No.

Date

教科書問題 補足 ①

4.1.1 (1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

(P84)

$y=0$ に沿った極限を求めると

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0} \frac{0}{x^2} = 0$$

$x=0$ に沿った極限は

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{y\to0} \frac{0}{y^2} = 0$$

よって、極限があるとき、それは 0

ここで、$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ とすると、

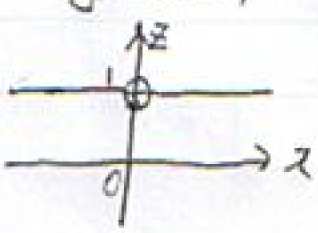
$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}\right| = \left|r\cos^2\theta\sin\theta\right| \xrightarrow[r\to0]{} 0$$

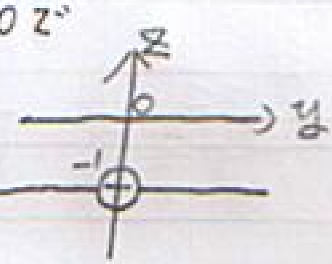
$(x,y)\to(0,0)$ のとき $r\to0$ より

よって、極限は 0

4.1.2 (1) $z = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$y=0$ で、　　　　$x=0$ で





4.1.3 (1) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ で、

$(x,y)\to(0,0)$ で $r\to0$ より、

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{r^2}\right| = \left|r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)\right|$$

$$\leqq |r\cos^3\theta| + |r\sin^3\theta| \leqq |2r| \to 0$$

よって、$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} z = 0$ より連続

Date

②

4.1.4 (1) $z = x^2y^5 - 2x^3y^2 + y$

$z_x = 2xy^5 - 6x^2y^2 \quad z_y = 5x^2y^4 - 4x^3y + 1$

(8) $z = \mathrm{Tan}^{-1}\frac{y}{x} = \mathrm{Tan}^{-1} y x^{-1}$

$$z_x = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \times (-1) y x^{-2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$z_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \times x^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

4.1.5

(1) $z = x^3y^3$

$z_x = 3x^2y^3 \quad z_y = 3x^3y^2$

$x z_x + y z_y = 3x^3y^3 + 3x^3y^3 = 6x^3y^3 = 6z$

Date

③

4.2 (pp 90~91)

4.2.1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ を考える.

$y=0$ に沿った極限は. $\lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$

$x=y$ に沿った極限は $\lim_{y\to 0} \frac{2y^2}{2y^2} = 1$

よって、連続でないので、全微分可能でもない。

また、$f(x,0)=0$、$f(0,y)=0$ で一定で連続なので、
偏微分可能である。

4.2.2. $z=f(x,y)$ の $(a,b,f(a,b))$ における接平面は.

$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) - (z-f(a,b)) = 0$

これに垂直なベクトルは.

$(f_x(a,b), f_y(a,b), -1)$

よって、法線は

$$\frac{x-a}{f_x(a,b)} = \frac{y-b}{f_y(a,b)} = \frac{z-f(a,b)}{-1}$$

4.2.3 (1) $z_x = 6xy+y$. $z_y = 3x^2+x$

$x=1, y=-1$ で, $z_x=-7$, $z_y=4$

接平面の方程式は,

$z = -7(x-1) + 4(y+1) - 4 = -7x+4y+7$

法線は、4.2.2 より.

$$-\frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{4} = -z-4$$

No.

Date

④

4.2.4 (1) $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$

$= (y^2-2xy)\times 2t + (2xy - x^2)e^t$

$= (e^{2t}-2t^2e^t)2t + (2t^2e^t - t^4)e^t$

$= (2te^t+2e^t - t^3-4t^2)te^t$

4.2.5 (1) $z_u = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$

$= (y^2+2xy)\times 1 + (2xy+x^2)\times 1$

$= (x+y)^2 + 2xy$

$= 6u^2 - 2v^2$

$z_v = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$

$= (y^2+2xy) - (2xy+x^2)$

$= (y+x)(y-x)$

$= -4uv$

4.2.6 $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$, $y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$

$z_u = z_x\frac{\partial x}{\partial u} + z_y\frac{\partial y}{\partial u} = z_x\cos\alpha + z_y\sin\alpha$

$z_v = -z_x\sin\alpha + z_y\cos\alpha$

$z_u^2 + z_v^2 = z_x^2\cos^2\alpha + 2z_xz_y\sin\alpha\cos\alpha + z_y^2\sin^2\alpha$
$+ z_x^2\sin^2\alpha - 2z_xz_y\sin\alpha\cos\alpha + z_y^2\cos^2\alpha$
$= z_x^2 + z_y^2$

4.2.7 略

⑤

4.2.8 (1) $z_r = f_x \frac{\partial x}{\partial r} + f_y \frac{\partial y}{\partial r} = f_x \cos\theta + f_y \sin\theta$

$z_\theta = f_x(-r\sin\theta) + f_y\, r\sin\theta = -f_x\, r\sin\theta + f_y\, r\cos\theta$

(2) (必要条件) $z = g(r) = g(\sqrt{x^2+y^2})$ ならば、

$f_x = z_x = \frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r}\times\frac{1}{2}\times 2x\times(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} = x(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial z}{\partial r}$

$f_y = y(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial z}{\partial r}$

よって、 $y f_x = x f_y = xy(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial z}{\partial r}$

(十分条件) $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とする。 $(r>0)$

$y f_x = x f_y \iff f_x\, r\sin\theta = f_y\, r\cos\theta$ より、

$z_\theta = 0$

よって、 z は r のみの関数

$x^2+y^2 = r^2$ より、 $r = \sqrt{x^2+y^2}$

よって、 $z = g(\sqrt{x^2+y^2})$ と書き表される。

4.2.9 (1) $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} = ad - bc$

4.2.10

(1) $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi}\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{pmatrix}$

$= 0 + r^2\sin\theta\cos^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi$

$- 0 + r^2\sin\theta\cos^2\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi$

$= r^2\sin\theta\cos^2\theta + r^2\sin^3\theta$

$= r^2\sin\theta$

⑥

4.2.11 (1) $S=xy$

条件より ΔS は

$S_x\Delta x+S_y\Delta y=y\Delta x+x\Delta y$ で一次近似される。

(2) $V=xyz$

ΔV は $V_x\Delta x+V_y\Delta y+V_z\Delta z$ で一次近似される。

よって、$yz\Delta x+zx\Delta y+xy\Delta z$

(3) 長軸を $x(m)$ 短軸を $y(m)$，面積を $S(m^2)$ としたとき、
各軸が $\Delta x(m)$，$\Delta y(m)$ だけ動いたときの S の変化
ΔS の一次近似は、

$S=\pi\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}=\frac{\pi xy}{4}$ より

$\Delta S\fallingdotseq\frac{1}{4}\pi y\Delta x+\frac{1}{4}\pi x\Delta y$

ここで、$x=2$，$y=1$，$\Delta x=\frac{1}{100}$，$\Delta y=\frac{1}{100}$ より

$\Delta S\fallingdotseq\frac{1}{4}\frac{\pi}{100}+\frac{1}{4}\frac{-2\pi}{100}=-\frac{\pi}{400}\,(m^2)$

$=-25\pi\,(cm^2)$

4.2.12 $z=x+2y$

(1) $z_x=1$

(2) $z=x+2y=x+2(u-x)=-x+2u$

$z_x=-1$

Date

①

p99 4.3.1.

(2) $\left(2\frac{\partial}{\partial x}+3\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(0,0) = 4f_{xx}(0,0) + 12 f_{xy}(0,0) + 9 f_{yy}(0,0)$

$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2e^{2x+y}) = 4e^{2x+y}$ $\quad f_{xx}(0,0) = 4$

$f_{xy}(x,y) = 2e^{2x+y}$ $\quad f_{xy}(0,0) = 2$

$f_{yy}(x,y) = e^{2x+y}$ $\quad f_{yy}(0,0) = 1$

よって、(与式) $= 4\times4+12\times2+9\times1 = 49$

4.3.2

(1) $z_x = 3x^2y+y^2$ $\quad z_y = x^3+2xy$

$z_{xx} = 6xy$, $z_{xy} = 3x^2+2y$, $z_{yy} = 2x$

4.3.3 (1) $\Delta z = z_{xx} + z_{yy}$

$z_x = \frac{2x}{x^2+y^2}$

$z_{xx} = \frac{2(y-x)}{x+y}$ $\qquad z_{yy} = \frac{2(x-y)}{x+y}$

$\Delta z = 0$

4.3.4 $z = f(x,y)$ $\quad x = r\cos\theta$ $\quad y = r\sin\theta$

$z_r = z_x\cos\theta + z_y\sin\theta$

$z_{rr} = \frac{\partial z_r}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z_r}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial r} = z_{xx}\cos\theta\times\cos\theta + z_{yy}\sin\theta\times\sin\theta + 2z_{xy}\sin\theta c$

$z_\theta = -z_x r\sin\theta + z_y r\cos\theta = -z_x\cdot y + z_y\times x$

$z_{\theta\theta} = (-z_{xx}y + z_{xy} + z_y)(-r\sin\theta)$

$+ (-z_{xy}\cdot y - z_x + z_{yy}\cdot x)(r\cos\theta)$

$= z_{xx} r^2\sin^2\theta - z_{xy} r\sin\theta\cos\theta - z_y r\sin\theta$

$- z_{xy} r^2\sin\theta\cos\theta - z_x r\cos\theta + z_{yy} r^2\cos^2\theta$

以上より。

No.
Date

⑧

5 (1) $f(h,k) = \sum_{j=0}^{1} \frac{1}{j!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(0,0) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(\theta h, \theta k)$

をみたす $\theta \in]0,1[$ が存在.

$$e^{h-k} = 1 + h f_x(0,0) + k f_y(0,0) + \frac{1}{2} h^2 f_{xx}(\theta h, \theta k) + hk f_{xy}(\theta h, \theta k) + \frac{1}{2}k^2 f_{yy}(\theta h, \theta k)$$

$$= 1 + h \cdot 1 + k \times (-1) \times 1 + \frac{1}{2}h^2 e^{\theta h - \theta k} + hk(-1)e^{\theta h - \theta k} + \frac{1}{2}k^2(-1)^2 e^{\theta h - \theta k}$$

$$= 1 + h - k + \frac{1}{2}e^{\theta(h-k)}(h-k)^2$$

6 (1) $f(x,y) = e^{x+y}$ とする.

$f_x(x,y) = f_y(x,y) = e^{x+h}$

$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 1$ より, 極値でない.

(2) $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

$f_{xx}(0,0) = 2$, $f_{xy}(0,0) = 0$ $f_{yy}(0,0) = 2$

$\det\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} = 4 - 0 = 4 > 0$ で, $f_{xx}(0,0) > 0$ より,

極小値.

7 (1) $f_x(x,y) = 2x + y$

$f_y(x,y) = x + 2y - 4$

$f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$ となるのは, $(x,y) = \left(-\frac{4}{3}, +\frac{8}{3}\right)$

$f_{xx}(x,y) = 2 > 0$ $f_{xy}(x,y) = 1$, $f_{yy}(x,y) = 2$ より

$\det(Hf)\left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right) = 3 > 0$

よって 極小値.

⑨

P146

6.1.1 略

6.1.2 (1) 略

(2) $a_n>0$より、$\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$

ここで $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$ は $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}}{2}$ が収束するので、収束する。

よって $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}}$ も収束する。

(3) $\sum a_n, \sum b_n$ が収束するので $\{a_n\}, \{b_n\}$ は有界

$\{a_n b_n\}$も有界より。

6.1.3 (1) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n}$

$= e^{-1}<1$ より収束.

6.1.4 (1) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1} = 0$より収束

6.1.5 (1)

(必要条件)

$\sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k) \leq \sum_{k=1}^{n} f(k)$

$n\to\infty$で、条件より、$\sum_{k=2}^{n} f(k)$, $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ は一つに収束.

はさみうちより $\int_1^n f(x)dx$ も収束.

(十分条件) $\int_2^n f(x)dx \leq \sum_{k=2}^{n-1} f(k) \leq \int_1^n f(x)dx$

$n\to\infty$ で 左辺, 右辺 が一つに収束. $\sum_{k=2}^{\infty} f(k)$も収束

よって $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ は収束.

No.

Date

⑩

6.1.5 (2)　(1)より，必要十分条件は $\int_1^\infty \frac{1}{x^a}dx$ が収束すること．

$a \neq 1$ で，$\int_1^\infty \frac{1}{x^a}dx = \left[\frac{1}{1-a}x^{1-a}\right]_1^\infty$

$a = 1$ で，$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \left[\log x\right]_1^\infty$

これが収束するとき．$1-a<0$

$a>1$

6.1.6　略

Date

(11)

P157

6.2.1

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ の収束半径は、$\left(\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|n|}\right)^{-1} = 1$

(2) $\frac{(n+1)!\, x^{n+1}}{n!\, x^n} = (n+1)|x| \to \infty$ より、収束半径 0

以降 P156 参照

6.2.2 (1) $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ において、xをx^2，$\alpha = \frac{1}{2}$とする。

$$\sqrt{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^{2n}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}-n\right)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n\, n!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}$$

ここで，$n=0$のとき $(-3)!!$ は定義されないので，

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}$$

6.2.3 $f(x) = x^2 \log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

両辺を3回微分して，

$$\frac{2}{1+x} + \frac{2}{(1+x)^2} + \frac{2}{(1+x)^3} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n-3)!} x^{n-3}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-3} x^{n-3}$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-3}(n-2)\, x^{n-3}$$

$$\frac{1}{(1+x)^3} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-3}(n-1)(n-2)}{2} x^{n-3}$$

No.

Date

12

よって、$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-3} \left(2+2(n-2)+(n-1)(n-2)\right)$

$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n-3)!} x^{n-3}$

よって、$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-3)!\left(2+2(n-2)+(n-1)(n-2)\right)$

$= \frac{(-1)^{n-1}\, n!}{n-2} \quad (n \geqq 3)$

$n \leqq 2$では、計算すると 0 になる。

6.2.4 (1) $t = x-1$ つまり $x = t+1$ とおく。

$f(x) = \frac{t+2}{t^2+5t+4} = \frac{1}{3}\frac{1}{(1+t)} + \frac{1}{6}\frac{1}{(1+\frac{t}{4})}$

$= \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n + \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t}{4}\right)^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6}\left(2+\frac{1}{4^n}\right)(x-1)^n$

6.2.5 $\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{5}{12}$

$\tan 4\theta = \frac{2\tan 2\theta}{1-\tan^2 2\theta} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}$

$\tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan 4\theta - \tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan 4\theta \tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}\times 1}$

$= \frac{1}{239}$

6.2.6 略