数学 IB 理I 28-33

計算重視の微積

河澄響矢 kawazumi@ms.u-tokyo.ac.jp

単位、成績について

・期末テストの成績による。

準教科書

三宅敏恒「入門微分積分」培風館

・IAとIBのちがい

IA：論理 } 重視

IB：計算

具体的に

$f'(x)=0 \Rightarrow f(x)=\mathrm{const}$

$\Uparrow$

平均値の定理

$\Uparrow$

Rollの定理

Rollの定理 $a<b$, 実数 $(a, b \in \mathbb{R})$ 実数全体の集合 の元である

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ （閉区間 $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ =

連続函数 fは$[a,b]$の各点で定義されて実数に値もつ函数

が微分可能であって

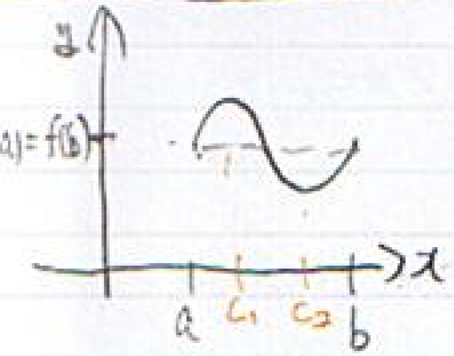
$f(a)=f(b)$ をみたす。

$\Rightarrow$ ある $c \in]a,b[$ （開区間 $]a,b[= (a,b) = \{x \in \mathbb{R}, a<x<b\}$

において、$f'(c)=0$

が成りたつ。

Rollの定理 の証明のあらすじ



(＊) 閉区間 $[a,b]$ の上で定義された連続函数は 最大値, 最小値をもつ

$f(c_1)$　　$f(c_2)$

場合分け

(I) c_1, c_2 が いずれも端点 a, b の場合

$$f(c_1) = f(a) = f(b) = f(c_2)$$

つまり f は定数 ⇒ どこでも $f'(c)=0$

(II) c_1, c_2 の少くとも一方は端点ではない場合

これを c とすれば $f'(c) = 0$

(＃) 「実数の完備性」 ← 「上に有界な集合は上限をもつ」

「有界単調増大数列は収束する」

→ IA：厳密に証明する

IB：直観的に明らか

例 $\mathbb{Q}$ = 有理数

$$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{if } x > \sqrt{2} \\ 0 & \text{if } x < \sqrt{2} \end{cases}$$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

すべての $x \in \mathbb{Q}$ において

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x)\right) = 0$$

しかし、fは定数でない。

$\binom{n}{k} = {}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

§1 偏微分の定義 (準教科書 §4, 1-2 p.83〜88)
partial diferential

$f(x)$: 一変数函数

$\frac{df}{dx} = f'(x) \overset{def}{=} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x))$ ← 定義 definition　fの導函数 (delivative)

例 $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

証) 帰納法, 二項定理

$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$　(a: 定数)

$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

$\frac{d}{dx}\sin(ax) = a\cos(ax)$　(a: 定数)

$f(x, y)$ 二変数函数　∂: (ラウンド)ディー

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y) \overset{def}{=} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x+h, y) - f(x, y))$

yを定数とみなして (x, y) を xで微分する

$f(x, y)$ の xに関する 偏導関数 (partial derivative)

$\frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) \overset{def}{=} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(x, y+h) - f(x, y))$

xを定数とみなして yで微分する

$f(x, y)$ の yに関する 偏導関数

例) $\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^3) = 2xy^3$　　$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3) = 3x^2y^2$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}((x+h)^2y^3 - x^2y^3)$　　$\frac{\partial}{\partial y}(x^3) = 0$

$= y^3 \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}((x+h)^2 - x^2)$

Date

$\frac{\partial}{\partial x}(\sin(xy)) = y\cos(xy)$

↑ xyをxで微分したもの.

$\frac{\partial}{\partial y}(\sin(xy)) = x\cos(xy)$

$f(x,y,z)$ 三変数函数

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = f_z(x,y,z) \overset{def}{=} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(f(x,y,z+h) - f(x,y,z)\right)$$

xとyを定数とみなして zについて微分する.

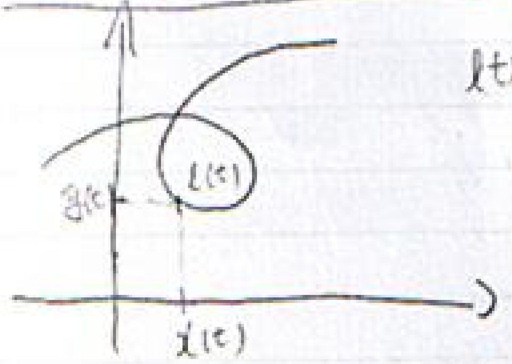
$f(x_1, x_2, \cdots x_n)$ $1 \leq i \leq n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \cdots x_n) = f_{x_i}(x_1, \cdots x_n) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(f(x_1, \cdots x_{i-1}, x_i+h, x_{i+1}, \cdots x_n) - f(x_1, \cdots x_n)\Big)$$

例 $\frac{\partial}{\partial z}(x^2y^3z^5) = 5x^2y^3z^4$

$\frac{\partial}{\partial z}\sin(xyz) = xy\cos(xyz)$

合成函数の微分 (Chain rule)



$l(t) = (x(t), y(t))$ 平面$\mathbb{R}^2$上の曲線

$f(x,y)$: 二変数函数

$f(x(t), y(t))$ tの関数になる.

$$\frac{d}{dt}f(x(t), y(t))$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{dy}{dt}(t) \quad \text{(Chain rule)}$$

証明は あとまわし

↑ 一次近似の考え方.

$x(u,v)$, $y(u,v)$

x, y が二変数 u, v の函数だとする

$$\frac{\partial}{\partial u} f(x(u,v), y(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$$

(証) v を固定して

$l(t) = (x(t,v), y(t,v))$ に chain rule を適用する.

$$\begin{cases} \left.\dfrac{d}{dt} x(t,v)\right|_{t=u} = \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) \\ \left.\dfrac{d}{dt} y(t,v)\right|_{t=u} = \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) \end{cases}$$

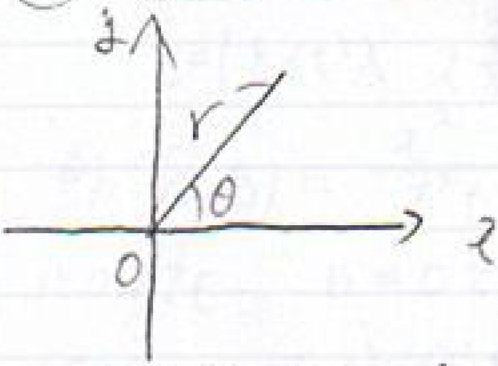
略して書く

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

同様に

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

例 平面極座標



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \begin{pmatrix} r > 0 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

たとえば $f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ について

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + r^{-2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2$$ が成立つ.

Date

chain rule

(証) $\frac{df}{dr} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}$

chain rule

$= \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}$

$\frac{1}{r}\frac{df}{d\theta} = \frac{1}{r}\frac{df}{dx}\frac{dx}{d\theta} + \frac{1}{r}\frac{df}{dy}\frac{dy}{d\theta}$

$= -\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}$

$f(x_1, x_2, \cdots x_n)$

$x_i = x_i(t) \quad 1 \leq i \leq n$

$\frac{d}{dt} f(x_1(t), x_2(t), \cdots x_n(t))$

$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t), \cdots x_n(t)) \frac{dx_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1(t), \cdots x_n(t)) \frac{dx}{dt}$

$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \cdots x_n(t)) \frac{dx_i}{dt}$

略して書くと

$= \sum_{i=1} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}$

同次多項式 (homogene)

$f(x,y) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} y^k \quad (a_k:\text{定数})$

$= a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n$

n次同次多項式

例 $x + 2y$ 1次同次

$x^2 - xy + y^2$ 2次同次

No.

Date

Euler の公式

$f(x,y)$: n次同次

$\Rightarrow x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf$

(証) $\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)(x^{n-k}y^k)$

$= x(n-k)x^{n-k-1}y^k + y\,k\,x^{n-k}y^{k-1}$

$= (n-k)x^{n-k}y^k + kx^{n-k}y^k$

$= nx^{n-k}y^k$

(別証) $t \in R$

$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$

$\left(\overset{\shortparallel}{\sum a_k (tx)^{n-k}(ty)^k} = \overset{\shortparallel}{t^n \sum a_k x^{n-k}y^k} \right)$

$\frac{dx}{dt} = x$

両辺をtで微分する

$\frac{d}{dt}f(tx,ty) \overset{\text{chain rule}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)\,\underbrace{x}_{\frac{d}{dt}tx} + \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\,\underbrace{y}_{\frac{d}{dt}ty}$

$\overset{\shortparallel}{\frac{d}{dt}}(t^n f(x,y)) = nt^{n-1}f(x,y)$

$t=1$を代入 $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = nf(x,y)$

例 $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

について $n=0$ で

Euler の公式が成立つ

$\left(\text{(∵)}\ f(tx,ty) = \frac{t^2(x^2-y^2)}{t^2(x^2+y^2)} = f(x,y) \right)$

Date

p86~91, p95

復習　$f(x)$ … 一変数函数　$a \in \mathbb{R}$

$$\frac{df}{dx}(a) = f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(f(a+h) - f(a)\right)$$

$f(x,y)$ … 二変数関数　$(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = f_x(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(f(a+h,b) - f(a,b)\right)$$

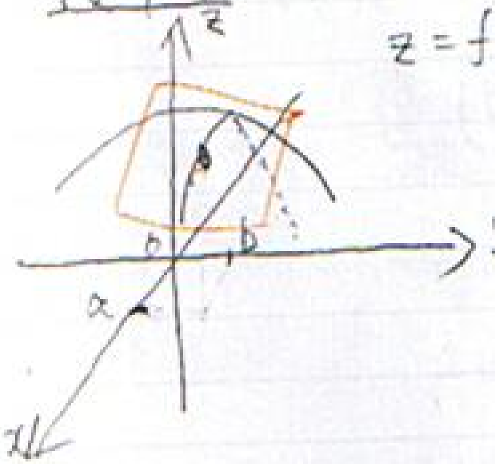
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = f_y(a,b) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(f(a,b+h) - f(a,b)\right)$$

(注) 一変数函数 については d を使い
多変数函数 については ∂ 〃

$$\left.\frac{d}{dt}f(t,y)\right|_{t=x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

↑ yを定数とみなす

接平面



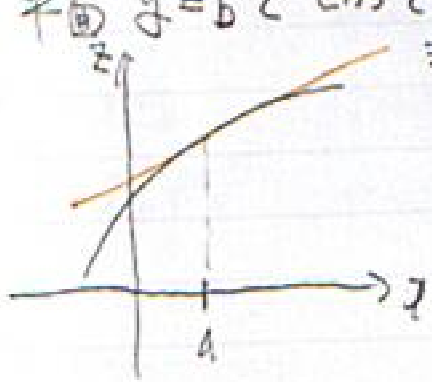
$z = f(x,y)$　点$(a,b,f(a,b))$ における
グラフ $z = f(x,y)$ の接平面を求める
ある p, q によって

$$z - f(a,b) = p(x-a) + q(y-b)$$

と表わされる

$\left(z = px + qy + r \quad (p,q,r \in \mathbb{R}) \right)$

平面 $y=b$ で切ってみる



$z - f(a,b) = p(x-a)$
$z = f(x,b)$ に接している

$p = (x=a$ での $z=f(x,b)$ での接線の傾き$)$

$$= \left.\frac{d}{dx}f(x,b)\right|_{x=a} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$

$$= f_x(a,b)$$

平面 $x=a$ で切ると、同様にして

$$q = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = f_y(a,b)$$

接平面　$z - f(a,b) = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$

いいかえると、(x,y) が (a,b) に十分近いとき.

(#) $f(x,y) \fallingdotseq f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$

$f(x,y)$ の (a,b) のまわりでの一次近似

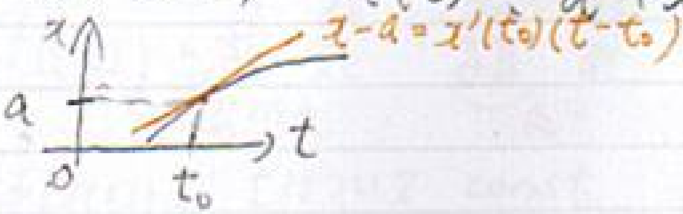
chain rule

$$\left[\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dt}\right]$$

の「説明」

$t = t_0$ で考える. $(x(t_0), y(t_0)) = (a,b)$ とおく.

$t = t_0$ の近くで, $x(t) \fallingdotseq a + x'(t_0)(t - t_0)$



同様に、

$y(t) \fallingdotseq b + y'(t_0)(t - t_0)$

これらを (#) に代入する.

$$f(x(t), y(t)) - f(a,b) \fallingdotseq f_x(a,b)(x(t) - a) + f_y(a,b)(y(t) - a)$$

$$\fallingdotseq f_x(a,b)\,x'(t_0)(t - t_0) + f_y(a,b)\,y'(t_0)(t - t_0)$$

ここで

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \Big|_{t=t_0}$$

$$= \lim_{t \to t_0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(a,b)}{t - t_0}$$

$$= f_x(a,b)\,x'(t_0) + f_y(a,b)\,y'(t_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$x(u,v)$　$y(u,v)$；二変数 u, v の関数

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}\right) \boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}}$$

Jacobi行列 →

とくに、$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}$ のように逆に解けたとする.

$f = u$ を考える.

$$\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial u}\ \ \frac{\partial u}{\partial v}\right)}_{(1,\ 0)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\ \ \frac{\partial u}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

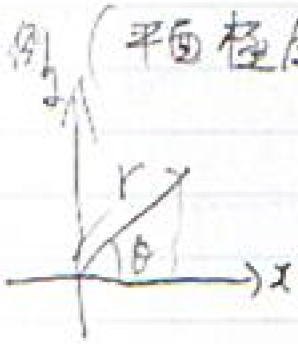
$f = v$ についても同様.

これらをくみあわせると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

互いに逆行列になっている

例（平面極座標）



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \theta}{\partial y}$ をもとめる

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

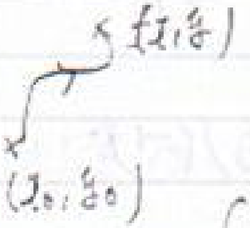
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = -\dfrac{1}{r}\sin\theta = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\[2ex] \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{1}{r}\cos\theta = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

chain rule の別の応用

$$\left[\begin{array}{l} f(x,y): \text{二変数関数} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \Rightarrow f: \text{const} \end{array}\right]$$ 証明

(証明) (x_0, y_0) をとって固定する

すべての (x,y) について $f(x,y) = f(x_0, y_0)$ となることを示せば良い。



曲線 $l(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0,1]$ を

$l(0) = (x_0, y_0)$, $l(1) = (x,y)$ となるようにする

(たとえば 線分 $((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty)$ をとる)

$$\frac{d}{dt} f(l(t)) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{\substack{\shortparallel \\ 0\ \text{仮定}}} \cdot \frac{dx}{dt} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{\substack{\shortparallel \\ 0\ \text{仮定}}} \cdot \frac{dy}{dt} = 0$$

$f(l(t))$ は t について const

とくに $f(x,y) = f(l(1)) = f(l(0)) = f(x_0, y_0)$

$R^2 - (y\text{軸})$ 上の関数

$$f(x,y) = \frac{x}{|x|}$$

は $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ だが、const ではない。

$f = f(x,y)$ について

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow f(x,y) = g(x)$ 　 $g(x)$: x の関数

(証)($\Rightarrow$) y_0 をとる　 $g(x) \overset{\text{def}}{=} f(x, y_0)$ と定義する

x をとめて $\dfrac{d}{dt} f(x,t) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,t) = 0$

$f(x,t)$ は t について const

$f(x,y) = f(x, y_0) = g(x)$

($\Leftarrow$) $\dfrac{\partial}{\partial y}(g(x)) = 0$

No.

Date

問題 二変数関数 $f(x,y)$ であって

$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ をみたすものをすべてもとめよ

$f(x,y) = g(x-y)$ $g(u)$: uの関数

(ヒント) 変数変換

$\begin{cases} u = x-y \\ v = y \end{cases} \iff \begin{cases} x = u+v \\ y = v \end{cases}$

とすると $\frac{\partial f}{\partial v} = 0$ なので $f(x,y) = g(u) = g(x-y)$

$\frac{\partial}{\partial x} g(x-y) + \frac{\partial}{\partial y} g(x-y) = g'(x-y) \times 1 + g'(x-y)(-1)$

$= 0$

極大, 極小

$y=f(x)$ が $x=a$ で 極大 (maximal)
$\Rightarrow f'(a)=0$

(証) $h>0$ で充分小さいとき

$\underset{\underset{0}{\vee}}{\frac{1}{h}}\{\underset{\underset{0}{\text{Ⅱ∧}}}{f(a+h)-f(a)}\} \leqq 0$ 極大性

$h\to 0$

$f'(a)\leqq 0$

$h<0$ で充分小さいとき

$\underset{\text{負}}{\frac{1}{h}}\{\underbrace{f(a+h)-f(a)}_{\text{負}}\}\geqq 0$

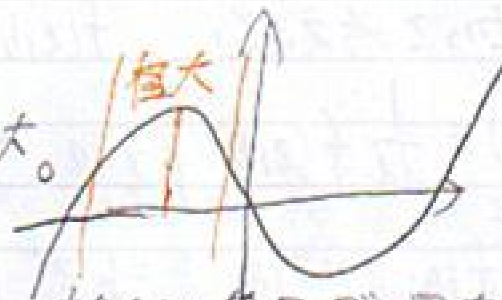
$h\to 0$

$f'(a)\geqq 0$

両者をあわせて $f'(a)=0$ // 極小も同様

極大の厳密な定義

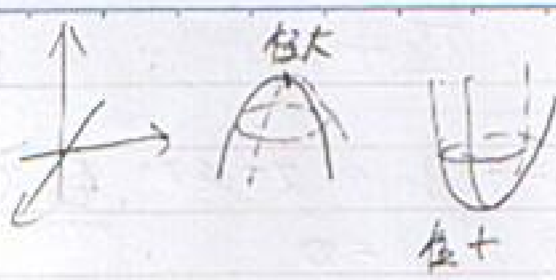
$y=f(x)$ が $x=a$ で (狭義の) 極大。
$\Leftrightarrow$ 充分小さい δ をとると
$f(x)$ は $]a-\delta, a+\delta[$ において
(狭義の) 最大



$\Leftrightarrow$ ある $\delta>0$ が存在して. ($\overset{?}{\exists}\delta>0$) ?
すべての $a\neq x\in\,]a-\delta, a+\delta[$ ($a\neq\forall x\in\,]a-\delta, a+\delta[$)
$f(x)\leqq f(a)$
$(<)$

(極小についても同様)

$(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)$：二変数関数



$z=f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で極大

ある δ が存在して　すべての $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ について

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\,\delta>0$ $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

? $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \Rightarrow f(x,y)\leqq f(a,b)$

$f(x,y)$ が (a,b) で 極大または極小

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$

(証) 極大のときに示す

$y=b$ で切って考えると、$f(x,b)$ は $x=a$ で 極大

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\dfrac{d}{dx}f(x,b)\Big|_{x=a}=0$

同様に、$f(a,y)$ は $y=b$ で 極大 なので

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=\dfrac{d}{dy}f(a,y)\Big|_{y=b}=0$ //

停留点 (stationary point)

点 (a,b) が関数 $f(x,y)$ の停留点である

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$

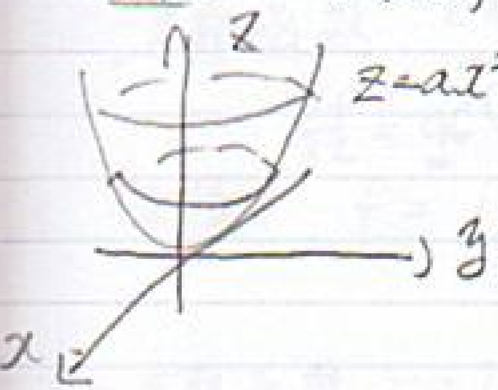
極大または極小 $\Rightarrow$ 停留点

逆 $\Leftarrow$ は成立たない (例2)

演習 持ち込み可. 出席→提出
小テスト, 出席, 講義 IB

No.
Date

例(1) $f(x,y) = ax^2+by^2 \quad (a,b>0)$

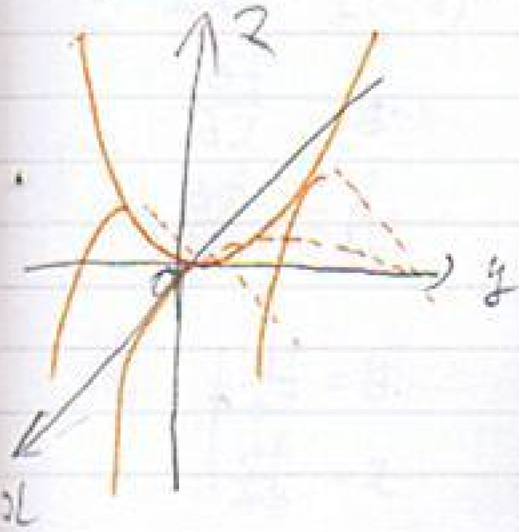


$z=ax^2+by^2$ $(0,0)$で 極小

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2ax$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2by$

$a \cdot b \neq 0$より 停留点は $(0,0)$のみ

例(2) $f(x,y) = ax^2+by^2 \quad (a<0<b)$



鞍点 (saddle point) テスト出す!

停留点は $(0,0)$のみ

$(0,0)$は 極大でも極小でもない

例題 $f(x,y) = x^2+xy+y^2-x^3$ について, 停留点を全て求めよ

テスト出る
教 P. 97~99

$$\begin{cases} f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y-3x^2 \\ f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x+2y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y-3x^2=0 \\ x+2y=0 \end{cases} \iff 4x-6x^2=-2y=x$$

$$\iff \begin{cases} y=-\frac{x}{2} \\ 6x^2-3x=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=0,\ \frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2}x \end{cases}$$

$(x,y)=(0,0)$ または $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

実は 極小 鞍点

2階の偏微分 (準数 P92)

$f = f(x,y)$: 二変数函数 $\qquad f_{xy} = (f_x)_y$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$ などと書く。

偏微分の順序交換

f: C^2 級函数 (「ふつう」の函数) について,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

(証明は来週 ⇐ 平均値の定理)

多項式の場合にたしかめておく。

$$f(x,y) = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{nm} x^n y^m$$

(a_{nm} : 定数, 有限個だけ $\neq 0$)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sum n a_{nm} x^{n-1} y^n\right) = \sum nm\, a_{nm} x^{n-1} y^{n-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum m a_{n,m} x^n y^{m-1}\right) = \sum nm\, a_{n,m} x^{n-1} y^{n-1}$$ 成

可積分条件

一変数函数　どんな函数 $g(x)$ についても、

$\frac{df}{dx} = g$　となる f は存在して

不定積分　$f = \int g\,dx$　で与えられる.

二変数函数では？

問　函数 $g(x,y)$ $h(x,y)$ が与えられたとき

$$(*) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = g \\ \frac{\partial f}{\partial y} = h \end{cases}$$

をみたす $f(x,y)$ は存在するか？
(scholer potential)

例　$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x \end{cases}$　　　$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \end{cases}$

$f(x,y) = xy$　　　$(f_x)_y = 1$　$(f_y)_x = 2x$　違うから存在しない.

いつも存在するわけではない　(一変数とのちがい)

もし存在するならば、

偏微分の順序交換

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial h}{\partial x}$$

つまり　(b)　$\boxed{\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial x}}$　をみたす必要がある

可積分条件
inte～　co～

No.

Date

逆に (b) をみたせば (#) の(局所)解は存在する

点 (x_0, y_0) をとって固定する

(x,y)

$(x_0,y_0) \to (x, y_0)$

xで積分

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} g(s, y_0)\,ds + \int_{y_0}^{y} h(x,t)\,dt$$

とおくと、これは (#) をみたす.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} h_x(x,t)\,dt$$

$$\overset{(b)}{=} g(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} g_y(x,t)\,dt$$

$$= g(x,y_0) + g(x,y) - g(x,y_0)$$

$$= g(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = h(x,y)$$

(#) の大域解 ⇐ f, g, h の定義域のトポロジー

極座標

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial x} = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial y} = \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{cases}$$

θ を $\mathbb{R}^2$ から原点を除いた集合で、

連続に定義することはできない

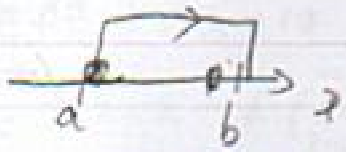
§2 平均値の定理 (教科書 p 32-33)

区間について

$\mathbb{R}$ = 実数の全体 = 

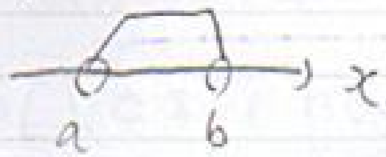
$a, b \in \mathbb{R} \quad a<b$

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$

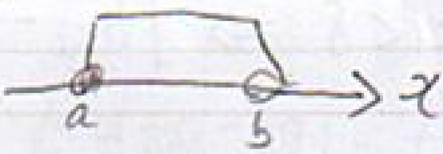
= 

(有界) 閉区間

$]a,b[\ = (a,b) = \{x \in,\ a<x<b\}$

= 

$[a,b[\ = [a,b) = \{x \in \mathbb{R}\ a \leqq x < b\}$

= 

$]a,b] = (a,b] = (x \in \mathbb{R},\ a < x \leqq b)$

$[a,+\infty[\ = [a,\infty) = \{x \in \mathbb{R},\ a \leqq x\}$

$]a,+\infty[,\quad]-\infty,b] \quad]-\infty,b[$

$]-\infty,\infty[\ = \mathbb{R}$

(注) $\pm\infty$は数で無い。

No.

Date

連続関数

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$ 関数

$x \in]a,b[$ (つまり $a<x<b$) をみたす.

それぞれのxについて 実数$f(x)$が 一つ決まっている.

例 x^2+2　$\frac{1}{x-a}$, $\sin\left(\frac{x-a}{x-b}\right)$ などなど

$c \in]a,b[$

def $f(x)$は $x=c$ で 連続 (continue)

$\Longleftrightarrow \lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ (limitの存在も含まれている)

ε-δ 論法による 連続の定義

$\forall \varepsilon>0$ (どんなに小さい $\varepsilon>0$ についても)

$\exists \delta>0$ (それにあわせて 充分小さく $\delta>0$をとれば)

$\forall x \in]a,b[, \quad |x-c|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(c)|<\varepsilon$

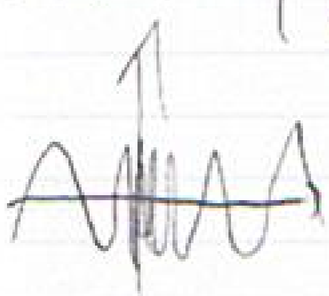
連続でない例

(1) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x=0 \\ 0 & \text{if } x\neq 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$

$x=0$で連続でない

(2) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{if } x\neq 0 \\ 0 & \text{if } x=0 \end{cases}$



$\lim_{x\to 0} f(x)$は存在しない

$x=0$で連続でない.

例 $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{if } x\neq 0 \\ 0 & \text{if } x=0 \end{cases}$

$x=0$で連続

$$\underbrace{-|x|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \le x\sin\frac{1}{x} \le \underbrace{|x|}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \quad (x\to 0)$$

はさみうちより、$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0 = f(0)$

(fは $]a,b[$ で連続 $\Longleftrightarrow$ fはすべての $c\in]a,b[$ で連続)

他の区間についても同様.

いい直すと 連続であるとは lim と交換できるということ.

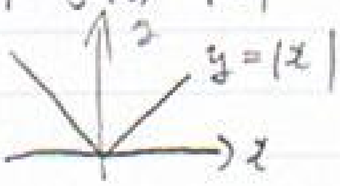
$$\lim_{x\to c} f(x) = f\left(\lim_{x\to c} x\right)$$

微分可能

fは $]a,b[$ 上で微分可能

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ [すべての $c\in]a,b[$ について
$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(c+h)-f(c))$
が存在する]

例 $f(x)=|x|$



$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}(f(h)-f(0)) = +1$$

$$\lim_{h\uparrow 0} \frac{1}{h}(f(h)-f(0)) = -1$$

$x=0$で微分可能ではない.

微分可能 $\Longrightarrow$ 連続

証) $\lim_{h\to 0} f(c+h) = \lim_{h\to 0}\left(f(c) + \frac{1}{h}(f(c+h)-f(c))\cdot h\right)$

$$= f(c) + f'(c)\cdot 0 = f(c)$$

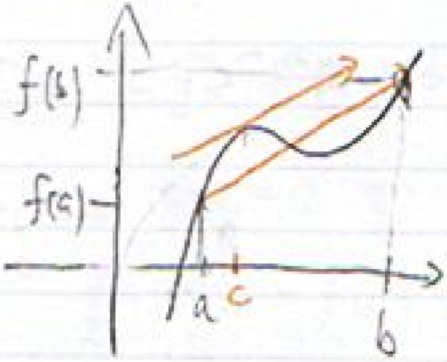
平均値の定理

$a, b \in \mathbb{R}$　$a<b$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ 連続函数

$]a,b[$ 上で微分可能

$\Rightarrow$ ある $c \in (a,b)$ について　$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$ が成立つ.



$$f(b)-f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$$

$\Uparrow$

Rollの定理

平均値の定理の仮定に加えて

$f(a) = f(b)$

も仮定する. このとき, ある $c \in]a,b[$ において,

$f'(c) = 0$ が成立つ.

Rollの定理 $\Rightarrow$ 平均値の定理

$$g(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

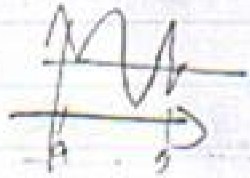
とおく. $g(a) = f(a) = g(b)$ により,

Rollの定理が使えて, ある $c \in]a,b[$ において,

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

Rollの定理の証明



有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続函数 f は
最大値 $f(c_1)$，最小値 $f(c_2)$, $c_1, c_2 \in [a,b]$ を持つ

場合分け

(I) c_1, c_2 が端点 a,b のとき　すべての $x \in [a,b]$ について

$$f(c_2) \leq f(x) \leq f(c_1)$$
$$f(a) = f(b)$$

ゆえに、$f(x) = f(a) = f(b) = \mathrm{const}$
すべての $x \in]a,b[$ について $f'(x) = 0$

c として何をとっても良い　(例えば $c = \frac{1}{2}(a+b)$ をとる)

(II) c_1, c_2 の少なくとも一方は端点 a,b ではないとき
それを c とおけば、
c で極大または極小 なので $f'(c) = 0$

(平均値の定理 つづき)　今回やること：平均値の定理の応用
とくに 偏微分の順序交換の証明 ←大事！

準教科書 P34〜37

平均値の定理 (よく使う別の形)

$a, h \in \mathbb{R}$

f：(a 及び $a+h$ を含む開区間) $\to \mathbb{R}$
微分可能

$\Rightarrow$ ある $\theta \in]0,1[$ をうまくとると

$f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)h$

とかける

(証) $h=0$ のとき，θ は何でも良い

$h>0$ のとき，$f: [a, a+h] \to \mathbb{R}$ に 平均値の定理 を適用

$]a, a+h[= \{a+\theta' h : 0 < \theta' < 1\}$

$h<0$ のとき，同様に $[a+h, a]$ で考える．

以下応用する．

$-\infty \leq p < q \leq +\infty$

$f:]p, q[\to \mathbb{R}$
微分可能な函数とする

Corollary 定理からすぐ分かること．

~~系~~1 すべての $x \in]p, q[$ について．

$f'(x) = 0$

ならば，$f(x)$ は 定数函数 である．

(証) $p < a < b < q$ なる全ての a, b について $f(a) = f(b)$ を示せばよい．

$f: [a, b] \to \mathbb{R}$ に 平均値の定理 を適用すると．

$^\exists c \in]a, b[$．

$f(b) - f(a) = \underbrace{f'(c)}_{\substack{\shortparallel \\ 0\ 仮定}}(b-a) = 0$

故に $f(b) = f(a)$

No.

Date

系2 すべての $x \in]p,q[$ について

$f'(x) > 0 \quad (\geqq 0)$

ならば f は狭義単調増大である。

(広義) ← この場合

狭義の方だけ示す

(証) $p<a<b<q$ なる全ての a, b について $f(a) < f(b)$ を示せば良い

系1と同じく平均値の定理より

ある $c \in]a,b[$ がとれて

$f(b) - f(a) = \underbrace{f'(c)}_{\vee 仮定\ 0} \underbrace{(b-a)}_{\vee\ 0} > 0$

ゆえに $f(b) > f(a)$

偏微分の順序交換

$f(x,y)$：二変数函数

$(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$f(x,y)$：(a,b)で連続 (continuous)

$\overset{def}{\iff} \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$

$f(x,y)$：連続

$\overset{def}{\iff}$ fは定義域のすべての点で連続

f：C^1級函数 of class C^1, C^1-function 連続微分可能

$\overset{def}{\iff}$ $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ が存在して、連続

f：C^2級函数

$\overset{def}{\iff}$ $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

が存在して連続

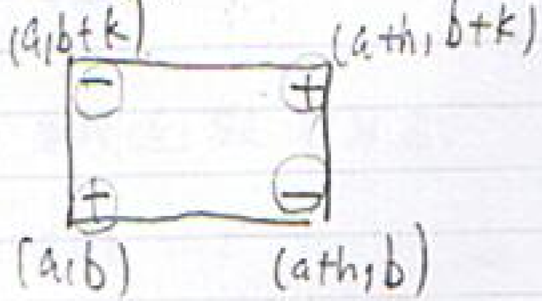
定理 (偏微分の順序交換)

fがC^2級函数ならば

$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ 定義域の任意の点について

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)$$

(証) $h, k \neq 0$ とおく.



idea!

$\Delta = \Delta(h,k)$

$$\overset{def}{=} \underbrace{f(a+h,b+k) - f(a+h,b)}\ -\ \underbrace{f(a,b+k) + f(a,b)}$$

$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{hk}\Delta$ を2通りのやり方で計算する

まず b と k を固定して

$\varphi(x) \overset{\text{def}}{=} f(x, b+k) - f(x, b)$ とおく。

$\Delta = \varphi(a+h) - \varphi(a)$

平均値の定理から ある…が存在して $\exists \theta_1 \in]0,1[$

$= h \cdot \varphi'(a+\theta_1 h))$ $\{\varphi'(x) \to f(x, b+k) - f(x,b)$ を x で偏微分$\}$

$= h \{ \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, b) \}$

$a+\theta_1 h$ を固定して、

$\psi(y) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, y)$ とおく。

$= h(\psi(b+k) - \psi(b))$

平均値の定理より $\exists \theta_2 \in]0,1[$

$= hk\,\psi'(b+\theta_2 k)$ $\{\psi'(y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a+\theta_1 h, y)\right)\}$

$= hk \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$

ゆえに、$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{hk}\Delta = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$

$h \to 0$ とすると $\theta_1 h \to 0$ ($\because |\theta_1|<1$)

$k \to 0$ とすると $\theta_2 k \to 0$ ($\because |\theta_2|<1$)

$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a, b)$

仮定 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$:連続

---

x と y の役割を交換して、平均値の定理を2回使うと、

$\exists \theta_3, \exists \theta_4 \in]0,1[$

$\Delta = kh \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a+\theta_4 h, b+\theta_3 k)$ となり

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ が連続であることから $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{hk}\Delta = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)$

となる。両者を比べて定理がえられる//

No.

Date

$f = f(x, y, z)$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

n変数函数で任意の2変数の偏微分の順序交換も証明できた！

残りの変数を固定

Cauchy の平均値の定理．$a, b \in \mathbb{R}$

$a < b$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

$g : [a, b] \to \mathbb{R}$

連続函数．

$]a, b[$ の上で微分可能

$g(a) \neq g(b)$

$\forall x \in]a, b[\quad g'(x) \neq 0$

$\Rightarrow \exists c \in]a, b[$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

・(証)

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a))$$

とおく。$h(a) = f(a) = h(b)$ なので．

Roll の定理が使って

$\exists c \in]a, b[$

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c)$$

ゆえに、$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

l'Hospital の定理

$a \in \mathbb{R}$

$f(x), g(x)$; $x = a$ のまわりで 定義された
微分可能 函数.

$\boxed{f(a) = g(a) = 0}$

$g(x) = 0$ をみたす x は aのまわりでは aに限られる

$\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h)}{g'(a+h)}$ が存在する.

$$\Longrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h)}{g'(a+h)}$$

(注) $f(a) = g(a) = 0$ の仮定 は必ずたしかめること

(例) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x+2}{x+1} = 2 \neq 1 = \lim_{x \to 0} \frac{(x+2)'}{(x+1)'}$

(証) $$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} \overset{f(a) = g(a) = 0}{=} \frac{f(a+h) - f(a)}{g(a+h) - g(a)}$$

$$\underset{\text{Cauchy の平均値の定理}}{=} \frac{f'(a+\theta_h h)}{g'(a+\theta_h h)} \xrightarrow[h \to 0]{} \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h)}{g'(a+h)}$$

$^\exists \theta_h \in]0, 1[$

$|\theta_h| < 1$ より
$\theta_h h \to 0$

No.

Date

系：$f(x)$：$x=a$ のまわりで定義された 2回微分可能な函数.

$$f'(a)=0 \quad f''(a)>0$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ は $x=a$ で狭義の極小

(証) $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} \underset{\substack{x=aで\\分母=分子=0}}{=} \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{2(x-a)} \underset{x=aで分母=分子=0}{=} \lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{2} = \frac{1}{2}f''(a) > 0$$

x が a に充分近ければ.

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2} > 0$$

$$f(x)-f(a) > 0$$

ゆえに $f(x) > f(a)$ （x は a に充分近い）

したがって $f(x)$ は $x=a$ で狭義の極小 //

三角函数の微分

補助定理 Lemma

補題

(1) $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$

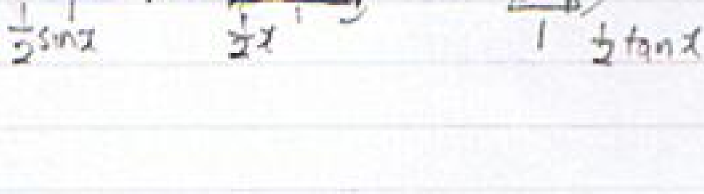
(2) $\lim_{x\to 0} \cos x = 0$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

(証) $x>0$ のとき

(#) $\sin x \leqq x \leqq \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$



No.

Date

(1) $x \neq 0$のとき

$-|x| \leq \sin x \leq |x|$　はさみうちより $\sin x \to 0$ as $x \to 0$

$x \to 0$ ↓ 0　　↓ 0

(2) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ のとき $\cos x > 0$

ときに $1 + \cos x > 1$

$0 \leq |1-\cos x| \leq |1-\cos x||1+\cos x|$

$\| \; 1-\cos^2 x = \sin^2 x$
$\downarrow x \to 0$
0 (1)より

はさみうちにより　$1-\cos x \to 0$

つまり　$\cos x \to 1$ as $x \to 0$

(3) $x \neq 0$のとき

$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$　（$\because$) $x>0$のとき(#)
$x<0$のとき 3つとも偶関数
だから $x>0$ に帰着）

$x \to 0$ ↓ 1　はさみうちにより

$\frac{\sin x}{x} \to 1$ as $x \to 0$

(4) $0 \leq \left|\frac{\cos x - 1}{x}\right| \leq \frac{|1-\cos x||1+\cos x|}{|x|}$

$\| \; \frac{|\sin x|}{|x|} |\sin x|$
$\downarrow$
$1 \cdot 0 = 0$

はさみうちにより

$\frac{\cos x - 1}{x} \to 0$ as $x \to 0$

No.

Date

系 (1) $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

(2) $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

(証) (1)だけやる. (2)も同様.

$$\frac{1}{h}(\sin(x+h) - \sin x)$$

$$\underset{\text{加法定理}}{=} \frac{1}{h}(\sin x\cosh + \sin h\cos x - \sin x)$$

$$= \sin x \underbrace{\frac{1}{h}(\cos x - 1)}_{\to 0} + (\cos x)\underbrace{\frac{1}{h}\sin h}_{\to 1} \longrightarrow \cos x \quad \text{as } h \to 0$$

(次回) 全微分可能性 : chain rule の証明

No.

Date

§3 近似としての微分
(準教科書 pp 85-87)

今回やること

- $f(x) \fallingdotseq fa + f'(a)(x-a)$ 一次函数による近似

  キチンとやる. → 全微分可能性
- Chain rule の証明
- 指数函数

$a \in \mathbb{R}$

$f(x)$: $x \sim a$ のまわりで定義された函数.

定義 f は a において (1回) 微分可能

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$ が存在する

"$f'(a)$" とかく

式変形する

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(a+h) - f(a) - hf'(a)\right) = 0$$

h: 充分小について

$r(h) = r(f, a, h) \overset{\text{def}}{=} f(a+h) - fa - hf'(a)$ とおくと

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + hf'(a) + r(h) \\ \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} r(h) = 0 \end{cases}$$

$\{ f(a+h) \fallingdotseq f(a) + hf'(a)$

$h = x - a$

$f(x)$ は $x = a$ のまわりで一次函数

$$f(a) + f'(x)(x-a)$$

によって近似される. $r(x-a)$ は その近似 の誤差項

「一次近似」

No.

Date

別の近似はありえるか？

(答) No!

$$f(a+h) \fallingdotseq f(a) + ph \quad (p \in \mathbb{R})$$

と近似されていたとする。つまり

$$\begin{cases} f(a+h) = f(a) + ph + s(h) \\ \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} s(h) = 0 \end{cases}$$

と仮定する。

このとき、 $p + \frac{1}{h}s(h) = \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$

$$\underset{h\to 0}{\downarrow} p \qquad \downarrow f'(a)$$

ゆえに $p = f'(a)$ つまり一次近似のやり方は一通りしかない。

二変数函数での一次近似

$(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$f(x, y)$: $(x, y) = (a, b)$ のまわりで定義された函数

定義 $f(x, y)$ が (a, b) において x について偏微分可能

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(a+h, b) - f(a, b))$ が存在する

$$\begin{cases} f(a+h, b+k) = \underbrace{f(a, b)}_{\text{定数項}} + \underbrace{ph + qk}_{\text{線形函数}} + \underbrace{r(h, k)}_{\text{誤差項}} \quad (p, q \in \mathbb{R}) \\ \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} r(h, k) = 0 \end{cases}$$

とする。このとき、 $f(x, y)$ は (a, b) において偏微分可能で

$p = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ となる。

(証) xについてのみ示す. yについても同様.

ここで, $k=0$とおく.

$$f(a+h,b) = f(a,b) + ph + r(h,0)$$

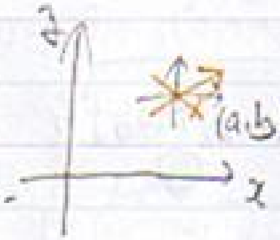
$$\frac{1}{h}\{f(a+h,b) - f(a,b)\} = p + \frac{1}{h} r(h,0) \to 0$$

$$\left|\frac{1}{h} r(h,0)\right| = \frac{1}{\sqrt{h^2+0^2}}\,|r(h,0)| \xrightarrow[(h,0)\to(0,0)]{} 0$$

ゆえに. $p = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$

(a,b)において, 一次近似できることを

「(a,b)において全微分可能である」という.
totally differentiable



今示したこと

全微分可能 $\Rightarrow$ 偏微分可能

いつ全微分可能か?

定理 $f(x,y)$: (a,b)のまわりで定義されたC^1級函数 ($\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ が存在して連続)

$$r(h,k) \overset{def}{=} f(a+h,b+k) - f(a,b) - h f_x(a,b) - k f_y(a,b)$$

$\Rightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} r(h,k) = 0$ つまり ③全微分可能④

No

Date

(証) $f(a+h, b+k) - f(a,b)$

$= \underline{f(a+h, b+k) - f(a, b+k)} + \underline{f(a, b+k) - f(a,b)}$

平均値の定理より，$^{\exists}\theta_1, {}^{\exists}\theta_2 \in]0,1[$

$= h f_x(a+\theta_1 h, b+k) + k f_y(a, b+\theta_2 k)$

① ②

$b+k$ をとめて

$\varphi(x) = f(x, b+k)$ に平均値の定理をつかう

$\varphi(a+h) - \varphi(a) = h\varphi'(a+\theta_1 h)$ $\quad ({}^{\exists}\theta_1 \in]0,1[)$

$= h f_x(a+\theta_1 h, b+k)$

a をとめて

$\psi(y) = f(a,y)$ に平均値の定理

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} |r(h,k)| \leq \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} |h| \overbrace{|(f_x(a+\theta_1 h, b+k) - f_x(a,b))|}^{\substack{0 \\ \uparrow\ f_x\text{：連続} \\ (h,k)\to(0,0)}}$$

$\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}$：$\frac{1}{\sqrt{1}} \geq \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}$

① ③

$$+ \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} |k| \underbrace{|(f_y(a, b+\theta_2 k) - f_y(a,b))|}_{\substack{\downarrow\ (h,k)\to(0,0) \\ f_y\text{：連続}}}$$

② ④

$\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$

$\longrightarrow 0$ as $(h,k) \to (0,0)$,

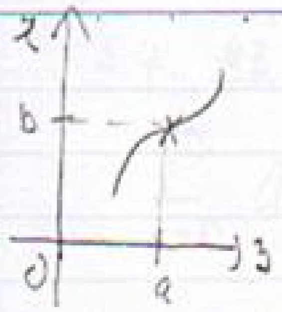
はさみうちにより，

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} r(h,k) = 0$$

まとめると

C^1 級 $\Rightarrow$ 全微分可能 $\Rightarrow$ 偏微分可能

逆は成り立たない，



<u>Chain rule</u> $c \in \mathbb{R}$

$x(t), y(t)$: $t=c$ のまわりで定義された 微分可能函数.

$(a,b) = (x(c), y(c))$

$f(x,y)$: $(x,y)=(a,b)$ のまわりで定義された函数.

(a,b)において全微分可能.

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt} f(x(t),y(t))\Big|_{t=c} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot\frac{dx}{dt}(c) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,\frac{dy}{dt}(c)$$

(証) $f(x,y)$: (a,b)で全微可能だから

$$\begin{cases} f(a+h,b+k) = f(a,b) + hf_x(a,b) + kf_y(a,b) + R(h,k) \\ \displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} R(h,k) = 0 \end{cases}$$

$$S(h,k) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} R(h,k) & \text{if } (h,k) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (h,k) = (0,0) \end{cases}$$

とおくと、$\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} S(h,k) = 0 = S(0,0)$

$$\begin{cases} x(c+l) = x(c) + l\,x'(c) + r(l) \\ y(c+l) = y(c) + l\,y'(c) + s(l) \\ \displaystyle\lim_{l\to0} \frac{1}{l} r(l) = \lim_{l\to0} \frac{1}{l} s(l) = 0 \end{cases}$$

$$f(x(c+l),\ y(c+l))$$

$$= f(\underbrace{x(c)}_{a} + \underbrace{l x'(c) + r(l)}_{h},\ \underbrace{y(c)}_{b} + \underbrace{l y'(c) + s(l)}_{k})$$

$$= f(a,b) + (l x'(c) + r(l)) f_x(a,b) + (l y'(c) + s(l)) f_y(a,b) + \sqrt{(l x'(c) + r(l))^2 + (l y'(c) + s(l))^2}\ S(l x'(c) + r(l),\ l y'(c) + s(l))$$

$$\left| \frac{1}{l} (f(x(c+l)),\ y(c+l)) - f(a,b)) - x'(c) f_x(a,b) - y'(c) f_y(a,b) \right|$$

これが $\to 0$ as $l \to 0$ となることを示す.

$$\leq \underbrace{\left| \frac{1}{l} r(l) \right|}_{l\to 0,\ \to 0} |f_x(a,b)| + \underbrace{\left| \frac{1}{l} s(l) \right|}_{\to 0} |f_y(a,b)|$$

$$+ \underbrace{\sqrt{(x'(c) + \tfrac{1}{l} r(l))^2 + (y'(c) + \tfrac{1}{l} s(l))^2}}_{\to \sqrt{x'(c)^2 + y'(c)^2}} \underbrace{\left| S(l x'(c) + r(l),\ l y'(c) + s(l)) \right|}_{\to |S(0,0)| = 0}$$

$\longrightarrow 0$ as $l \to 0$ これが示すべきことであった.

一変数函数の合成微分の公式

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x)) f'(x)$$

も同様のやり方で証明できる.

No.

Date

§4. 級数の収束

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

e^x $\quad \underbrace{e^{x+y} = e^x e^y}_{\text{指数公式}}$

(#) $\begin{cases} \frac{df}{dx}(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$ をみたす $f(x)$ を求める.

もし, (#) をみたす $f(x)$ があれば, 自動的に指数公式

$f(x+y) = f(x)f(y)$ が成立つ.

(証) $\frac{d}{dx}\left(f(x+y)f(-x)\right)$

$= f'(x+y)f(-x) - f(x+y)f'(-x)$

$\underset{(\#)}{=} f(x+y)f(-x) - f(x+y)f(-x) = 0$

$f(x+y)f(-x)$ は x に関して const. とくに $x=0$ の値と等しい

(b) $\boxed{f(x+y)f(-x) = f(y)f(0) = f(y)}$

とくに $y=0$ として. $f(x)f(-x) = f(0) = 1$

ゆえに $f(x) \neq 0$. $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ これを (b) にだい入.

$\frac{f(x+y)}{f(x)} = f(y)$ ゆえに $f(x+y) = f(x)f(y)$

No.
Date

(#)を解く

<u>仮定</u> $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

a_n:定数 という形をしていると仮定する.

$a_0=f(0)=1$

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

$$\overset{(\#)}{=} f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

x^nの係数を比較する

$$\boxed{(n+1)a_{n+1}=a_n}$$

$$a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}=\frac{1}{n(n-1)}a_{n-2}$$

$$=\cdots=\frac{1}{n!}a_0=\frac{1}{n!}$$

$$\boxed{a_n=\frac{1}{n!}}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$$

そこで

$$e^x=\exp(x)\overset{\text{def}}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n \quad \text{と定義したい.}$$

しかし、右辺の無限和は収束するのか?

<u>では収束するとはどういうことか?</u>

(例) $x_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$

$(\longrightarrow e$ as $n\to\infty$ となるハズ$)$

n =	
1	2
2	2.5
3	2.66…
4	2.70833…
5	2.716…
6	2.718055…
7	2.718253968
8	2.718278769
9	2.718281526
10	2.718281801
11	2.718281826

上の桁から "freeze" していく。

この freeze する状況 は次のように言い表わされる。

どんな桁数 p をとってきても
それにあわせて充分大きい番号 m_p をとれば

$$m_p \le {}^\forall n \le {}^\forall m$$

$$|x_m - x_n| < \frac{1}{10^p}$$

これが収束するということ

$\frac{1}{10^p}$ にこだわる必要はない！

Cauchy の判定条件

どんなに小さい $\varepsilon > 0$ についても
それにあわせて充分大きい番号 m_ε をとると、

$$m_\varepsilon \le {}^\forall n \le {}^\forall m$$

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

をみたす。（このことを $\{x_n\}$ は Cauchy 列であるという）

このとき $\{x_n\}$ は ある実数に収束し、逆もなりたつ

No.

Date

(単数 pp141〜148) **定義** $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が収束する.

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 数列 $\left\{\sum_{k=0}^{n} a_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ が収束する

このとき, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ と書く

例 $r \geq 0, \quad a_k = r^k$

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \begin{cases} \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r} & \text{if } r \neq 1 \\ n+1 & \text{if } r = 1 \end{cases}$$

$r<1$ ならば収束し.
$r \geq 1$ ならば発散する.

Cauchy の判定条件

実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することと

次の条件をみたすことは同値

任意の (どんなに小さい) $\varepsilon > 0$ について
それについて充分大きい m_ε をとると,
$m_\varepsilon \leq n \leq m$ なるすべての n, m について.

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

が成立つ.

・「Cauchy の判定条件をみたす.」＝「Cachy 列である」
・つまり「cauchy 列 $\Longleftrightarrow$ 収束列」

・Cauchy の判定条件の利点

極限が具体的に計算できなくても
収束が判定できる

Cauchy 列でない例

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

これは無限大に発散する
とくに Cauchy 列ではない

No.

Date

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geqq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqq 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{n} = 1 + \frac{n}{2} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$$

これは発散する

Cauchy の判定条件の応用.

優級数 $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$ 実数列

$k_0 \geqq 1$

$k_0 \leqq {}^\forall k$ $|a_k| \leqq b_k$

$\sum_{k=0}^{\infty} b_k$: 収束

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$: 収束する

($\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ を $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ の優級数という)

証) $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ とおく.

仮定から数列 $\{B_n\}$ は収束するので

${}^\forall \varepsilon > 0$ ${}^\exists m_\varepsilon \leqq {}^\forall n \leqq {}^\forall m$

$|B_m - B_n| < \varepsilon$

必要なら m_ε を $\max\{m_\varepsilon, k_0\}$ におきかえて

$m_\varepsilon \geqq k_0$ としてよい. そうすると,

$$\boxed{|A_m - A_n|} = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leqq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \leqq \sum_{k=n+1}^{m} b_k \leqq B_m - B_n < \varepsilon$$

つまり, $\{A_n\}$ は Cauchy の判定条件をみたし, 収束する

No.

Date

絶対収束

級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が絶対収束する

$\Longleftrightarrow$ 級数 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ が収束する

絶対収束 $\Longrightarrow$ 収束

($\because$ $\sum |a_k|$ が $\sum a_k$ の優級数になる)

優級数の応用

d'Alembert の判定法

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$: 実数列 $a_k \neq 0$

(1) 有限個の k を除き、

$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq r$ をみたすような r が存在し、$r<1$ ならば

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は (絶対) 収束する。

(2) $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ が存在したとする。

($=r$ とおく)

もし $r<1$ ならば

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は絶対収束し、$r>1$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は発散する

例 (1) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ はすべての $x \in \mathbb{R}$ について収束する

($\because$) $x=0$ は明らか。$x \neq 0$ とする。

$$\frac{\frac{1}{(k+1)!}|x|^{k+1}}{\frac{1}{k!}|x|^k} = \frac{1}{k+1}|x| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

これにより、

$$e^x = \exp(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad \text{と定義する}$$

No.

Date

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$ は　$|x|<1$ のとき 絶対収束し
$|x|>1$ 〃 発散する

(∵) $x=0$ のときは明らか。$x \neq 0$ とする

$$\frac{\frac{1}{k+1}|x|^{k+1}}{\frac{1}{k}|x|^k} = \frac{k}{k+1}|x| \xrightarrow[k\to\infty]{} |x| \begin{smallmatrix}<1\\>1\end{smallmatrix}$$ //

(証) (1) 仮定から ある k_0 がとれて

$k_0 \leq {}^\forall k$ $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq r$

このとき $|a_{k+1}| \leq r|a_k|$

$|a_k| \leq r|a_{k-1}| \leq r^2|a_{k-2}| \leq \cdots \leq r^{k-k_0}|a_{k_0}|$

いま、$r<1$ なので、

$\sum_{k=0}^{\infty} r^{k-k_0}|a_{k_0}|$ は収束する

$\sum_{k=0}^{\infty} r^{k-k_0}|a_{k_0}|$ が $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ の 優級数となり、

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は 絶対収束する //

(2) 場合分け (I) $r<1$ のとき、

$r<t<1$ なる t をとる

有限個の k を除き $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq t$ となる。

$t<1$ なので (1) により $\sum a_k$ は収束する。

(II) $r>1$ のとき、もし、$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が収束したとすると、

$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ となる

(∵) $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ とおく。

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(A_n - A_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} A_n - \lim_{n\to\infty} A_{n-1} = 0$

しかし、$r>1$ なので、有限個の k を除き、$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1$

$|a_{k+1}| \geq |a_k| \neq 0$

これは 0 に収束しない。矛盾。

$\sum a_k$ は発散する

No.
Date

(注) $\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=1$ のときは

収束、発散 いずれにも判定できない

例 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty$ $\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}}=1$

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 収束 $\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{(k+1)^2}}{\frac{1}{k^2}}$ $\shortparallel$ 1

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ $a_n\in\mathbb{R}$ を整級数という

収束半径 $0\leqq r\leqq+\infty$

整級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ の収束半径が r である.

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ 級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ が $|x|<r$ のとき 絶対収束し、
$|x|>r$ のとき 発散する.

例 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$ の収束半径 は $+\infty$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ 〃 1

$\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$ 〃 0 ← $\frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n}=(n+1)|x|\to\infty$

例 $\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^n$ $=\frac{1}{1-2x}$ の収束半径は $\frac{1}{2}$

$\left(\frac{2^{n+1}|x|^{n+1}}{2^n|x|^n}=2|x|\right)$

$\sum_{n=0}^{\infty}2^n x^{2n}$ $=\frac{1}{1-2x^2}$ の 収束半径は $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\left(\frac{2^{n+1}|x|^{2n+2}}{2^n|x|^{2n}}=2|x|^2 \gtrless 1\right)$

No.

Date

補題 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ：整級数

$u \neq 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$ ：収束

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x| < |u|$ のとき 絶対収束する．

(証) 仮定から

$\lim_{n \to \infty} a_n u^n = 0$

充分大きい $M > 0$ をとると

すべての n について．$|a_n u^n| \leq M$ となる．

$|x| < |u|$ とすると．

$|a_n x^n| = |a_n u^n \frac{x^n}{u^n}| \leq M \left(\frac{|x|}{|u|}\right)^n$

いま，$|x| < |u|$ なので $\frac{|x|}{|u|} < 1$

$\sum M \left(\frac{|x|}{|u|}\right)^n$ は収束する

$\sum M \left(\frac{|x|}{|u|}\right)^n$ は $\sum a_n x^n$ の優級数なので，$\sum a_n x^n$ は絶対収束する．

定理 任意の整級数 $\sum a_n x^n$ は 収束半径 r $(0 \leq r \leq +\infty)$ を持つ．

(証) 集合

$A \overset{\text{def}}{=} \{ r \geq 0 ; \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ は収束する$\}$

補題により．

$A = \bigcup_{a \in A} [0, a]$ （$\bigcup$：和集合） と表される．

したがって，A は区間になる．とくに，ある $r \in \mathbb{R}$ によって

$A = [0, r]$ または $[0, r[$ と表される．

これはつまり，$\sum a_n x^n$ が $|x| < r$ のとき 絶対収束し

$|x| > r$ のとき 発散する

ということ．

$\left(\dfrac{1}{\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \text{収束半径} \right)$

No.

Date

定理 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$: 整級数

収束半径 $r>0$ とする.

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ の収束半径 も r であり、

$f(x)$ は $]-r, r[$ 上微分可能で

$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ が成立つ

(証明は 積分だと楽なので 後期)

単振動の方程式

$$(\#)\ \frac{d^2 f}{dx^2}(x) = -f(x)$$

(#)をみたす $f(x)$ は

$f(x) = C' \cos x + C'' \sin x$

C', C'' : 定数 と表わされる.

(証) $f(x)$ を(#)の解とする.

$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x) - i f'(x)}{\cos x + i \sin x}\right)$ を計算する ($i=\sqrt{-1}$)

$\varphi(x) \overset{\text{def}}{=} \cos x + i \sin x$

$\varphi(0)=1$

$\varphi(x)\varphi(-x) = (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x) = 1$

$\varphi'(x) = -\sin x + i \cos x$

$= i(\cos x + i \sin x)$

$= i\varphi(x)$

No.

Date

$\psi(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - if'(x)$

$\psi'(x) = f'(x) - if''(x)$

$= f'(x) + if(x) \quad (\because f''(x) = -f(x))$

$= i\psi(x)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\right) = \frac{d}{dx}\left(\psi(x)\,\varphi(-x)\right)$$

$$= \psi'(x)\,\varphi(-x) - \psi(x)\,\varphi'(-x)$$

$$= i\psi(x)\varphi(-x) - \psi(x)\,i\varphi(-x)$$

$$= 0$$

$$\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \text{const}$$

$$= C' - iC'' \quad (C', C'' \in \mathbb{R}) \text{ とおく.}$$

$$f(x) - if'(x) = \psi(x) = (C' - iC'')(\cos x + i\sin x)$$

両辺の実部をとって

$$f(x) = C'\cos x + C''\sin x$$

別の解き方

仮定 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{R}$ これを(#)に代入する

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

x^{n-2}の係数でくらべると,

$$n(n-1)a_n = -a_{n-2}$$

$$a_n = \frac{-1}{n(n-1)} a_{n-2}$$

n: 偶数のとき,

$$a_n = \frac{(-1)^{n/2}}{n!} a_0$$

n: 奇数のとき,

$$a_n = \frac{(-1)^{n/2}}{n!} a_1$$

$$\Rightarrow f(x) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} + a_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

右辺の2つの冪級数の収束半径 $= +\infty$

No.

Date

2つの解を比較する

まず $f(0)=1,\ f'(0)=0$ とする　　次に $f(0)=0,\ f'(0)=1$ とする

$\begin{cases} C'=1 \\ C''=0 \end{cases}$ $\begin{cases} a_0=1 \\ a_1=0 \end{cases}$ ←? $\begin{cases} C'=0 \\ C''=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a_0=0 \\ a_1=1 \end{cases}$

$$\boxed{\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}} \qquad \boxed{\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}}$$

$$\cos x + i\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m i}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

$(-1)^m = i^{2m}$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} (ix)^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!} (ix)^{2m+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (ix)^n = e^{ix}$$

$$\boxed{\cos x + i\sin x = e^{ix}}$$

No.
Date

§5. Taylor 展開 (準教科書 pp 47~49)

やりたいこと

一般の函数を多項式で近似し、その近似の誤差を評価したい

とくに断らないかぎり函数は必要なだけ微分できるものとする

まず多項式について調べる

$a \in \mathbb{R}$

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$
$(a_0, a_1, \cdots a_n \in \mathbb{R})$

これを $(x-a)$ の多項式に書き直す。

$f(x) = a_0 + a\big((x-a)+a\big) + a_2\big((x-a)+a\big)^2 + \cdots + a_n\big((x-a)+a\big)^n$

展開して整理して

$= b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_n(x-a)^n$

と書けたとする。b_k を求める

$f(a) = b_0$

$f^{(1)}(x) = b_1 + 2b_2(x-a) + 3b_3(x-a)^2 + \cdots + nb_n(x-a)^{n-1}$

$f^{(1)}(a) = b_1$

$f^{(2)}(x) = 2b_2 + 6b_3(x-a) + \cdots + n(n-1)b_n(x-a)^{n-2}$

$f^{(2)}(a) = 2b_2$

$f^{(3)}(x) = 6b_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)(x-a)^{n-3}$

$f^{(3)}(a) = 3!\, b_3$

$\vdots$

$f^{(k)}(a) = k!\, b_k$

No.

Date

$$b_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) = \frac{1}{k!} \sum_{j=k}^{n} \frac{j!}{(j-k)!} a_j a^{j-k}$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} a_j a^{j-k}$$

（ただし $\binom{j}{k} = {}_jC_k = \frac{j!}{k!(j-k)!}$ 二項係数）

まとめると

$f(x)$ の多項式のとき

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k}$$

↳ $f(x)$ 一般の函数で考える．

$f(x)$：一般の函数

$n \geq 1$

$$R_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

n次剰余項（a, f, n も依存する）

$(n-1)$次多項式による近似ともとの函数のズレ．

これからやること　$R_n(x)$ を評価したい

$n=1$　$R_1(x) = f(x) - f(a)$

$$\lim_{x \to a} R_1(x) = \lim_{x \to a} (f(x) - f(a))$$

$= 0$　($\because$) $f(x)$：連続

平均値の定理　$\exists \theta \in]0, 1[$

$$R_1(x) = f(x) - f(a) = (x-a) f'(a + \theta(x-a))$$

これを $n \geq 2$ に拡張したい．

No.
Date

Taylorの定理　$a, b \in \mathbb{R}$

$f:$ (aとbを含む開区間) $\longrightarrow \mathbb{R}$

n回微分可能な函数

$\Rightarrow \ ^{\exists} c$：$a$と$b$の間にある実数

$$R_n(b) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c) \ (b-a)^n$$

つまり、$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(b-a)^n$

cauchyの平均値 n回

証）$a=b$のときは明らか。

$a \neq b$とする。

$A = \frac{1}{(b-a)^n} R_n(b)$ とおく。（示すべきこと $A = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)$）

$$F(x) \underset{def}{=} f(b) - \left\{ f(x) + f'(x)(b-x) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x)(b-x)^{n-1} + A(b-x)^n \right\}$$

$F(x)$：微分可能　$\frac{1}{2} f''(x)(b-x)^2$

$$F(b) = 0, \quad F(a) = f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(b-a)^k - R_n(b) = 0$$

したがって、Rollの定理が使えて、$^{\exists}c$：aとbの間の実数

$$F'(c) = 0$$

$$-F'(x) = \cancel{f'(x)} - \cancel{f'(x)} + \cancel{f''(x)(b-x)} - \cancel{f'(x)(b-x)} + \frac{1}{2}\cancel{f'(x)}(b-x)^2 - \cdots$$

$$\cdots - \frac{1}{(n-2)!} \cancel{f^{(n-1)}}(x)(b-x)^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1} - nA(b-x)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(x)(b-x)^{n-1} - nA(b-x)^{n-1}$$

$$0 = -F'(c) = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(c)(b-c)^{n-1} - nA(b-c)^{n-1}$$

いま、$b-c \neq 0$ なので、

$$A = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)$$

これが示すべきことであった。

No.

Date

Taylor の定理　(別の形)

$p, a, q \in \mathbb{R}$　$p<a<q$

$f:]p,q[\to \mathbb{R}$　n回微分可能　な関数

$\forall x \in]p,q[$　$\exists \theta = \theta_x \in]0,1[$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+\theta(x-a))(x-a)^n$$

例　$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ を数値として求めるときの誤差の評価

m をとめる。Taylor の定理から　$\exists \theta_x \in]0,1[$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{m!}x^m + \frac{1}{(m+1)!}e^{\theta_x x}x^{m+1}$$

$x=1$ を代入

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!} + \frac{1}{(m+1)!}e^{\theta_1}$$

$$\left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!}\right) \right| = \frac{1}{(m+1)!}e^{\theta_1} \le \frac{3}{(m+1)!}$$

$(e \le 3)$　(P49)

一般に級数

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$ を $f(x)$ の $x=a$ における Taylor 級数とよぶ。

例　$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}$

$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}$

(証)　$f(x) = \cos x$ について示す

$\sin x$ についても同様。

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \cos x & k=4l \\ -\sin x & k=4l+1 \\ -\cos x & k=4l+2 \\ \sin x & k=4l+3 \end{cases} \qquad f^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 & k=4l \\ 0 & 4l+1 \\ -1 & 4l+2 \\ 0 & 4l+3 \end{cases}$$

$f(x) = \cos x$ の Taylor 級数は

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{(4\ell)!} x^{4\ell} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{-1}{(4\ell+2)!} x^{4\ell+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m}$$

$N \geq 1$

Taylor の定理から $\exists \theta_x \in]0,1[$

$$\left| \cos x - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n \right| = \frac{1}{(N+1)!} \left| f^{(N+1)}(\theta_x x) \right| |x|^{N+1} \leq \frac{1}{(N+1)!} |x|^{N+1}$$

しかるに $\boxed{\left| f^{(k)}(x) \right| \leq 1}$ なので

$\longrightarrow 0 \quad (N \to \infty)$

ここは すぐあとの補題で示す

したがって

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} f^{(N)}(0) x^n = \cos x$$ がわかった

<u>補題</u> $a \geq 0$ のとき

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$$

(証) $2a \leq n_0$ なる n_0 をとる

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{n_0} \cdot \frac{a}{n_0+1} \cdots \frac{a}{n} \leq \frac{a^{n_0}}{n_0!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}$$

$\frac{a}{n_0+1} \leq \frac{a}{n_0} \leq \frac{1}{2}$, $\frac{a}{n} \leq \frac{a}{n_0} \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{a^{n_0}}{n_0!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

No.

Date

疑問

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$

はなりたつのか？

(答) f(x)によっていろいろ.

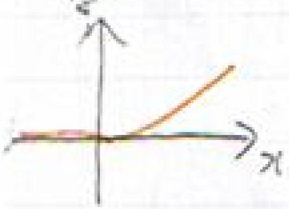
(1) $f(x)=\cos x$ の場合

すべての $x\in\mathbb{R}$ で Taylor 級数は収束して、もとの f(x) に一致する.

(2) $f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$

は $|x|<1$ のとき Taylor 級数は収束してもとの f(x) に一致する

(3) 全然なりたたない例 (その1)



$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{if } x>0 \\ 0 & \text{if } x\le 0 \end{cases}$$

実は f(x) は何回でも微分できて、

$$f^{(n)}(0)=0 \quad (\forall n)$$

となる.

$$h^{-n}e^{-\frac{1}{h}}=\frac{1}{h^n e^{\frac{1}{h}}}\le\frac{1}{h^n\left(1+\frac{1}{h}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{h^{n+1}}\right)}$$

$$\downarrow h\to 0$$

$$0$$

このとき $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n=0\neq f(x)$

(4) 全然なりたたない例（その2）

<u>定理</u>（E. Borel cf. e.g. トレーブ「位相ベクトル空間 超関数・核」 吉田耕作 定理38.1

$\forall \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$：実数列 $\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 何回でも微分可能な函数

$f^{(n)}(0) = a_n \quad (\forall n \geqq 0)$

例 $a_n = (n!)^2$

これに対応する $f(x)$ の Taylor 級数は

$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ 収束半径 $=0$

Taylor 級数は $x \neq 0$ では収束しない。

（数 pp 49-53，第 94～99） Taylor 展開 つづき

$a \in \mathbb{R}$

$f(x)$：$x=a$ のまわりで定義された（必要なだけ微分できる）函数

$n \geqq 1$

$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k \overset{\mathrm{def}}{=} R_n(x)$ n次剰余項

$\boxed{R_n(x) \text{ を評価したい}}$

<u>Taylor の定理</u> $p, a, q \in \mathbb{R}$

$p < a < q$

$f:]p, q[\to \mathbb{R}$ n回微分可能な函数

$\forall x \in]p, q[\quad \exists \theta = \theta_x \in]0, 1[$

$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a + \theta(x-a))(x-a)^n$

$x \to a$ としたときの $R_n(x)$ のふるまいを調べる

No.

Date

漸近展開　$a \in \mathbb{R}$

$f(x)$：$x=a$のまわりで定義された C^n級函数
（$f^{(1)}, f^{(2)}, \cdots f^{(n)}$が存在して連続）

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} R_{n+1}(x) = 0$$

（つまり $R_{n+1}(x)$ は $(x-a)^n$ より速く 0 に収束する）

（証）Taylorの定理から $\forall x, \exists \theta \in]0,1[$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+\theta(x-a))(x-a)^n$$

$$\frac{1}{(x-a)^n} R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(a+\theta(x-a)) - f^{(n)}(a)\right)$$

$\cancel{x \to a}$ $\downarrow$ $x \to a$, $f^{(n)}$ 連続

0 //

Landauの記号　$a \in \mathbb{R}$

$f(x)$; $g(x)$：$x=a$のまわりで定義された函数

小文字のオー

定義　$f(x) = o(g(x))$ $(x \to a)$

$$\underset{def}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

（つまり $f(x)$ は $g(x)$ より速く 0 に収束する）

とくに $f(x) = o(1)$ $(x \to a)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = 0$$

漸近展開

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + o((x-a)^n) \quad (x \to a)$$

例　$\sin x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$ $(x \to 0)$

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)}{x^3} = -\frac{1}{3} + o(x) \xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{\frac{o(x^4)}{x^3}}{x} = \frac{o(x^4)}{x^4} = 0 \right)$$

No.

Date

例 $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ $(x \to 0)$

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

$$\frac{\log(1+x) - x}{\cos x - 1} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \frac{\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)}{\frac{1}{x^2}\left(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)} = \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} \xrightarrow[x \to 0]{} 1 \qquad \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}$$

極大・極小 $a \in \mathbb{R}$

$f(x)$ は $x = a$ のまわりで定義された C^2 級関数

$f'(a) = 0$ $f''(a) > 0$

$\Rightarrow$ $f(x)$ は $x = a$ で極小になる。

(証) $f(x) = f(a) + \underbrace{f'(a)(x-a)}_{\parallel\ \text{仮定}} + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + o((x-a)^2)$ $(x \to a)$

$$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = \frac{\frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + o((x-a)^2)}{(x-a)^2} = \frac{1}{2}f''(a) + o(1) \xrightarrow[x \to a]{} \frac{1}{2}f''(a) > 0$$

$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} > 0$

$x (\neq a)$ が a に充分近ければ

$\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} > 0$ このとき、 $f(x) - f(a) > 0$

$f(x) > f(a)$

$f(x)$ は $x = a$ で狭義の極小になる。

二変数函数のTaylor展開

$(a, b) \in \mathbb{R}^2$

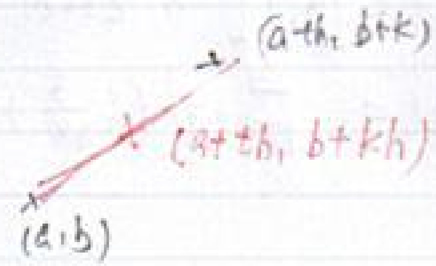
$f(x, y)$: $(x, y) = (a, b)$ のまわりで定義された函数。

$(h, k) \in \mathbb{R}^2$ 充分小

$f(a+h, b+k)$ を h と k の多項式で近似する

$0 \leq t \leq 1$

$\varphi(t) \overset{\text{def}}{=} f(a+th, b+tk)$ とおく。



No.

Date

§5 Taylor 展開 つづき

補題 $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 = (x\ y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

(1) $ac - b^2 > 0$ かつ $a > 0$

$\Rightarrow (0,0) \neq {}^\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad f(x,y) > 0 = f(0,0)$

(2) $ac - b^2 > 0$ かつ $a < 0$

$\Rightarrow (0,0) \neq {}^\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) < 0 = f(0,0)$

(3) $ac - b^2 < 0$

$\Rightarrow {}^\exists(p_1, p_2) \quad {}^\exists(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$

$f(p_1, p_2) < 0 < f(q_1, q_2)$

(3) の場合

$f(tp_1, tp_2) = t^2 \underbrace{f(p_1, p_2)}_{\wedge\, 0}$

$t = 0$ で極大

$f(tq_1, tq_2) = t^2 \underbrace{f(q_1, q_2)}_{\wedge\, 0}$

$t=0$ で極小

$(HF)_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$

$ac - b^2 = \frac{1}{4} \det (HF)(0,0)$

$a = \frac{1}{2} f_{xx}(0,0)$

No.
Date

<u>定理</u> $(a,b)\in\mathbb{R}^2$

$f(x,y)$: $(x,y)=(a,b)$ のまわりで定義された C^2 級関数

$f_x(a,b)=f_y(a,b)=0$ (つまり (a,b) は f の停留点)

(1) $\det(Hf)_{(a,b)}>0$ かつ $f_{xx}(a,b)>0$

$\Rightarrow f$ は (a,b) で極小

(2) $\det(Hf)_{(a,b)}>0$ かつ $f_{xx}(a,b)<0$

$\Rightarrow f$ は (a,b) で極大

(3) $\det(Hf)_{(a,b)}<0$ (このとき (a,b) は f の鞍点という)

$\Rightarrow f$ は (a,b) で極大でも極小でもない.

極大・極小
↓
テスト出る!

例 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-x^3$ (以前やった例)

$$\begin{cases} f_x(x,y)=2x+y-3x^2 \\ f_y(x,y)=x+2y \end{cases}$$

停留点は $(0,0)$ と $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ (以前やった)

$$(Hf)_{(x,y)}=\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-6x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det(Hf)_{xy}=4-12x-1=3-12x$

$(0,0)$ では $\begin{cases} \det(Hf)_{(0,0)}=3>0 \\ f_{xx}(0,0)=2>0 \end{cases}$ 極小

$\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ では $\det(Hf)_{\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)}=-3<0$ 極大でも極小でもない

例題 $f(x,y) = 8x^2 + y^2 + 4x^3 + 2x^2y$

の停留点を全て求め，極大，極小，いずれでもない

を判定せよ

$$\begin{cases} f_x = 16x + 12x^2 + 4xy \\ f_y = 2y + 2x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0),\ (-1,-1),\ (4,-16)$$

$y = -x^2$ を代入

$$(Hf)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 16+24x+4y & 4x \\ 4x & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(Hf)_{(x,y)} = 8(-2x^2 + 6x + y + 4)$$

$\boxed{(0,0)}$ $\det(Hf)_{(0,0)} = 32 > 0$. $f_{xx}(0,0) = 16 > 0$

$\boxed{(-1,-1)}$ $\det(Hf)_{(-1,-1)} = -40 < 0$ 極大でも極小でもない.

$\boxed{(4,-16)}$ $\det(Hf)(4,-16) = -160 < 0$ 極大でも極小でもない.

定理の証明 $(a,b) = (0,0)$ $f(0,0) = 0$ としてよい

$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ なので Taylor の定理から

$\exists \theta = \theta(x,y) \in]0,1[$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x,y)(Hf)_{(\theta x, \theta y)}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\{\underbrace{f_{xx}(\theta x, \theta y)}_{a}x^2 + 2\underbrace{f_{xy}(\theta x, \theta y)}_{b}xy + \underbrace{f_{yy}(\theta x, \theta y)}_{c}y^2\}.$$

(1) $\det(Hf)_{(0,0)} > 0$ かつ $f_{xx}(0,0) > 0$ とする

f は C^2 級なので $\det(Hf)_{(x,y)}$ および

$f_{xx}(x,y)$ は (x,y) について 連続

$\det(Hf)_{(\theta x, \theta y)} > 0$

$f_x(\theta x, \theta y) > 0$

補題の(1)により、$(0,0) \neq (x,y)$ について、

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(x, y)\,(Hf)_{(\theta x, \theta y)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0 = f(0,0)$$

つまり $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極小になる。

(2) (1)と同様、または

$-f$ に(1)を適用する。

(3) $\det (Hf)_{(0,0)} < 0$ とする。

補題(B)から $^\exists (p_1, p_2)\ ^\exists (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{1}{2}(p_1\ p_2)(Hf)_{(0,0)} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} < 0$$

$$\frac{1}{2}(q_1, q_2)(Hf)_{(0,0)} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} < 0$$

となる $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} f(tp_1, tp_2)$ を計算する。

$$\frac{1}{t^2} f(tp_1, tp_2) = \frac{1}{2t^2}(tp_1\ tp_2)(Hf)_{(\theta_t tp_1, \theta_t tp_2)} \begin{pmatrix} tp_1 \\ tp_2 \end{pmatrix} \quad (\theta_t \in]0,1[)$$

$$= \frac{1}{2}(p_1\ p_2)(Hf)_{(\theta_t tp_1, \theta_t tp_2)} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} f: C^2\text{級} \\ Hf: \text{連続} \end{pmatrix}$ $\xrightarrow[t \to 0]{} \frac{1}{2}(p_1, p_2)(Hf)_{(0,0)} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} < 0$

結局、$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} f(tp_1, tp_2) < 0$

充分小さい $t (\neq 0)$ について、

$f(tp_1, tp_2) < 0 = f(0,0)$

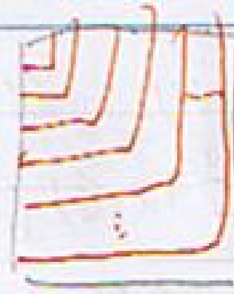
$f(tp_1, tp_2)$ は $t=0$ で極大

同様に $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} f(tq_1, tq_2) = \frac{1}{2}(q_1, q_2)(Hf)_{(0,0)} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} > 0$

したがって、$f(tq_1, tq_2)$ は $t=0$ で極小。

結局 $f(x,y)$ は $(0,0)$ で極大でも極小でもない。

$$\boxed{\begin{matrix} \boxed{f_{xx}} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{matrix}} \qquad Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{xy} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{xz} & f_{yz} & f_{zz} \end{pmatrix}$$



N変数の場合

$N \geqq 2$

$p = (p_1, p_2, \cdots\cdots p_N) \in \mathbb{R}^N$

$f(x) = f(x_1, x_2, \cdots x_N)$: $x = p$のまわりで定義されたC^2級関数

$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_N}(p) = 0$

(つまりpはfの停留点)とする

(1) $1 \leqq \forall l \leqq N \quad \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)_{1 \leqq i,j \leqq l} > 0$

$\Rightarrow$ fはpで極小.

(2) $1 \leqq \forall l \leqq N \quad (-1)^l \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)_{1 \leqq i,j \leqq l} > 0$

$\Rightarrow$ fはpで極大.

(3) (1)(2)が成立たないが $\det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)_{1 \leqq i,j \leqq N} \neq 0$

$\Rightarrow$ fはpで極大でも極小でも無い.

証明略

たとえば

杉浦光夫「解析入門I」東大出版会 pp153~161をみよ.

$(Hf)_p$: 対称行列

$\exists P$: 直交行列

$${}^tP(Hf)_pP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 \ddots & \\ 0 & & \lambda_N \end{pmatrix} \qquad (\lambda_i \in \mathbb{R})$$

Pによって座標変換をすると.

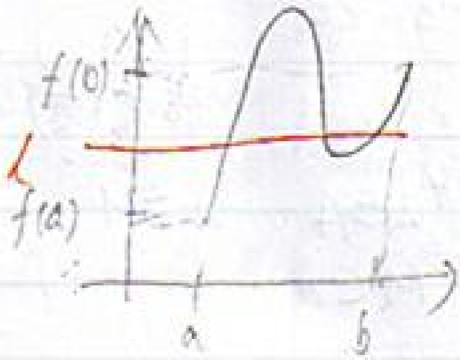
$2f \fallingdotseq \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \cdots + \lambda_N \xi_N^2$

(1) $\Leftrightarrow \forall \lambda_i > 0$
$\Leftrightarrow$ fはpで極小

(2) $\Leftrightarrow \forall \lambda_i < 0$
$\Leftrightarrow$ fはpで極大

(3) $\Leftrightarrow$ 正のλ_iと負のλ_iがまじっている
$\Leftrightarrow$ 極大でも極小でもない!

§6 上限の存在 とその応用
(準教科書 p6, p13)



中間値の定理 $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 連続函数

$f(a) < f(b)$

$\Rightarrow \forall l\ [f(a), f(b)]\ \exists c \in [a, b]$

$f(c) = l$

証明の方針

$$A = \{x \in [a, b]\ ;\ f(x) \leq l\}$$

とおく. $c = \mathrm{Max}\,A$ とおけば

$f(c) = l$ となるだろう.

しかし いつも $\max A$ が存在するとは限らない.

$\max\,[0, 1[$ は存在しない.

でも $\max\,[0, 1[\ = 1$ と言いたい.

代わりに $\sup\,[0, 1[\ = 1$ と書く.

上限 (supremum)

一般に $A \subset \mathbb{R}$ (実数からなる集合)
空でないとする

<u>定義</u> $M = \max A$ 最大(元)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ (1) $\forall a \in A \quad a \leqq M$
(2) $M \in A$

<u>例</u> $\max\{1, 2, 3\} = 3$
$\max[0, 1] = 1$
$\max[0, 1[$ は存在しない.

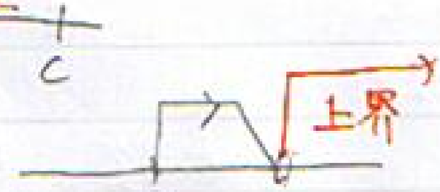
(∵)(背理法) $M = \max[0, 1[$ とする.
条件2から $0 \leqq M < 1$
$\frac{1}{2}(M+1) \in [0, 1[$ であるが $M \lneqq \frac{1}{2}(1+M)$ となって,
条件1)に矛盾.

一般に $A \subset \mathbb{R}$ 空でない.
$C \in \mathbb{R}$

定義 CはAの<u>上界</u> (upper bound)

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\forall a \in A \quad a \leqq C$

例 $A = [0, 1[$



CがAの上界 $\Longleftrightarrow$ $C \in [1, +\infty[$
上界をもつ集合を<u>上に有界で</u>ある, という. ($[0, +\infty[$ は上に有界ではな

<u>定義</u> $A \subset \mathbb{R}$ 空でない集合について.
Aの上界の最小元を上限 (supremum) といい, $\sup A$ と書く.

$\sup\{1-\frac{1}{n} : n \geq 1\} = 1$

例 $\sup [0,1[= \min [1,+\infty[= 1$ $\sup [0,1] = 1$

$\max A$ が存在する Aについては、

$\max A = \sup A$

(∵) $\forall a \in A,\ a \leq \max A$ つまり $\max A$はAの上界

xがAの上界ならば、$\max A \in A$ より $\max A \leq x$ したがって $\max A$は上界の最小限 //

下限 (infimum) $\inf A$ も同様に定義される。

上限定理

どんな集合 $A \subset \mathbb{R}$についても、空でなくて、上に有界ならば、上限 $\sup A \in \mathbb{R}$ が存在する。

(次回証明)(時間の都合)

補題 $A \subset \mathbb{R}$ 上に有界な空でない集合

$\Longrightarrow$ 数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で次をみたすものがとれる。

1) $\forall n \geq 1$ $a_n \in A$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$

証明 $M = \sup A$とする。

整数 $n \geq 1$について $M - \frac{1}{n}$はAの上界ではない。

$M - \frac{1}{n} < a_n \leq M$ をみたす $a_n \in A$ がとれる

$n\to\infty$ で $M-\frac{1}{n} \to M$

はさみうちにより

$\lim_{n\to\infty} a_n = M$

中間値の定理の証明

$A=\{x\in[a,b],\ f(x)\le l\}$

空ではない ($a\in A$). bを上界にもつ.

上限定理から $\sup A$ が存在する.
cとおく

$c\in[a,b]$

$f(c)\ge l$ かつ $f(c)\le l$ を示せばよい.

$\boxed{f(c)\ge l \text{について}}$

$c+\frac{1}{n}\notin A$

$f(c+\frac{1}{n})>l$

$\downarrow n\to\infty$ f連続

$f(c)\ge l$

$\boxed{f(c)\le l \text{について}}$

補題から $a_n\in A$, $n\ge 1$ で

$\lim_{n\to\infty} a_n=c$ をみたすものがとれる.

$f(a_n)\le l$ ($\because\ a_n\in A$)

$\downarrow n\to\infty$ f連続

$f(c)\le l$

両方合わせて $f(c)=l$ となる.

下界(かかい)と下限 $A\subset\mathbb{R}$ 空でない集合, $c\in\mathbb{R}$

定義 cがAの下界(lower bound)である

$\overset{def}{\iff} \forall a\in A\quad c\le a$

例 ① $A=[0,1]$

cがAの下界 $\iff c\in\,]-\infty,0]$

② $A=]0,1]$

cがAの下界 $\iff c\in\,]-\infty,0]$

下界をもつ集合を下に有界であるという.

定義 $A \subset \mathbb{R}$ 空でない下に有界な集合.

Aの下界の最大限をAの下限(infimum)といい

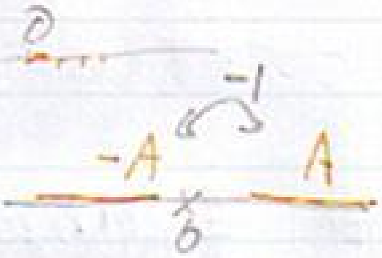
$\inf A$ と表す

例) $\inf[0,1] = \inf\,]0,1] = 0$

最小限 $\min A$ が存在すれば

$\Rightarrow \inf A = \min A$

$\inf\{\frac{1}{n} ; n \geq 1\} = 0$



$-A = \{-a : a \in A\}$

とおく.

$\inf A = -\sup(-A)$

上限定理

$A \subset \mathbb{R}$・空でない上に有界な集合とすると必ず上限 $\sup A$ が存在する.

証明 $\mathbb{R} = \{$無限小数$\}$

(ただし $0.999\cdots\cdots = 1$ と約束する)

$n_0 \overset{def}{=} \{$Aの上界に含まれる最小の整数$\}$

$m_0 = n_0 - 1$

$n_1 \overset{def}{=} \{m_0 + \frac{1}{10}n$ が Aの上界にふくまれる最小の整数 $n\}$

$\in \{1, 2, \cdots 10\}$

$m_1 \overset{def}{=} n_1 - 1$

$n_2 \overset{def}{=} (m_0 + \frac{1}{10}m_1 + \frac{1}{100}n$ が Aの最小の $n)$

$\in \{1, 2, \cdots 10\}$

$m_2 \overset{def}{=} n_2 - 1$

これを続けていって

$M \overset{def}{=} m_0.m_1 m_2 \cdots m_k m_{k+1} \cdots \in \mathbb{R}$

(無限小数) と定める.

__定理__ 逆関数 f^{-1} は $[p,q]$ 上連続で
$]p,q[$ 上微分可能であり、

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad (y \in]p,q[)$$

をみたす。

__証明__ 連続性は直観的に明らか(略)
微分可能性だけ示す $h \neq 0$

$$\frac{1}{h}\left(f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)\right) = \left(\frac{h}{f^{-1}(y+h)-f^{-1}(y)}\right)^{-1} = \left(\frac{f(f^{-1}(y+h)) - f(f^{-1}(y))}{f^{-1}(y+h)-f^{-1}(y)}\right)^{-1}$$

ここで $h \to 0$ とすると $\xrightarrow{h\to 0} \left(f'(f^{-1}(y))\right)^{-1}$

f^{-1} の連続性から $f^{-1}(y+h)-f^{-1}(y) \to 0$

(注) f^{-1} の微分可能性が分かっていれば

$$y = f(f^{-1}(y))$$

の両辺を y で微分して

$$1 = f'(f^{-1}(y))\,(f^{-1})'(y)$$

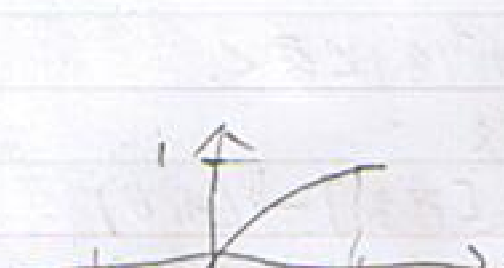
から $(f^{-1})'(y)$ が求まる

__例1__

$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$

狭義単調増大

$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x > 0 \quad (\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$



$$\mathrm{Arcsin} = \mathrm{Sin}^{-1} \overset{\text{def}}{=} \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} : [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

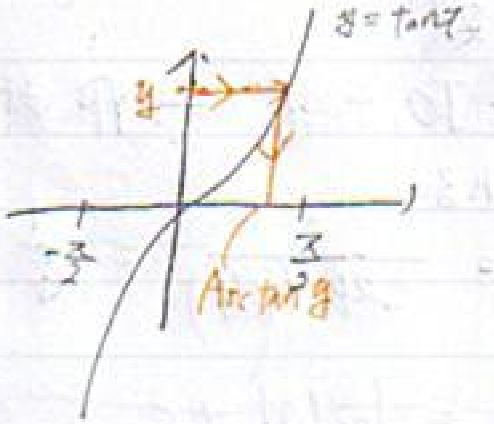
逆正弦関数(の主値)

$$\frac{d}{dy}\,\mathrm{Arc}\sin y = \frac{1}{\cos(\mathrm{Arc}\sin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$

$f(x)=\sin x$
$f'(x)=\cos x$
$\cos^2(\mathrm{Arc}\sin y)$
$= 1-\sin^2(\mathrm{Arc}\sin y)$
$= 1-y^2$

とくに $\displaystyle\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \mathrm{Arc}\sin y + C$
(C: 積分定数)

例2 ☆



$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$
$^\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x > 0$$

($[-\frac{\pi}{2}+\varepsilon, \frac{\pi}{2}-\varepsilon]$ に いまの定理を適用して $\varepsilon \downarrow 0$ とする)

$\mathrm{Arc}\tan = \mathrm{Tan}^{-1} = \left(\tan|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}\right)^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
逆正接関数 (の主値)

$$\frac{d}{dy}\,\mathrm{Arc}\tan y = \frac{1}{1+\tan^2(\mathrm{Arc}\tan y)} = \frac{1}{1+y^2}$$

とくに $\displaystyle\int \frac{dy}{1+y^2} = \mathrm{Arc}\tan y + C$ $\quad \left(\displaystyle\int\frac{dy}{1+y+y^2}\right)$
C: 積分定数

$$\frac{1}{1+y^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k y^{2k} \quad (|y|<1)$$

$$\mathrm{Arc}\tan y = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}y^{2k+1} \quad (|y|<1)$$

$(\because)$ $\frac{d}{dy}$(左辺) $= \frac{1}{1+y^2} = \frac{d}{dy}$(右辺)

左辺 − 右辺 = 定数 ($=C$ とおく)
両辺とも $y=0$ で 0 なので $C=0$

よって 左辺 = 右辺.

例3 $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$

$x \to e^x$

$\frac{d}{dx} e^x = e^x > 0$
狭義単調増大

$\left(\because \ x \geq 0 \text{ のとき } e^x = \sum \frac{1}{n!} x^n \geq 1 > 0, \quad x < 0 \text{ のとき } e^x = (\underset{\overset{\vee}{0}}{e^{-x}})^{-1} > 0 \right)$

逆函数

$\log :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ 対数函数

がとれる.

$$\frac{d}{dy}\log y = \frac{1}{\exp(\log y)} = \frac{1}{y}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \log|y| + C \quad C: \text{積分定数}$$

$$\left(\int \frac{1+y}{1+y^2} dy = \int \frac{1}{1+y^2} dy + \frac{1}{2}\int \frac{2y}{1+y^2} dy = \operatorname{Arctan} y + \frac{1}{2}\log(1+y^2) + C \quad (C: \text{積分定数}) \right)$$

$$\log(y_1 y_2) = \log y_1 + \log y_2$$

$$\frac{d}{dy}\log(1+y) = \frac{1}{1+y} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k y^k \quad (|y|<1)$$

$$\log(1+y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} y^{k+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^n \quad (|y|<1)$$

数列に sup の存在を応用する。

有界単調増大数列は収束する。

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ：実数列，$M \in \mathbb{R}$

$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots \leq M$

${}^{\exists} l \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \to \infty} x_n = l$

(証) $A \overset{def}{=} \{x_n : n \geq 1\} = \{x_1, x_2, \cdots x_n \cdots\} \subset \mathbb{R}$

とおく。空ではない。Mを上界に持つ

上限定理から $\sup A \in \mathbb{R}$ が存在する

$= l$ とおく。

${}^{\forall} k \geq 1$ をとる

$l - \frac{1}{k}$ はAの上界ではないから

ある n_k があって

$l - \frac{1}{k} < x_{n_k}$

となる。このとき $n_k \leq {}^{\forall} n$ について

$l - \frac{1}{k} < x_{n_k} \leq x_n \leq l$

kは任意にとったので

これはつまり $n \to \infty$ としたときに

x_n が l にいくらでも近づくということ。

したがって $\lim_{n \to \infty} x_n = l$

単調増大数列については

$\lim_{n \to \infty} x_n = \sup_{n \geq 1} x_n$

が成り立つ。

単調減少列についても同様。

(§6 上限の存在とその応用 つづき)

上極限・下極限

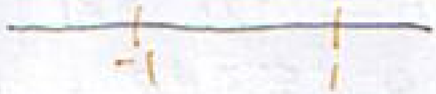
どんな実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ についても

上極限 $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$ と 下極限 $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

が定義できる。

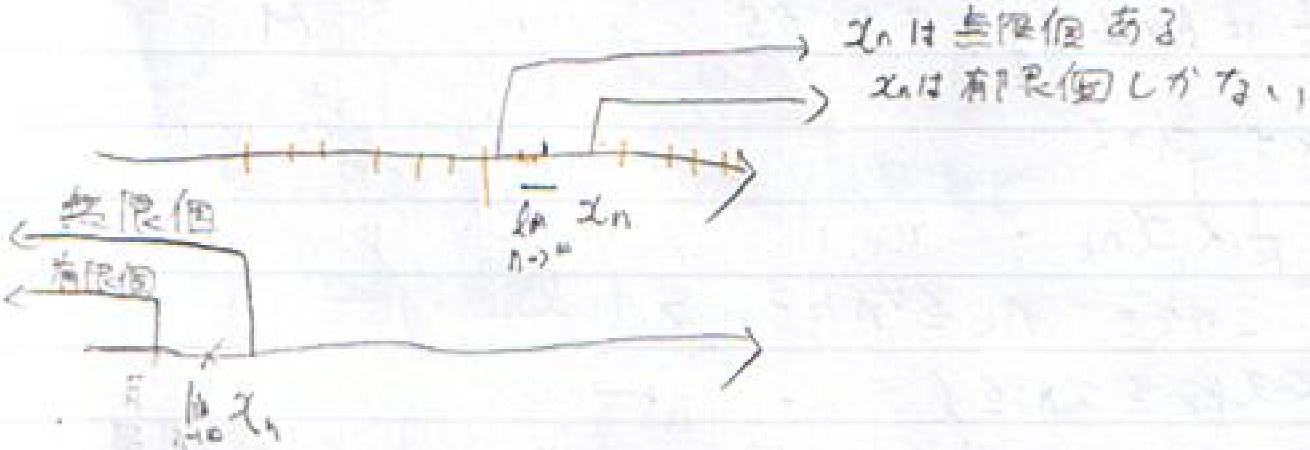
例 ・$\lim_{n\to\infty} x_n$ が存在するときは $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} x_n$

・$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(-1)^n = 1$ $\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(-1)^n = -1$



・$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, n = +\infty$

・$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(-1)^n n = +\infty$ $\underline{\lim_{n\to\infty}}\,(-1)^n n = -\infty$



記号 $A\subset\mathbb{R}$ 空でない集合

Aが上に有界でないとき $\Longleftrightarrow$ $\sup A = +\infty$ と書く

下に有界でないとき $\Longleftrightarrow$ $\inf A = -\infty$ と書く

すると、どんな空でない集合 $A\subset\mathbb{R}$ についても、いつでも

$\sup A,\ \inf A \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$

が定まる

No.

Date

上極限の定義

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 実数列

$N \geq 1$

$$y_N \overset{\text{def}}{=} \sup\{x_n : n \geq N\} = \sup_{n \geq N} x_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

とおく.

$y_{N+1} \leq y_N$ (単調減少)

(∵) $\{x_n : n \geq N+1\} \subset \{x_n : n \geq N\}$

$\underline{\qquad\qquad}$ の上界 $\supset$ $\underline{\qquad\qquad}$ の上界

min を取って $y_{N+1} \leq y_N$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n \overset{\text{def}}{=} \inf_{N \geq 1} y_N = \lim_{N\to\infty} y_N \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$= \inf_{N \geq 1}\left(\sup_{n \geq N} x_n\right) \quad \text{上極限}$$

同様に

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n \overset{\text{def}}{=} \sup_{N \geq 1}\left(\inf_{n \geq N} x_n\right) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

例 $x_n = (-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$

-1 $\quad$ 1

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = 1 \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = -1$$

(∵) 前半のみ示す. (後半は同様)

$$\sup_{n \geq N} x_n = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{N} & N : \text{偶数} \\ 1 + \dfrac{1}{N+1} & N : \text{奇数} \end{cases}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf_{N \geq 1} \sup_{n \geq N} x_n = \inf\left\{1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{4}, \cdots, 1+\frac{1}{2m}, \cdots\right\}$$
$$= 1$$

(∵) 1) $\forall m$, $1 \leq 1 + \frac{1}{2m}$, 1 は下界

2) $1 < c$ ならば $\frac{1}{c-1} < 2m$ なる m をとれば

$1 + \frac{1}{2m} < c$ なので c は下界ではない

すぐわかること

補題1　$\{x_n\}$：実数

(1) $\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqq \varlimsup_{n\to\infty} x_n$

(2) $\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqq -\varlimsup_{n\to\infty} (-x_n)$

(証) (1) $\inf_{n\geq N} x_n \leqq \sup_{n\geq N} x_n$

$N\to\infty$

$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqq \varlimsup_{n\to\infty} x_n$

(2) $\sup A = -\inf(-A)$

$\inf A = -\sup(-A)$　を使えば良い

補題2　$\{x_n\}, \{y_n\}$：実数列．$n_0 \geqq 1$

(1) $n_0 \leqq {}^\forall n \quad x_n \leqq y_n$

$\Rightarrow \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqq \varlimsup_{n\to\infty} y_n$

$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqq \varliminf_{n\to\infty} y_n$

(2) $a, b \in \mathbb{R} \quad a<b$

$n_0 \leqq {}^\forall n \quad a \leqq x_n \leqq b$

$\Rightarrow a \leqq \varliminf_{n\to\infty} x_n \leqq \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqq b$

(1) $\varlimsup$ についてのみ示す　$\varliminf$ についても同様

$N \geqq 1$

$\{x_n : n \geqq N\}$ の上界 $\supset$ $\{y_n : n\geqq N\}$ の上界

(∵ Ψ c とすると

$x_n \leqq y_n \leqq c$

ゆえに c は $\{x_n\}$ の上界)

$\sup_{n\geq N} x_n \leqq \sup_{n\geq N} y_n$

$N\to\infty$ とすると

$\varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqq \varlimsup_{n\to\infty} y_n$

No.

Date

(2) (1) で $^{\exists}n$ $= b$ とおく

(1) より $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} b = b$

他の部分でも同様.

<u>補題3</u> $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 実数列

$\lim_{n\to\infty} x_n$ が存在する ($=l$ とおく)

$\Rightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = l$

(証) $^{\forall}k \geqq 1$ をとる. $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ ということは

充分大きい n については, x_n と l は

小数点以下 k 桁まで一致する

つまり, $^{\exists}n_k$, $n_k \leqq {}^{\forall}n$

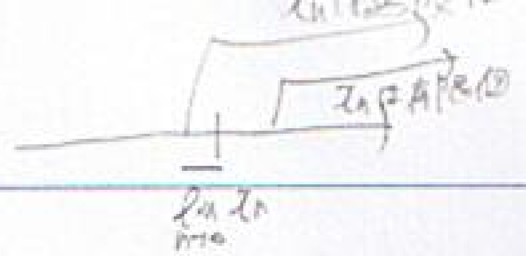
$l - \frac{1}{10^k} < x_n < l + \frac{1}{10^k}$

この不等式に補題2(2)を適用すると

$l - \frac{1}{10^k} \leqq \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n \leqq l + \frac{1}{10^k}$

k は任意, だから $k \to \infty$ として

$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = l$



補題4　$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$：実数列，$s\in\mathbb{R}$

(1) $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n < s \Rightarrow s \le x_n$ をみたす n は有限個しかない

(2) $s < \overline{\lim}_{n\to\infty} \Rightarrow s \le x_n$ をみたす n は無限個ある

(証) (1) $\inf_{N\ge 1}\left(\sup_{n\ge N} x_n\right) < s$

sは $\{\sup_{n\ge N} x_n\}$ の下界ではない

つまりある N_0 について

$\sup_{n\ge N_0} x_n < s$

このとき $\forall n \ge N_0$ について

$x_n \le \sup_{n\ge N_0} x_n < s$

逆に言うと，$s \le x_n$ ならば $n \le N_0 - 1$

つまり多くても $N_0 - 1$ 個しかない

とくに有限個

(2) $s < \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \inf_{N\ge 1}\left(\sup_{n\ge N} x_n\right) \le \sup_{n\ge k} x_n \quad ({}^{\forall}k)$

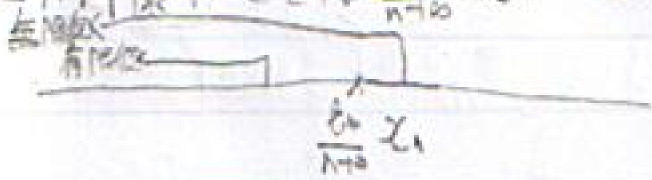
sは $\{x_n : n \ge k\}$ の上界ではないので，

$\exists n_k \quad s < x_{n_k}$ となる

kを動かすと n_k たちは無限個ある．

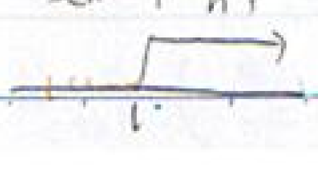
したがって $s < x_n$ なるnは無限個ある．//

(注) 同様のことは $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ でも成立つ．



・$s = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ についてはどちらも言えない．

$x_n = 1 - \frac{1}{n}$，　$x_n = 1 + \frac{1}{n}$



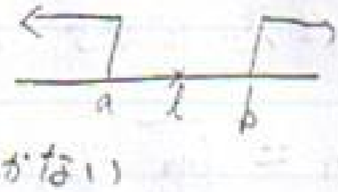
数列の収束のε論法との関係

定理6 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$：実数列 $l \in \mathbb{R}$

このとき 次の条件 (a)(b)(c) は互いに同値

(a) $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = l$

(b) $a < l < b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ ならば



$x_n \leq a$ または $b \leq x_n$ をみたす n は有限個しかない

(c) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$, $n_\varepsilon \leq \forall n$

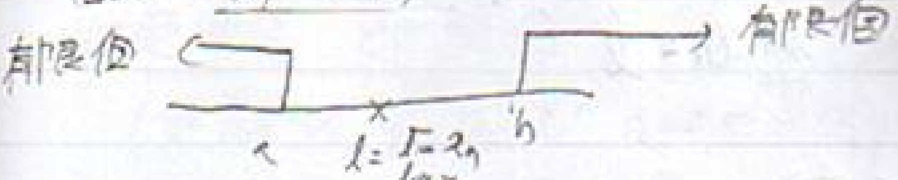
$$|x_n - l| < \varepsilon$$

(注) (c) が ε-論法による

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l$$

の定義に他ならない。

(証) (a) ⇒ (b)



(b) ⇒ (c) $a = l - \varepsilon$, $b = l + \varepsilon$ とおくと

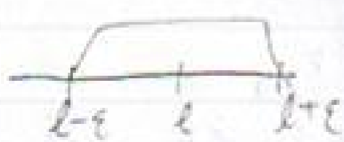
$x_n \leq l - \varepsilon$ または $l + \varepsilon \leq x_n$ をみたす

n は有限個しかない

そのような n の最大に 1 を足したものを

n_ε とおく。

このとき $n_\varepsilon \leq \forall n$



$$l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$$

つまり $|x_n - l| < \varepsilon$ // (証終)

$(c) \Rightarrow (a)$ $\forall \varepsilon > 0$をとる.

$\exists n_\varepsilon \quad n_\varepsilon \leqq \forall n \qquad l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$

この不等式に補助定理2(2)を適用すると

$$l - \varepsilon \leqq \varliminf_{n\to\infty} x_n \leqq \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqq l + \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$は任意だから $\varepsilon \downarrow 0$とすると

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = l$$

Cauchy列との関係

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$:実数列

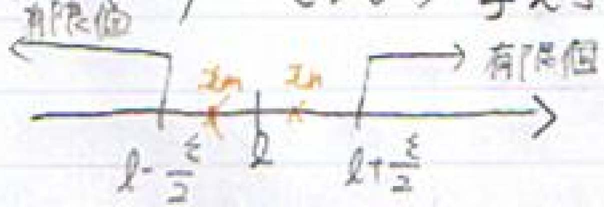
定義 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$: Cauchy列

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_\varepsilon \qquad m_\varepsilon \leqq \forall n \leqq \forall m$

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

定理7 Cauchy列 $\Longleftrightarrow \exists l \in \mathbb{R} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = l$

(証)($\Leftarrow$) $\forall \varepsilon > 0$が与えられたとする



$\exists m_\varepsilon, \; m_\varepsilon \leqq \forall n$

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < x_n < l + \frac{\varepsilon}{2}$$

となる. このとき $m_\varepsilon \leqq \forall n \leqq \forall m$

$$|x_m - x_n| < \left(l + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(l - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

つまり $\{x_n\}$は Cauchy列

No.

Date

(⇒) $\forall \varepsilon>0$ が与えられたとする

$\exists m_\varepsilon,\ m_\varepsilon \leqq \forall n \leqq \forall m$

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

とくに $n = m_\varepsilon$ とする $m_\varepsilon \leqq \forall m$

$$x_{m_\varepsilon} - \varepsilon < x_m < x_{m_\varepsilon} + \varepsilon$$

補題 2(2) を適用すると

$$x_{m_\varepsilon} - \varepsilon \leqq \varliminf_{n\to\infty} x_n \leqq \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqq x_{m_\varepsilon} + \varepsilon$$

したがって，$\varliminf_{n\to\infty} x_n$, $\varlimsup_{n\to\infty}$ とも $\neq \pm\infty$ であって

$$0 \leqq \varlimsup_{n\to\infty} x_n - \varliminf_{n\to\infty} x_n \leqq 2\varepsilon$$

$\varepsilon>0$ は任意なので $\varepsilon \downarrow 0$ として

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n$$

つまり $\{x_n\}$ は収束する //

収束半径との関係　$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$：実数列

(整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径)

$= \sup\{r : r \geqq 0,\ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ が収束する $\}$

No.

Date

冪級数

Cauchy - Hadamard の公式 (p144, p148)

整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ の収束半径は

$$\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$$ ← テスト出る可能性あり

に等しい (ここでは $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$ とする)

証明 $r = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}\right)^{-1}$ とおく.

示すべきこと

(1) $0 < s < r$ ならば $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| s^n$ は収束する (とくに $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ は収束する)

(2) $r < s$ ならば $|a_n| s^n$ は $n \to \infty$ のとき 0 に収束しない (とくに $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ は収束しない)

(1) $0 < s < r$ とする.

$\frac{1}{r} < \frac{1}{s}$ だから $\frac{1}{r} < t < \frac{1}{s}$ なる t をとる.

いま $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{r} < t$ だから $t \leq \sqrt[n]{|a_n|}$ なる n は有限個しかない

$^{\exists} n_0,\ n_0 \leq {}^{\forall} n$, $\sqrt[n]{|a_n|} < t$

$t \leq x_n$ なる n より大きい数

このとき $|a_n| < t^n$

$|a_n| s^n < s^n t^n$

いま $st < 1$ なので $\sum_{n=0}^{\infty} (st)^n$ は収束し, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| s^n$ の

優級数になっている ゆえに $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| s^n$ は収束する // (1)

(2) $r < s$ とする

$\frac{1}{s} < \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$

したがって, $\frac{1}{s} \leq \sqrt[n]{|a_n|}$ をみたす n は無限個ある

$1 \leq |a_n| s^n$ をみたす n は無限個ある.

したがって $|a_n| s^n$ は $n \to \infty$ のとき 0 に収束しない // (2) C-H 公式

No.

Date

$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$

項別微分可能

収束半径が一致する。 ← これを示す。

定理 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$：実数列について

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$$

が成立つ。つまり、$\sum n a_n x^{n-1}$ の収束半径は $\sum a_n x^n$ の収束半径に等しい

証明 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$：実数列について

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{|b_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|}$$

(∵) $x>0$ について

$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| x^n$ が収束する $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| x^n}_{= \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| x^{n-1}}$ が収束する。

したがって

$(\text{左辺})^{-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1} \text{ の収束半径}\right)$

$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \text{ の収束半径}\right)$

$= (\text{右辺})^{-1}$

//

$b_n = n a_n$ とおくと

与式左辺 $= \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n|a_n|}$

となる。

$\forall \varepsilon > 0$ をとる

$\frac{1}{n^2}\left((1+\varepsilon)^n - n\right) \underset{\text{二項定理}}{\geq} \frac{1}{n^2}\left(1 + n\varepsilon + \frac{1}{2}n(n-1)\varepsilon^2 - n\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}\varepsilon^2 > 0$

したがって、充分大きい n については $\frac{1}{n^2}\left((1+\varepsilon)^n - n\right) > 0$

とくに $(1+\varepsilon)^n \geq n$

No.

Date

いいかえると

${}^{\exists}n_\varepsilon,\ n_\varepsilon \leq {}^{\forall}n \qquad 1 \leq n \leq (1+\varepsilon)^n$

$\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1+\varepsilon$

このとき $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{n|a_n|} \leq (1+\varepsilon)\sqrt[n]{|a_n|}$

ゆえに

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} \leq (1+\varepsilon) \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

いま $\varepsilon>0$ は任意だから $\varepsilon \downarrow 0$ として

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

//

(ex $\frac{1}{1+x} = \sum (-1)^n x^n$) ← 解析級数

・以前の補足

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$; 収束半径 >0 とする

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}$$

$$f^{(k)}(0) = k(k-1)\cdots 1 a_k = k! a_k$$

ゆえに $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$

したがって $f(x)$ の $x=0$ での Taylor 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$ は $\sum a_n x^n$ にひとしい