数ⅠB 2000年度試験

1.(1) $\{\arctan(x-1)-\arctan(x+1)\}'$

$= \frac{1}{(x-1)^2+1} - \frac{1}{(x+1)^2+1}$

$= \frac{4x}{\{(x-1)^2+1\}\{(x+1)^2+1\}}$

(2) $(\arctan \frac{x^2}{2})'$

$= \frac{4x}{x^4+4}$

2 (1) $\lim_{x\to\infty} x^2 \log\left(1-\frac{1}{(x+1)^2}\right)$

$-\frac{1}{(x+1)^2} = t$ とおくと

$x\to\infty$ のとき $t\to 0$

$\lim_{x\to\infty} x^2\log\left(1-\frac{1}{(x+1)^2}\right)$

$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{-t}}-1\right)^2 \log(1+t)$

$= \lim_{t\to 0}\left(-\frac{1}{t}-2\frac{1}{\sqrt{-t}}+1\right)\left(t-\frac{t^2}{2}+\cdots\right)$

$= -1$

(2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin x \cdot x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\cdots}{x^2-\frac{x^4}{3!}+\cdots}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{3!}-\frac{x^3}{5!}+\cdots}{1-\frac{x^2}{3!}+\cdots}$

$= 0$

3.(1) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right|$

$= 1$

であるので収束半径は1である

(2) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right|$

$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n+1}\right| = 0$

であるので収束半径は∞である。

※ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ の収束半径Rは

$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$

とすると $\frac{1}{L}$ である。

4. $\frac{f(g(x))-g(f(x))}{x^n} = \frac{\sin^2 x-\sin x^2}{x^n} = h(x)$

とおくと $h(x)$ は偶関数なので

nは偶数

また, $x=0$のまわりでのテーラー展開より

$\sin^2 x \fallingdotseq x^2-\frac{1}{3}x^4$

$\sin x^2 \fallingdotseq x^2$

よって $x\to 0$ のとき

$h(x) \to \frac{x^2-\frac{1}{3}x^4-x^2}{x^n} = -\frac{1}{3x^{n-4}}$

これが0以外の有限確定値となるので

$\underline{n=4}$ $_{//(1)}$ である, また, $h(0) = \underline{-\frac{1}{3}}$ $_{//(2)}$ である

5(1) n回目にもドアが開かない確率は

$\left(\frac{k-1}{k}\right)^n$ であるので, 求める確率は

$\underline{\frac{1}{k}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1}}$ $_{//(3)}$

である. また, ドアが開く回数の期待値E_kは第n回目までを考えると

$E_k = \frac{1}{k} + 2\frac{1}{k}\cdot\frac{k-1}{k} + \cdots + \frac{n}{k}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1}$

$-)\ \frac{k-1}{k}E_k = \frac{1}{k}\cdot\frac{k-1}{k} + \cdots + \frac{n-1}{k}\left(\frac{k-1}{k}\right)^{n-1} + \frac{n}{k}\left(\frac{k-1}{k}\right)^n$

$\frac{1}{k}E_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\cdot k\cdot\left\{1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^n\right\} - \frac{n}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^n$

$E_k = 1 + k\left\{1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^n\right\} - n\left(1-\frac{1}{k}\right)^n$

ゆえに求める値は

$\lim_{n\to\infty} E_k = \underline{1+k}$ $_{//(4)}$

である.

(2) 定義より

$a_n = \underline{\frac{1}{10^{2n-1}}\left(\sum_{k=1}^{n}10^{k-1}\right)^2}$ $_{//(5)}$

$= \frac{1}{10^{2n-1}}\left(\frac{10^n-1}{9}\right)^2$

$= \frac{10}{81}\cdot\left(1-\frac{2}{10^n}+\frac{1}{10^{2n}}\right)$

よって $n\to\infty$ のとき $a_n \to \underline{\frac{10}{81}}$ $_{//(6)}$

また, $\{a_n\}$をみれば, 小数第100位の数が一定となる最初のnは $n=\underline{100}$ $_{//(7)}$.

その一定の数は $\underline{1}$ $_{//(8)}$ ($\because \frac{10}{81}$は循環小数)