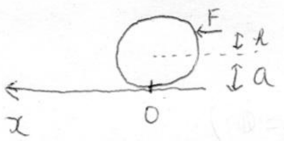
2007年度 力学A1 期末試験 解答・解説

1　2008年度問題 第2問を参照

2.　　水平　向（+x方向）に力を加えるとする



(1) 求める慣性モーメント I，球の密度 ρ とする

$\rho = \frac{3M}{4\pi a^3}$ であるから

$$I = \rho \underline{\underline{\int (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz}} = \frac{3M}{4\pi a^3} \cdot \frac{8\pi}{15} a^5 = \frac{2}{5} M a^2$$

※

$\therefore \underline{\frac{2}{5} M a^2}$

(2) 運動方程式より　$M\ddot{x} = F$ …①

滑らず転がしているので $\dot{x} = a\dot{\theta} \Leftrightarrow \ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{a}$ …②

モーメントについて，$I\ddot{\theta} = Fh$ …③

①〜③より，$h = \frac{I}{Ma} = \frac{2}{5}a$　（$\because$ (1)）　　$\underline{h = \frac{2}{5}a}$

〈解説〉

※部の計算は，2008年度問題第1問 (2) の「$a \leqq r \leqq 2a$」を「$0 \leqq r \leqq a$」として計算している。参照するように。

角運動量 $L = I\frac{d\theta}{dt}$ より，モーメント N とすると，

$\frac{dL}{dt} = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = N$ が成立している（③式）．　Ⓐ

3 (1) 求める運動方程式は

$m\ddot{x} = qE - \mu\dot{x} - kx$ だから $E = E_0\cos\omega t$ となっているから

$m\ddot{x} = mf\cos\omega t - 2\gamma m\dot{x} - m\omega_0^2 x$

(2) (1)の式は

$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f\cos\omega t$

特解 $x = x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ とおくて

$$[-A\omega^2 - 2\gamma B\omega + A\omega_0^2]\sin\omega t + [-B\omega^2 + 2\gamma A\omega + B\omega_0^2 - f]\cos\omega t = 0$$

任意の t で等号成立時

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)A - 2\gamma\omega B = 0 \\ 2\gamma\omega A + (\omega_0^2 - \omega^2)B - f = 0 \end{cases}$$

$$\therefore A = \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} f$$

$$B = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} f$$

$$\sin\delta = \frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \qquad \cos\delta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

とおくて

$$x(t) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}(\sin\delta\sin\omega t + \cos\delta\cos\omega t)$$

$$= \frac{f\cos(\omega t - \delta)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad \left(\tan\delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

B

次に、振幅が最大となるωを求める。

$X=\frac{\omega}{\omega_0}$ とおいて、

振幅 $= \dfrac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}} = \dfrac{f}{\omega_0^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{(1-X^2)^2+\frac{4\gamma^2}{\omega_0^2}X^2}}$

ここで、分母の$\sqrt{\ }$内が最小となれば振幅は最大となる。

$$(1-X^2)^2+\frac{4\gamma^2}{\omega_0^2}X^2 = \left(X^2-\frac{\omega_0^2-2\gamma^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{4\gamma^2(\omega_0^2-\gamma^2)}{\omega_0^4}$$

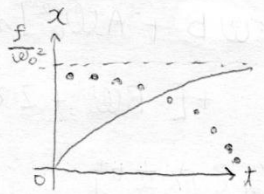
$X \geqq 0$なので、

(i) $\omega_0^2 \leqq 2\gamma^2$ のとき、

$X=0$のとき振幅は最大。つまり $\omega=0$

このとき、十分時間がたつと $x=\frac{f}{\omega_0^2}$ となる

グラフは右図



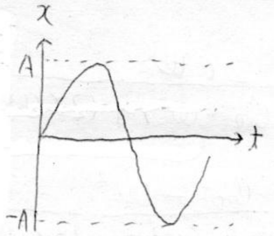
(ii) $\omega_0^2 \geqq 2\gamma^2$ のとき

$X^2=\frac{\omega_0^2-2\gamma^2}{\omega_0^2}$ のとき、つまり $\omega=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}$ のとき

振幅は最大となる。

この時の振幅をAとすると、$A=\dfrac{f}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}}$

より前に求めた式から、グラフは右図

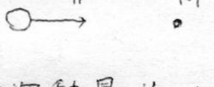


(グラフは —: 質点 •••: 外力)

〈解説〉

(c)

4



Mが(0.0)の極座標系(r.θ)で(2)以下は考え

(1) 角運動量$\mathbb{L}$について

$$\frac{d\mathbb{L}}{dt}=\frac{d}{dt}[\mathbb{r}\times(m\dot{\mathbb{r}})]=\dot{\mathbb{r}}\times(m\dot{\mathbb{r}})+\mathbb{r}\times(m\ddot{\mathbb{r}})$$

$$=\mathbb{r}\times\mathbb{F}\quad(\because \text{運動方程式 } m\ddot{\mathbb{r}}=\mathbb{F},\ \dot{\mathbb{r}}\times\dot{\mathbb{r}}=\mathbb{0})$$

$\mathbb{r}\times\mathbb{F}$は、Mのまわりの力のモーメントだが、図より$\mathbb{r}\times\mathbb{F}=\mathbb{0}$

$\therefore \frac{d\mathbb{L}}{dt}=0$ より 角運動量は保存する

また

$\mathbb{r}\cdot\mathbb{L}=\mathbb{r}\cdot(\mathbb{r}\times m\dot{\mathbb{r}})=0$ より 常に $\mathbb{r}\perp\mathbb{L}$

したがって$\mathbb{r}$は$\mathbb{L}$を法線とする平面内にあるので、運動が平面内に限定される

(2) $\mathbb{e}_r(t)$、$\mathbb{e}_\theta(t)$の性質は

$$\begin{cases}\dot{\mathbb{e}}_r(t)=\dot{\theta}(t)\mathbb{e}_\theta(t)\\ \dot{\mathbb{e}}_\theta(t)=-\dot{\theta}(t)\mathbb{e}_r(t)\end{cases}$$

だから、これを用いると

$$\mathbb{r}(t)=r(t)\mathbb{e}_r(t)$$

$$\dot{\mathbb{r}}(t)=\dot{r}(t)\mathbb{e}_r(t)+r(t)\dot{\theta}(t)\mathbb{e}_\theta(t)$$

$$\ddot{\mathbb{r}}(t)=[\ddot{r}(t)-r(t)\dot{\theta}^2(t)]\mathbb{e}_r(t)+[r(t)\ddot{\theta}(t)+2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t)]\mathbb{e}_\theta(t)$$
$$=\mathbb{a}(t)$$

以上より

$$\begin{cases}a_r(t)=\ddot{r}(t)-r(t)\dot{\theta}^2(t)\\ a_\theta(t)=r(t)\ddot{\theta}(t)+2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t)\end{cases}$$

運動方程式は

$$\begin{cases} m a_r(t) = -G\dfrac{Mm}{r^2} & \cdots ① \\ m a_\theta(t) = 0 \end{cases}$$

(3) $a_r(t) = \ddot{r} - r\dot{\theta}$ … ② と表すとして、

角運動量保存則より $r^2\dot{\theta} = h$ (一定)　∴ $\dot{\theta} = \dfrac{h}{r^2}$ … ③

$\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{dr}{d\theta}\cdot\dot{\theta} = \dfrac{h}{r^2}\cdot\dfrac{dr}{d\theta}$ より

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{h}{r^2}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{d\theta}\cdot\underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\dot{\theta}}\right) = \frac{h^2}{r^2}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{d\theta}\right) = \ddot{r} \quad \cdots ④$$

③④を②に代入して、①に代入したとき、

運動方程式を整理すると

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\theta}\right) - \frac{1}{r} = -\frac{GM}{h^2}$$ （計算過程省略した）

$u = \dfrac{1}{r}$ とおくと、$\dfrac{du}{dr} = -\dfrac{1}{r^2}$ より、書きかえて、

$$-\frac{d}{d\theta}\left(\frac{du}{d\theta}\right) - u = -\frac{GM}{h^2} \qquad \therefore \frac{d^2u}{d\theta^2} = -u + \frac{GM}{h^2}$$

$\tilde{u} = u - \dfrac{GM}{h^2}$ とおくと $\dfrac{d^2u}{d\theta^2} = -\tilde{u}$

よって $\underline{\underline{\tilde{u} = A\cos(\theta+\delta)}}$ と一般解は書けて、

$$u = \frac{GM}{h^2} + A\cos(\theta+\delta)$$

以上より.

$$r = \frac{1}{\frac{GM}{h^2} + A\cos(\theta+\delta)} = \frac{\frac{h^2}{GM}}{1+\frac{Ah^2}{GM}\cos(\theta+\delta)} \quad \left(\frac{h^2}{GM}, \frac{Ah^2}{GM}:\text{定数}\right)$$

だから軌道は円錐曲線で表される

〈解説〉

(1) $\mathbb{F} = F(x, y, z)\mathbb{r}$ と書ける力である

論証の流れを確認しておこう

(3) $r = \frac{l}{1+e\cos(\theta+\delta)}$ の形にしていくことを考える

5.7 ℓ.)の解法を採用した。2)もできるように!!

以上で過去問解答・解説は終わりです

基本的に板書を見直し、計算をやり直したら十分高得点は狙えるので、徹底して正攻法で単位を取りに行きましょう!!

終われば秋休みですよ!!!

見にくい手書き解答ですが、何か問題があればまた個人的に言いに来ていただければと思います。

〈総合文責〉 酒井

Ⓕ