数IB 定理・公式集 ①

○ ロルの定理 … $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 連続関数
が微分可能であって $f(a) = f(b)$ をみたす。
$\Rightarrow$ ある $c \in]a,b[$ において、$f'(c) = 0$ が成り立つ。

○合成関数の微分 (chain rule)

$l(t) = (x(t), y(t))$ 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の曲線
$f(x,y)$ ：二変数関数
$f(x(t), y(t))$ は t の関数

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot \frac{dy}{dt}$$

$x(u,v)$, $y(u,v)$
x, y が二変数 u, v の関数とする。

$$\frac{\partial}{\partial u} f(x(u,v), y(u,v)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)) \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} r > 0 \\ 0 < \theta \leq 2\pi \end{array} \right)$$

$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ について、

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2$ が成立。

②

○オイラーの公式

$f(x,y)$：n次同次

$\Rightarrow x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf$

○接平面　$z=f(x,y)$　点$(a,b,f(a,b))$の接平面は、

$$z-f(a,b)=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

いいかえると、(x,y)が(a,b)に充分近いとき、

$$f(x,y)\fallingdotseq f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)$$

$f(x,y)$の　(a,b)のまわりでの一次近似

○ヤコビ行列

$x(u,v)$, $y(u,v)$　；二変数 u,v の関数

ヤコビ行列は、$\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$

とくに、$\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$ のように逆に解けたようにする。

$f=u$を考えると、

$$\underset{\displaystyle (1\quad 0)}{\underset{\shortparallel}{\left(\frac{\partial u}{\partial u}\quad\frac{\partial u}{\partial v}\right)}}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\quad\frac{\partial u}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

$f=v$も同様で、組み合わせて、

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}$$

③

・2階の偏微分

$f=f(x,y)$；二変数関数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}\overset{def}{=}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

偏微分の順序交換

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

・可積分条件

$g(x,y)$, $h(x,y)$ が与えられたとき

$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=g\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=h\end{cases}$ をみたす $f(x,y)$ が存在するならば

$\dfrac{\partial g}{\partial y}=\dfrac{\partial h}{\partial x}$ をみたす必要がある。

④

○ 極大，極小

定義　$(a,b) \in \mathbb{R}^2$，$f(x,y)$：二変数関数

$z = f(x,y)$ が $(x,y) = (a,b)$ で極大

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \delta > 0$，$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow f(x,y) \leqq f(a,b)$$

$f(x,y)$ が極大または極小

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$

$$(Hf)(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

停留点

点 (a,b) が $f(x,y)$ の停留点

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$

定理　$(a,b) \in \mathbb{R}^2$

$f(x,y)$；$(x,y) = (a,b)$ のまわりで定義された C^2 級関数

$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$

(1) $\det(Hf)(a,b) > 0$ かつ $f_{xx}(a,b) > 0$

$\Rightarrow$ f は (a,b) で極小

(2) $\det(Hf)(a,b) > 0$ かつ $f_{xx}(a,b) < 0$

$\Rightarrow$ f は (a,b) で極大

(3) $\det(Hf)(a,b) < 0$

$\Rightarrow$ このとき f は極大でも極小でもない（鞍点）

⑤

○ 連続関数

$f(x)$ は $x=c$ で連続

$\overset{def}{\iff} \lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

ε-δ 論法による連続の定義

$\forall \varepsilon > 0$, (どんなに小さい $\varepsilon > 0$ についても)

$\exists \delta > 0$ (それにあわせて充分小さく $\delta > 0$ をとれば)

$\forall x \in]a,b[$, $|x-c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$

○ 微分可能 (一変数)

f は $]a,b[$ 上で微分可能

$\overset{def}{\iff}$ [すべての $c \in]a,b[$ について、$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(c+h) - f(c))$ が存在する。]

○ 平均値の定理

$a, b \in \mathbb{R}$ $a<b$

$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ 連続関数

$]a,b[$ 上で微分可能

$\Rightarrow$ ある $c \in (a,b)$ について $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$ が成り立つ。

$\left(f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\, dx \right)$

⑥

○ 平均値の定理（別の形）

$a, h \in \mathbb{R}$

f:（a 及び $a+h$ を含む開区間で微分可能）$\longrightarrow \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ ある $\theta \in]0,1[$ をうまくとると、

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)h$$ とかける。

系1 すべての $x \in]p, q[$ について
$f'(x) = 0$
ならば、$f(x)$ は定数関数である

系2 すべての $x \in]p, q[$ について、
$f'(x) > 0 \ (\geqq 0)$
ならば、f は狭義（広義）単調増大である。

○コーシーの平均値の定理

$a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$
$g : [a, b] \to \mathbb{R}$
連続関数、$]a, b[$ の上で微分可能。

$g(a) \neq g(b)$

$\forall x \in]a, b[, \ g'(x) \neq 0$

$\Longrightarrow \exists c \in]a, b[$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

⑦

○ロピタルの定理

$a \in \mathbb{R}$
$f(x), g(x)$ ：$x=a$のまわりで定義された微分可能関数

$f(a)=g(a)=0$
$g(x)=0$ をみたすxは aのまわりでは aのみ.
$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)}{g'(a+h)}$ が存在する.

$$\Longrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)}{g'(a+h)}$$

(注) $f(a)=g(a)=0$ の仮定は必ずたしかめること。

系：$f(x)$：$x=a$のまわりで定義された2回微分な関数

$f'(a)=0 \quad f''(a)>0$
$\Longrightarrow f(x)$は $x=a$で 狭義の極小

○ 一変数関数の一次近似

$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(x)(x-a)$$

○ 二変数関数での一次近似

$(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$f(x, y)$: $(x, y) = (a, b)$ のまわりで定義された関数.

定義

$f(x, y)$ が (a, b) において x について偏微分可能
$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\{f(a+h, b) - f(a, b)\}$ が存在する.

$$\begin{cases} f(a+h, b+k) = \underbrace{f(a, b)}_{定数項} + \underbrace{ph + qk}_{線形関数} + \underbrace{r(h, k)}_{誤差項} & (p, q \in \mathbb{R}) \\ \displaystyle\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} r(h, k) = 0 \end{cases}$$

とする. このとき, $f(x, y)$ は (a, b) において偏微分可能で,
$p = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $q = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ となる.

(a, b) において一次近似できることを
「(a, b) において全微分可能である」という.

つまり, 全微分可能 $\Rightarrow$ 偏微分可能

定理 $f(x, y)$: (a, b) のまわりで定義された C^1 級関数
($\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ が存在して連続)

$$r(h, k) \overset{def}{=} f(a+h, b+k) - f(a, b) - h f_x(a, b) - k f_y(a, b)$$

$$\Rightarrow \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} r(h, k) = 0$$ つまり 全微分可能

まとめると,
C^1 級 $\Rightarrow$ 全微分可能 $\Rightarrow$ 偏微分可能 (逆はなりたたない)

⑨

○ 収束するとは？

どんな桁数 p をとってもそれにあわせて充分大きい m_p をとれば

$m_p \leqq {}^{\forall}n \leqq m$

$|x_m - x_n| < \frac{1}{10^n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ が収束する

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 数列 $\{\sum_{k=0}^{n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$ が収束する。

このとき $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ と書く。

○ コーシーの判定条件

実数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束することと次の条件をみたすことは同値。

任意の（どんなに小さい）$\varepsilon > 0$ について、
それについて充分大きい m_ε をとると、
$m_\varepsilon \leqq n \leqq m$ となる全ての n, m について、
$|x_m - x_n| < \varepsilon$
が成り立つ。

・「コーシーの判定条件をみたす」＝「コーシー列である」
・つまり「コーシー列 $\Longleftrightarrow$ 収束列」

○ 優級数 $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ 実数列

$k_0 \geqq 1$,

$k_0 \leqq {}^{\forall}k \quad |a_k| \leqq b_k$

$\sum_{k=0}^{\infty} b_k$：収束 $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$：収束する。

（$\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ を $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ の優級数という。）

○ 絶対収束

級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が絶対収束する。
⇔ 級数 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ が収束する。

絶対収束 ⇒ 収束

○ ダランベールの判定法

$\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$: 実数列　$a_k \neq 0$

(1) 有限個のkを除き、
$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \leq r$ をみたすようなrが存在し、$r<1$ ならば
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は絶対収束する。

(2) $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ が存在したとする
($=r$ とおく)

もし $r<1$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は絶対収束し、
$r>1$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は発散する。

(注) $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = 1$ のときは収束、発散いずれも判定できない。

⑪

○ 整級数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a_n \in \mathbb{R}$ を整級数という.

○ 収束半径

$0 \leqq r \leqq \infty$

整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径が r である.

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $|x| < r$ のとき絶対収束し,
$|x| > r$ のとき発散する.

また, 任意の整級数 $\sum a_n x^n$ は収束半径 $r\ (0 \leqq r \leqq +\infty)$ を持つ.

定理 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:整級数
収束半径 $r > 0$ とする.

$\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$ の収束半径も r であり,

$f(x)$ は $]-r, r[$ 上微分可能で,

$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ が成り立つ.

⑫

○ テイラー展開

$f(x)$ の 多項式のとき、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \ (x-a)^k$$

$f(x)$：一般の関数

$n \geqq 1$

$$R_n(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) \ (x-a)^k$$

n次剰余項 (a, fにも 依存する)

○ テイラーの定理

f:(aとbを含む 開区間) $\longrightarrow \mathbb{R}$

　n回微分 可能な 関数

$\Rightarrow$ $^{\exists}c$: aとb の間 にある実数

$$R_n(b) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c) \ (b-a)^n$$

つまり、$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(b-a)^n$

○ テイラーの定理 (別の形)

$p, a, q \in \mathbb{R} \quad p < a < q$

$f:]p, q[\longrightarrow \mathbb{R}$ n回微分可能な 関数

$^{\forall} x \in]p, q[\ ^{\exists} \theta = \theta_k \in]0, 1[$

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a + \theta(x-a)) \ (x-a)^n$$

一般に級数

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$ を $f(x)$ の $x=a$ における テイラー級数 とよぶ。

又 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \ x^n$ は必ずしも 成り立つとは 限らない。

⑬

○ 漸近展開

○ランダウの記号

$a \in \mathbb{R}$; $f(x), g(x)$: $x=a$のまわりで定義された関数

定義 $f(x) = o(g(x))\ (x \to a)$

$\underset{def}{\Longleftrightarrow} \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

とくに $f(x) = o(1)\ (x \to a)$

$\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = 0$

漸近展開

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + o((x-a)^n)\ (x \to a)$$

○ 二変数のテイラーの定理

$f(x, y)$: $(x, y) = (a, b)$ のまわりで定義された C^n 級関数

$(h, k) \in \mathbb{R}^2$ 充分小について.

ある $\theta(h, k) \in]0, 1[$ がとれて.

$$f(a+h, b+k) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^l f(a, b) + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h, b+\theta k)$$

となる.

○ 中間値の定理

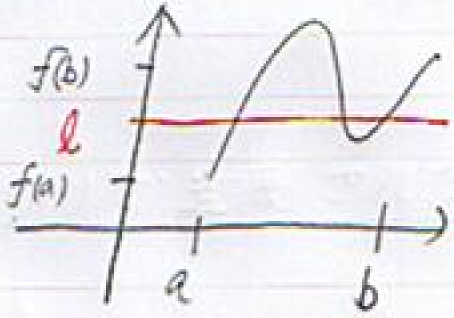
$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ 連続関数

$f(a) < f(b)$

$\Rightarrow \forall l \in [f(a), f(b)] \quad \exists c \in [a, b]$

$f(c) = l$



○ max　$A \in \mathbb{R}$ (空でない実数からなる集合)

$M = \max A$

$\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ (1) $\forall a \in A \quad a \leq M$

(2) $M \in A$

○ 上界

$A \in \mathbb{R}$ (空でない)

$c \in \mathbb{R}$

定義　cはAの上界

$\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \forall a \in A \quad a \leq c$

上界を持つ集合を上に有界であるという。

○ 上限　$A \subset \mathbb{R}$　空でない集合について、

Aの上界の最小元を上限といい、$\sup A$と書く。

下界、下限 ($\inf A$) も同様に定義される。

$\max A$が存在するAについては、$\max A = \sup A$

○ 上限定理

どんな集合$A \subset \mathbb{R}$についても、空でなくて、上に有界ならば、

上限 $\sup A \in \mathbb{R}$ が存在する。

⑮

○ 逆関数

$a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ 連続関数

$]a,b[$ 上 微分可能

$\forall A \in]a,b[$ $f'(x) > 0$ とする.

このとき f は 狭義単調増大

$a \leqq x < x' \leqq b \Rightarrow f(x) < f(x')$ となる.

$p = f(a) < q = f(b)$ とおく。

各 $y \in [p,q]$ について $f(x) = y$ をみたす

$x \in [a,b]$ がただ一つ存在する.

(存在 ⇐ 中間値の定理
ただ一つ ⇐ 狭義単調増大)

$x = f^{-1}(y)$ と書く。

逆関数

$$\begin{aligned} f^{-1} : [p,q] &\to [a,b] \\ y &\to f^{-1}(y) \end{aligned}$$ で定義される。

$$\begin{cases} \forall x \in [a,b] & f^{-1}f(x) = x \\ \forall y \in [p,q] & f^{-1}f(y) = y \end{cases}$$

定理 逆関数 f^{-1} は $[p,q]$ 上連続で $]p,q[$ 上微分可能であり,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$ ($y \in]p,q[$ をみたす。

○ sin, tan の逆関数

$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$

狭義単調増大

$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x > 0 \quad (\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)$

$\mathrm{Arc}\sin = \mathrm{Sin}^{-1} \overset{\text{def}}{=} (\sin|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

逆正弦関数(の主値)

$\frac{d}{dy} \mathrm{Arc}\sin y = \frac{1}{\cos(\mathrm{Arc}\sin y)}$

$= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

とくに $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \mathrm{Arc}\sin y + C$

$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$\frac{d}{dx} \tan x = 1 + \tan^2 x > 0$

($[-\frac{\pi}{2}+\varepsilon, \frac{\pi}{2}-\varepsilon]$ に定理を適用して、$\varepsilon \downarrow 0$ とする)

$\mathrm{Arc}\tan = \mathrm{Tan}^{-1} = (\tan|]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[)^{-1} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

逆正接関数(の主値)

$\frac{d}{dy} \mathrm{Arc}\tan y = \frac{1}{1+\tan^2(\mathrm{Arc}\tan y)} = \frac{1}{1+y^2}$

とくに、$\int \frac{dy}{1+y^2} = \mathrm{Arc}\tan y + C$

○ 数列と sup

有界単調増大数列は収束する。

単調増大数列については

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\geq 1} x_n$$

が成り立つ。

単調減少列についても同様。

$$\begin{pmatrix} \sup A = -\inf(-A) \\ \inf A = -\sup(-A) \end{pmatrix}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (-1)^n = 1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} (-1)^n = -1$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} n = \underline{\lim_{n\to\infty}} n = +\infty$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (-1)^n n = +\infty \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} (-1)^n n = -\infty$$

○ 上極限

定義 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 実数列

$N \geq 1$

$$y_N \overset{def}{=} \sup\{x_n : n \geq N\} = \sup_{n\geq N} x_n \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

とおく。

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n \overset{def}{=} \inf_{N\geq 1} y_N = \lim_{N\to\infty} y_N \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$= \inf_{N\geq 1} (\sup_{n\geq N} x_n) \text{ 上極限}$$

同様に

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n \overset{def}{=} \sup_{N\geq 1} (\inf_{n\geq N} x_n) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$A \subset \mathbb{R}$ 空でない集合

Aが上に有界でないとき $\Longrightarrow \sup A = +\infty$

下に 〃 $\Longrightarrow \inf A = -\infty$ と書く。

すると、どんな空でない集合 $A \in \mathbb{R}$ についても、いつでも

$\sup A, \inf A, \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ が定まる。

⑱

上極限 補題

① (1) $\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqq \varlimsup_{n\to\infty} x_n$.

(2) $\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqq -\varlimsup_{n\to\infty} (-x_n)$

② $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 実数列 $n_0 \geqq 1$

(1) $n_0 \leqq {}^\forall n \quad x_n \leqq y_n$

$\Rightarrow \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqq \varlimsup_{n\to\infty} y_n$

$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqq \varliminf_{n\to\infty} y_n$

(2) $a, b \in \mathbb{R} \quad a < b$

$n_0 \leqq {}^\forall n \quad a \leqq x_n \leqq b$

$\Rightarrow a \leqq \varliminf_{n\to\infty} x_n \leqq \varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqq b$

③ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 実数列

$\lim_{n\to\infty} x_n$ が存在する($=l$ とおく)

$\Rightarrow \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n = l$

④ $\varlimsup_{n\to\infty} x_n < s \Rightarrow$ $s \leqq x_n$ をみたす n は有限個しかない

$s < \varlimsup_{n\to\infty} x_n \Rightarrow$ $s \leqq x_n$ をみたす n は無限個ある。

定理 ⑥ （⑤はなし）

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$：実数列 $l \in \mathbb{R}$

このとき、次の条件 (a) (b) (c) は同値。（数列の収束）

(a) $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = l$

(b) $a < l < b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ ならば

$x_n \leqq a$ または $b \leqq x_n$ をみたす n は有限個しかない。

(c) ${}^{\forall}\varepsilon > 0$ ${}^{\exists}n_\varepsilon$, $n_\varepsilon \leqq {}^{\forall}n$

$|x_n - l| < \varepsilon$

⑦ コーシー列 $\Longleftrightarrow$ ${}^{\exists}l \in \mathbb{R}$ $\lim_{n\to\infty} x_n = l$

（コーシー列と収束列は同値）

○コーシー－アダマールの公式

整級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は

$\left(\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)^{-1}$ に等しい。

（ここでは $\frac{1}{0} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$ とする）

定理 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$：実数列について

$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

が成り立つ。つまり、$\sum n a_n x^{n-1}$ と $\sum a_n x^n$ の収束半径は等しい。