数学Ⅱ 添削的なもの

2/09/14 まず、恐らく問題ミスですが、示すべき等式の左辺は $\frac{d}{dx}F(x)$ ではなく $\frac{d}{dx}|F(x)|$ ですね。$F(x)$ は行列ですから。

ここで、示すべき式の辺を外して書いておきます。

$$\frac{d}{dx}|F(x)| = \begin{vmatrix} f_{11}'(x) & f_{12}'(x) & \cdots & f_{1n}'(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}'(x) & f_{22}'(x) & \cdots & f_{2n}'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}'(x) & f_{n2}'(x) & \cdots & f_{nn}'(x) \end{vmatrix}$$

(右辺を(※)とおく)

ちなみに $F(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{pmatrix}$ です。

行列式の定義より。(p.77 定義4.5.1 参照)

$$|F(x)| = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, f_{1\sigma(1)}(x) f_{2\sigma(2)}(x) \cdots f_{n\sigma(n)}(x)$$

↓同じもの

$$\therefore \underbrace{\frac{d}{dx}|F(x)|}_{\text{示すべき式の左辺}} = \sum_{\sigma\in S_n}\left(\mathrm{sgn}(\sigma)\ \cdots\cdots\right)'$$

積の微分公式を用いただけ

$$= \sum_{\sigma\in S_n}\Big\{\left(\mathrm{sgn}(\sigma) f_{1\sigma(1)}'(x) f_{2\sigma(2)}(x)\cdots f_{n\sigma(n)}(x)\right) + \left(\mathrm{sgn}(\sigma) f_{1\sigma(1)}(x) f_{2\sigma(2)}'(x)\cdots f_{n\sigma(n)}(x)\right) + \cdots + \left(\mathrm{sgn}(\sigma) f_{1\sigma(1)}(x) f_{2\sigma(2)}(x)\cdots f_{n\sigma(n)}'(x)\right)\Big\}$$

行列式の定義より

$$\text{ここで、}\underbrace{(※)}_{\text{示すべき式の右辺}} = \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma) f_{1\sigma(1)}'(x) f_{2\sigma(2)}(x)\cdots f_{n\sigma(n)}(x) + \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma) f_{1\sigma(1)}(x) f_{2\sigma(2)}'(x)\cdots f_{n\sigma(n)}(x) + \cdots + \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma) f_{1\sigma(1)}(x) f_{2\sigma(2)}(x)\cdots f_{n\sigma(n)}'(x)$$

Σをまとめただけ

$$= \sum_{\sigma\in S_n}\Big\{\left(\mathrm{sgn}(\sigma) f_{1\sigma(1)}'(x) f_{2\sigma(2)}(x)\cdots f_{n\sigma(n)}(x)\right) + \left(\mathrm{sgn}(\sigma) f_{1\sigma(1)}(x) f_{2\sigma(2)}'(x)\cdots f_{n\sigma(n)}(x)\right) + \cdots + \left(\mathrm{sgn}(\sigma) f_{1\sigma(1)}(x) f_{2\sigma(2)}(x)\cdots f_{n\sigma(n)}'(x)\right)\Big\}$$

よって、これは $\frac{d}{dx}|F(x)|$ を変形したものと等しいので、これで証明は終わりです。

テストに出るようなことがあったら、もっと簡潔な答案で良いと思います。