No.

Date

キソ統計 No.5.

1. 条件から、どの分布に従うのか判断できれば、あとは簡単です。

(1). コイン投げですから、二項分布に従います。すなわち、$X \sim Bi(5, 0.6)$。
このとき、

$$P(X=3) = {}_5C_3 (0.6)^3 (0.4)^2 = 10(0.6)^3(0.4)^2 = 0.3456$$

$$\therefore 0.346$$

(2). pが小さく、nが充分大きい $\Rightarrow$ ポアソン分布。

$\lambda = 10000 \times 0.0002 = 2$ ← n回試行したときの表の出る平均の回数にあたります。

$X \sim Po(\lambda)$ のとき

$P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$ であるから、$x=3, \lambda=2$を代入し、

$$P(X=3) = e^{-2}\frac{2^3}{3!} \fallingdotseq 0.183$$

(3). ～するまでやりつづける $\Rightarrow$ 幾何分布、 $X \sim Ge(p)$
ここで pは、表の出る確率

$X \sim Ge(p)$ のとき $P(X=x) = p(1-p)^{x-1}$.

$p=0.6$, $x=3$を代入すると、

$$P(X=3) = 0.6 \times (0.4)^2 = 0.096$$

(4). 定義から

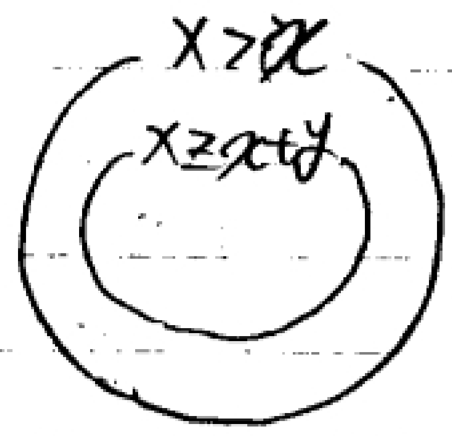
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B) = {}_5C_3\, p^3(1-p)^2 = 10p^3(1-p)^2$$

$$P(A \cap B) = P\{1\text{回目が表で、あと4回中2回表}\} = p \times {}_4C_2\, p^2(1-p)^2$$
$$= 6p^3(1-p)^2$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{5}$$

2. $X \sim Ge(p) \Rightarrow P(X=x) = p(1-p)^{x-1}$



$P(X \geq x+y \mid X > x)$

$= \dfrac{P(X \geq x+y \cap X > x)}{P(X>x)}$

ここで、$y>0$なので、
$X > x \supset X \geq x+y$.
よって $P(X \geq x+y \cap X > x) = P(X \geq x+y)$

$= \dfrac{P(X \geq x+y)}{P(X>x)}$

ここで、$P(X \geq x+y)$

$= 1 - P(X \leq x+y-1)$

$= 1 - \sum_{i=1}^{x+y-1} p(1-p)^{i-1}$

$= 1 - \dfrac{p\{1-(1-p)^{x+y-1}\}}{1-(1-p)}$

$= (1-p)^{x+y-1}$.

$P(X \leq x+y-1)$
$= P(X=1) + P(X=2) + \cdots P(X=x+y-1)$

$P(X>x)$

$= 1 - P(X \leq x)$

$= 1 - \sum_{i=1}^{x} p(1-p)^{i-1}$

$= 1 - \dfrac{p\{1-(1-p)^{x}\}}{1-(1-p)}$

$= (1-p)^{x}$

$\therefore P(X \geq x+y \mid X > x) = (1-p)^{y-1}$

$P(X \geq y) = 1 - P(X \leq y-1)$

$= 1 - \sum_{i=1}^{y-1} p(1-p)^{i-1}$

$= 1 - \dfrac{p\{1-(1-p)^{y-1}\}}{1-(1-p)}$

$= (1-p)^{y-1}$

以上より $P(X \geq x+y \mid X > x) = P(X \geq y)$.

No.

Date

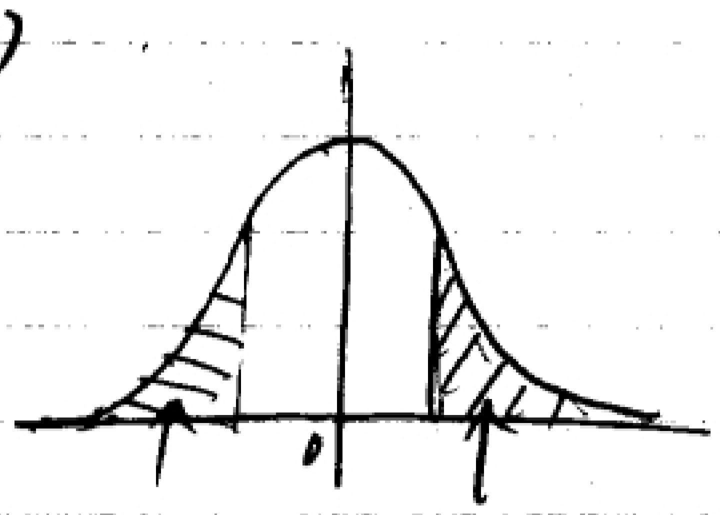
基礎統計⑥

(1) $X \sim N(100, 225) = N(100, 15^2)$

$P(X \leqq 85) = P(\frac{X-100}{15} \leqq \frac{85-100}{15})$ (標準化)

$= P(Z \leqq -1)$

$= P(Z \geqq 1) = 0.15866$



$P(90 \leqq X \leqq 120)$

$= P(-\frac{2}{3} \leqq Z \leqq \frac{4}{3})$

$= P(-0.66 \leqq Z \leqq 1.33)$

$= P(-0.66 \leqq Z) - P(1.33 \leqq Z)$

$= 1 - P(0.66 \leqq Z) - P(1.33 \leqq Z)$

$= 1 - 0.25143 - 0.091759 = 0.656811$

$P(X \geqq 130)$

$= P(Z \geqq \frac{130-100}{15})$

$= P(Z \geqq 2)$

$= Q(2) = 0.0228$

上位10%にあるIQの最小値をmとすると、

$P(X \geqq m) = 0.1$

$\Rightarrow P(Z \geqq \frac{m-100}{15}) = 0.1$

数表より、$P(Z \geqq x) = Q(x) = 0.1$ となるxをさがすと

$x = 1.28$ ∴ $\frac{m-100}{15} = 1.28$

∴ $m = 119.2$

No.

Date

(2). $\lambda = 20$ 人/時間 $= \frac{1}{3}$ 人/分. ← λは単位時間あたりに起こる回数です。

$X \sim Ex(\frac{1}{3})$. ← Ex は、指数分布です.
連続型で、時間間隔 ていえば"指数分布"です

$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 3$. ← 定理として覚えちゃって下さい。
ちなみに、$V(X) = 1/\lambda^2$ です。

$P(X \geqq 5) = \int_5^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx$ ← 指数分布の確率密度関数 $f(x)$ は、$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ です.

$= [-e^{-\lambda x}]_5^\infty$

$= e^{-\frac{5}{3}} = 0.189$

No.

Date

基礎統計 No.7.

1(a)

X	-1	0	1
$P(x)$	0.3	0.4	0.3

$E(X) = -1\times0.3+0\times0.4+1\times0.3 = 0$ //
$E(X^2) = 1\times0.3+0\times0.4+1\times0.3 = 0.6$ } 平均の定義から.
$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 0.6$ // ← 分散の公式から.

(b)

Y	-1	0	1
$P(Y)$	0.4	0.2	0.4

$E(x) = -1\times0.4+0\times0.2+1\times0.4 = 0$ //
$E(x^2) = 1\times0.4+0\times0.2+1\times0.4 = 0.8$
$V(x) = E(x^2) - \{E(x)\}^2 = 0.8$ //

(c) $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
ここで、$E(XY) = (-1)\times(-1)\times0.1 + (-1)\times0\times0.1 + (-1)\times1\times0.1$
$+ 0\times(-1)\times0.2 + 0\times0\times0 + 0\times1\times0.2$
$+ 1\times(-1)\times0.1 + 1\times0\times0.1 + 1\times1\times0.1 = 0.$
よって、$Cov(X,Y) = 0$ //
$\rho_{XY} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = 0$ //

2、X、Yは、独立なので、$E(XY) = E(X)E(Y)$が成り立つ.
$X \sim U(0,1)$で、このとき確率密度関数は
$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leqq x < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$
$\therefore E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.
同様に $E(Y) = \frac{1}{2}$.
$\therefore E(XY) = \frac{1}{4}$ //
$V(XY) = E\{(XY)^2\} - \{E(XY)\}^2$
$= E(X^2)E(Y^2) - \frac{1}{16}$.
ここで、$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \frac{1}{3}$.
$\therefore E(X^2Y^2) = \frac{1}{9}$
$\therefore V(XY) = \frac{1}{9} - \frac{1}{16} = \frac{7}{144}$ //

No.

Date

基礎統計 No.7 (つづき)

3. $X \sim Po(3)$.

このとき、$P(X=x) = e^{-3}\dfrac{3^x}{x!}$

(1). 1日ごとに考える。

ある1日について、4件以下である確率は

$P(X \leqq 4) = P(X=0) + P(X=1) + \cdots + P(X=4)$

$= e^{-3}\left(1+3+\dfrac{9}{2}+\dfrac{9}{2}+\dfrac{27}{8}\right)$

$= \dfrac{131}{8}e^{-3} \fallingdotseq 0.82$

5日間連続である確率は $(0.82)^5 \fallingdotseq \underline{0.36}$ //

(2) $p = 0.82$, 長さ $n=5$ のベルヌーイ試行と考えられる。(早い話 表の確率が 0.82のコイン投げを5回する)

よって、3日間、4件以下となる確率は、

${}_5C_3(0.82)^3(0.18)^2$ ← $Y \sim Bi(5, 0.82)$ における $P(Y=3)$

$= 0.18$.

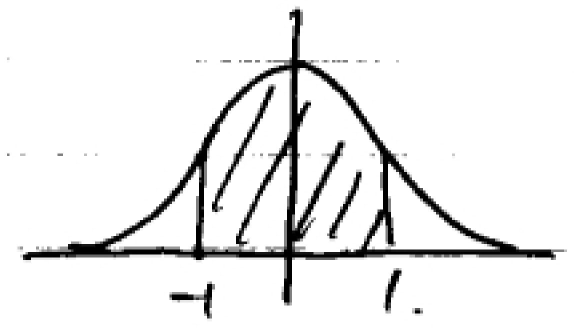
No.

Date

プリントNo.8.

1. $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \sim N(0,1)$

(1) $P(-1 \leqq X_1 \leqq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1)$



$= Q(-1) - Q(1)$

$= 1 - Q(1) - Q(1)$

$= 1 - 2Q(1)$

$= 1 - 0.159 \times 2 = 0.682$

(2). 基礎統計の最重要定理. (教科書 P149 (7.41), (7.42)) から.

$\frac{X_1+X_2}{2} \sim N(0, \frac{1}{2})$

$P(-1 \leqq \frac{X_1+X_2}{2} \leqq 1) = P(-\sqrt{2} \leqq \frac{X_1+X_2}{2} \times (\frac{1}{\sqrt{2}})^{-1} \leqq \sqrt{2})$ (標準化)

$= P(-\sqrt{2} \leqq Z \leqq \sqrt{2})$

$= 1 - 2Q(\sqrt{2})$

$= 1 - 2 \times 0.0792$

$= 0.842$

(3). $(X_1 + \cdots + X_5)/5 \sim N(0, \frac{1}{5})$。 $(X_1 + \cdots + X_5)/5 = k$ とおくと

$P(-1 \leqq k \leqq 1) = P(-\sqrt{5} \leqq Z \leqq \sqrt{5})$

$= 1 - 2Q(\sqrt{5})$

$= 1 - 2 \times 0.01287$

$\fallingdotseq 0.974$

No.

Date

2. (i) 男5人の体重 $X \sim N(65\times5,\ 8^2\times5)$　(教科書 p149 (7.40) から)

$P(X \geqq 330) = P(Z \geqq \frac{5}{8\times\sqrt{5}}) = P(Z \geqq 0.2795)$

$= 0.38974 \quad \therefore 0.39$

(ii) 男4女1の体重は再生性より $X \sim N(315,\ 292)$　(再生性については p151 参照)

$P(X \geqq 330) = P(Z \geqq \frac{15}{\sqrt{292}})$

$= P(Z \geqq 0.878) = 0.1894$

3. $X_1, X_2 \sim N(180, 10^2)$

$X_1 + X_2 = N(360,\ 2\times10^2)$

$P(X_1+X_2 \leqq 365) = P(Z \leqq \frac{5}{10\times\sqrt{2}}) = P(Z \leqq 0.3535)$

$= 1 - 0.36317$

$= 0.6368$

4. $E(X_1) = E(X_2) = \cdots = E(X_n) = p$

$V(X_1) = V(X_2) = \cdots = V(X_n) = p(1-p)$

$E(X) = E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$

$V(X) = V(\sum X_i) = \sum V(X_i) = np(1-p)$

No.

Date

キソ統計 No.9 (No.10は、自習課題はついていません)

10-1. 測定値をXとすると $X\sim(100, 0.1)$ (真の重さが100gだから 真の平均 $\mu=100$)

$\bar{X}\sim N(100, 0.01)$

$P(|\bar{X}-100|>0.3)$

$=1-P(-0.3<\bar{X}-100<0.3)$

$=1-P\left(-3<\frac{\bar{X}-100}{0.1}<3\right)$

$=1-Q(-3)-Q(3)$

$=2Q(3)$

$=0.0027$

10-2. n回の測定を行ったとき、

$\bar{X}\sim N\left(100, \frac{0.1}{n}\right)$

$P(|\bar{X}-100|<0.1)=P(-0.1<\bar{X}-100<0.1)$

$=P\left(-\sqrt{0.1n}<\frac{\bar{X}-100}{0.1/n}<\sqrt{0.1n}\right)$

$=1-2Q(\sqrt{0.1n})\geqq 0.9$

$Q(\sqrt{0.1n})\leqq 0.05$

$Q(1.65)=0.049471$

$Q(1.64)=0.05053$

$\therefore \sqrt{0.1n}>1.65$

$n>27.225$ ∴ 28回繰り返せばよい。

No.

Date

10.3 i) $\bar{X} \sim N(4, \frac{3}{2})$

$P(3 \leqq \bar{X} \leqq 6)$

$= P\left(\frac{3-4}{\sqrt{3/2}} \leqq \frac{\bar{X}-4}{\sqrt{3/2}} \leqq \frac{6-4}{\sqrt{3/2}}\right)$

$= P\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \leqq Z \leqq 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

$= 1 - Q\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) - Q\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

$= 1 - 0.20611 - 0.051551$

$= 0.742$ //

（標本から得た分散がどんな範囲の値をどんな確率でとりうるかわかります。

↓

$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ です。

(P198. 10.3)）

ii) $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{3}{5}s^2 \sim \chi^2(9)$

$\chi^2_{0.05}(9) = 16.9190$　$P(\frac{3}{5}s^2 > \frac{3}{5}a) = 0.05$　$\frac{3}{5}a = 16.919$　$\therefore a = 28.2$ //

10.4. $\frac{\bar{X}-3}{\sqrt{s^2/15}} = \sqrt{15}\,\frac{\bar{X}-3}{s} \sim t(14)$

$P\left(\sqrt{15}\,\frac{\bar{X}-3}{s} > \sqrt{15}a\right) = 0.01$

$t_{0.01}(14) = 2.624$

$\sqrt{15}a = 2.624,\ a = 0.678$ //

10.5. $\bar{X}_1 \sim N(2, 0.3)$ ←前半部の標本平均の標本分布

$\bar{X}_2 \sim N(5, 0.5)$ ←後半部　〃

$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim (-3, 0.8)$

ちなみにt分布は真の分散がわからないときに、標本から得られる平均の従う標本分布を、s^2（標本から得られる不偏標本分散）を用いて表したいときに使います。