2006 数IB 解答

1

(a) 求める関数を $f(n)$ とすると
条件より
$f(n)=a_0+a_1n+a_2n^2$
とおける　(a_i ($i=0,1,2$) は定数)
ここで仮定から
$f(1)=a_0+a_1+a_2=2$ …①
$f(2)=a_0+2a_1+4a_2=8$ …②
$f(3)=a_0+3a_1+9a_2=18$ …③
①②③より
$\begin{cases} a_0=a_1=0 \\ a_2=2 \end{cases}$
よって求める式は $\underline{2n^2}_{//}$ (1)
また、N核はレベル4なので
存在できる電子の数は $\underline{32個}_{//}$ (2)

(b) $(5+i)^4$
$=625+500i-150-20i+1$
$=476+480i$
$=2(1+i)\times\underline{(239+i)}_{//}$ (3)
また、ここで複素数 $a+bi$ の偏角は
$\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
である $\left(-\frac{\pi}{2}<\arctan\frac{b}{a}<\frac{\pi}{2}\right)$
また、ド・モアブルの定理より
$(a+bi)^n$ の偏角は
$n\times\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
よって与式より
$(5+i)^4(239+i)^{-1}=2+2i$
なので
$4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\underline{\frac{1}{239}}_{//}$ (4) $=\underline{\frac{\pi}{4}}_{//}$ (5)
また、$\arctan x$ のべき級数展開は
$\underline{\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}}_{//}$ (6)
である。

(c) 関数 $f(x)$, $g(x)$ が n 回微分可能なら
$[f(x)g(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$ …☆
であることを数学的帰納法により
証明する。
(i) $n=1$ のとき
$[f(x)g(x)]'$
$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$={}_1C_0f^{(1-0)}(x)g^{(0)}(x)+{}_1C_1f^{(1-1)}(x)g^{(1)}(x)$
よって $n=1$ のとき☆は成り立つ
(ii) $n=l$ のとき ($l\in\mathbb{N}$)
☆が成立すると仮定すると
$n=l+1$ のとき
$[f(x)g(x)]^{(l+1)}$
$=\left(\sum_{k=0}^{l}{}_lC_kf^{(l-k)}(x)g^{(k)}(x)\right)'$
$=$(がんばって計算してください)
$=\sum_{k=0}^{l+1}{}_{l+1}C_kf^{(l+1-k)}(x)g^{(k)}(x)$
ゆえに $n=l+1$ のときも☆は成立する
(i)(ii)よりすべての自然数 n について
☆が成立することが示された
よって
$y=e^{ax}\sin(bx)$
の n 階導関数は
$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_k a^{n-k}e^{ax}\sin^{(k)}(bx)$
である。

※ 証明した公式を
ライプニッツの定理
という。

) $x^2-x-1=0$

の正の根は

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

であるので $x\neq 0$

よって

$$x^2=x+1$$

$$x=1+\frac{1}{x}$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$$

$$=\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}$$

である。

(a) $\triangle OAB$ の面積を $S(t)$ とすると

$$S(t)=\frac{1}{2}(t-t\log t)(1-\log t)$$

$$=\frac{t}{2}(1-\log t)^2$$

である。$0<t<e$ において

$$S'(t)=\frac{1}{2}(1-\log t)^2-(1-\log t)$$

$$=-\frac{1}{2}(1-\log t)(1+\log t)$$

$S'(t)=0$ とすると

$$t=\frac{1}{e}$$

よって $S(t)$ の増減表は次のようになる

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e
$S'(t)$	＼	$+$	0	$-$	＼
$S(t)$	＼	↗	極大 $\frac{2}{e}$	↘	0

よって $S(t)$ は $t=\frac{1}{e}$ …(ア) のとき最大値 $\frac{2}{e}$ …(イ) をとる。

(b) 直線ABの方程式は

$$y=-\frac{1}{t}x+1-\log t$$

であるので

$$\frac{1}{t}x+y+\log t-1=0 \quad \cdots ①$$

両辺 t で偏微分して

$$-\frac{1}{t^2}x+\frac{1}{t}=0$$

$t>0$ より

$$x=t \quad \cdots ②$$

②を①に代入して

$$y=-\log x \ (0<x\leqq e)$$

よって直線ABの包絡線の方程式は

$$y=-\log x \ (0<x\leqq e)$$

である。

3

(a) 点Pにおける円 $x^2+y^2=r^2$ の接線は

$$\cos\theta\, x+\sin\theta\, y=r \quad \cdots ①$$

また、点Aを通り、OPに平行な直線の方程式は

$$y=\tan\theta\, x-\tan\theta \quad \cdots ②$$

よって①②より

$$\cos^2\theta\, x+\sin^2\theta(x-1)=r\cos\theta$$

$$x=r\cos\theta+\sin^2\theta$$

よって

$$y=\tan\theta\,(r\cos\theta+\sin^2\theta-1)$$

である。

(b) $$\frac{dx}{d\theta}=-r\sin\theta+\sin 2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}(r\cos\theta+\sin^2\theta-1)+\tan\theta(-r\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta)$$

$$=r\cos\theta+\tan^2\theta(1+2\cos^2\theta)-\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$=r\cos\theta-1+2\sin^2\theta$$

$$=r\cos\theta-\cos 2\theta$$

よって

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$

$$=\underline{r^2+1-2r\cos\theta} \quad \cdots (ウ)$$

である。

(c) $r=1$のとき

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta$$
$$=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+\cos\theta}}\,d\theta$$

ここで, $\cos\theta=t$とおくと

$$dt=-\sin\theta\,d\theta$$

tとθとの対応は次のようになる

θ	$0 \to \frac{\pi}{2}$
t	$1 \to 0$

よって

$$l=-4\sqrt{2}\int_1^0\frac{dt}{\sqrt{1+t}}$$
$$=4\sqrt{2}\cdot\left[2\sqrt{1+t}\right]_0^1$$
$$=8\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$$

である.

(d) $r\to 0$のとき

$$l\to\int_0^{2\pi}d\theta=\underline{2\pi}_{4}(10)$$

$\boxed{4}$ (a) $y'=-2xe^{-x^2}$

$$y''=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}$$
$$=2e^{-x^2}(2x^2-1)$$

$y''=0$とすると

$$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

よって変曲点の座標は

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{e}}{e}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{e}}{e}\right)$

である.

(b) 求める体積をV'とすると

$$V'=\pi\int_{e^{-x^2}}^{e^{-(x+\Delta x)^2}}t^2\,dt$$
$$\fallingdotseq\left[\frac{\pi}{3}t^3\right]_{e^{-x^2}}^{e^{-(x^2+2x\Delta x)}}$$
$$=\frac{\pi}{3}e^{-3x^2}(e^{6x\Delta x}-1)$$
$$\fallingdotseq 2\pi e^{-3x^2}x\Delta x$$

(c) (b)より求める体積は

$$V=\int_0^r 2\pi e^{-3x^2}x\,dx$$
$$=-\frac{1}{3}\pi\left[e^{-3x^2}\right]_0^r$$
$$=\frac{1}{3}\pi(1-e^{-3r^2})$$

(d) $r\to\infty$のとき $e^{-3r^2}\to 0$なので

$$\lim_{r\to\infty}V=\frac{1}{3}\pi$$

である.