}{b-a}+\frac{c(a-1)(b-1)}{(b-a)(b-c)} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c(a-1)(b-1)}{(b-c)(a-c)} \end{pmatrix}
$$

(3) 第3行に $\frac{1}{(b-c)(a-c)}$ を掛ける。
(4) (第3行)×(-1), (第3行)×$(a-c)$をそれぞれ第1行, 第2行に加える。
(5) 第2行に $\frac{1}{b-a}$ を掛ける。
(6) (第2行)×(-1)を第1行に加える。

これより,

$$\begin{cases} x = 1 - \dfrac{c(a-1)(b-1)}{(b-c)(a-c)} - \dfrac{1-a}{b-a} - \dfrac{c(a-1)(b-1)}{(b-a)(b-c)} = -\dfrac{a(b-1)(c-1)}{(a-b)(c-a)} \\ y = \dfrac{1-a}{b-a} + \dfrac{c(a-1)(b-1)}{(b-a)(b-c)} = -\dfrac{b(c-1)(a-1)}{(a-b)(b-c)} \\ z = -\dfrac{c(a-1)(b-1)}{(b-c)(c-a)} \end{cases}$$

を得る。

$\boxed{3}$ (1) 教科書P. 82の系4.6.1参照。

(2) 数II演習(3)の$\boxed{3}$参照。

$\boxed{4}$ 教科書P. 89の定理4.6.9参照。

$\boxed{5}$ 範囲外と思われます。

〔余談〕
既にご存じの方もいるかもしれませんが,講義中に下川先生は次の4点をチェックすべきポイントとして挙げていました:

- 連立1次方程式
- 4次, n次行列式
- 4次の逆行列
- 行列に関する証明

この分野を中心に演習問題などの復習を行うとよいかもしれません。それでは,試験頑張りましょう。

〔追記・別解〕
$\boxed{2}$ クラーメルの公式を用いた解法.
上の解答から,行列式$|A|$は $|A| = (a-b)(b-c)(c-a)$.
教科書P. 111, 定理5.2.1の記号Δ_jを用いると,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \\ abc & ca & ab \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-1 & c-1 \\ 0 & ca(1-b) & ab(1-c) \end{vmatrix}$$

$$\overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} b-1 & c-1 \\ ca(1-b) & ab(1-c) \end{vmatrix}$$

$$= (b-1)\cdot ab(1-c) - (c-1)\cdot ca(1-b)$$

$$= -a(b-1)(c-1)(b-c)$$

(1) (第1行)×(−1), (第1行)×(−abc)をそれぞれ第2行, 第3行へ加える。

(2) 第1列に関して展開する。

同様にして,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & c \\ bc & abc & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & c-1 \\ bc(1-a) & 0 & ab(1-c) \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3 \begin{vmatrix} a-1 & c-1 \\ bc(1-a) & ab(1-c) \end{vmatrix}$$

$$= -(a-1)\cdot ab(1-c) + (c-1)\cdot bc(1-a).$$

$$= -b(c-1)(a-1)(c-a).$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \\ bc & ca & abc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & b-1 & 0 \\ bc(1-a) & ca(1-b) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^4 \begin{vmatrix} a-1 & b-1 \\ bc(1-a) & ca(1-b) \end{vmatrix}$$

$$= (a-1)\cdot ca(1-b) - (b-1)\cdot bc(1-a)$$

$$= -c(a-1)(b-1)(a-b)$$

以上から,

$$\begin{cases} x = \dfrac{\Delta_1}{|A|} = -\dfrac{a(b-1)(c-1)}{(a-b)(c-a)} \\ y = \dfrac{\Delta_2}{|A|} = -\dfrac{b(c-1)(a-1)}{(a-b)(b-c)} \\ z = \dfrac{\Delta_3}{|A|} = -\dfrac{c(a-1)(b-1)}{(b-c)(c-a)} \end{cases}$$

となる。