数理科学 I シケプリ

シケ対　稲次

2005 年 7 月 15 日

数理科学 I は微積分続論です．結構多くの人がこの授業を切ったようです．でも一応作りました．このプリントは授業でやったことはだいたい網羅しています．授業でやった演習問題は例題として解答付きになっているので，参考にしてください．例題の上に * が付いているのは重要問題で，テストでも似たような問題が出ると思います．時間がなければ，そこだけカバーしてもいいかもしれません．できるだけ図も付けたので，イメージがつかみやすくなったかと思います．分量はやや多めですが，* 付きの例題を中心にやればそんなに時間はかからないはずです．なお，計算問題に関しては，計算ミスがあるかもしれません．そのときはかんべんして下さい．少しでも役に立てばうれしいです．

1　多変数関数の微分法

ここでは，多変数関数の微分法について説明します．まずは多変数実数値関数の微分法について説明した後で，多変数ベクトル値関数の微分法について説明します．

1.1　多変数実数値関数の微分法

1 変数実数値関数の微分法の復習から始めます．1 変数関数 $f(x)$ が $x = a$ で微分可能とは，

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = c \in \mathbb{R}$$

が存在することをいい，$x = a$ における f の**微分係数** c を $f'(a)$ と書くのでした．これを少し変形して，

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - ch}{h} = 0$$

と書いておきます．また，区間 $I \subset \mathbb{R}$ のすべての点で微分可能なとき，f は区間 I で微分可能といいます．

では，多変数実数値関数についても同様の定義ができるでしょうか？ n 変数実数値関数とは，$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}$ となる関数のことです．今，

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n),\ \boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \cdots, h_n),\ \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

とし，1 変数の場合と同様に考えてみると，

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{h}}{\boldsymbol{h}} = 0 \quad (\text{但し，} \boldsymbol{0} = (0, 0, \cdots, 0)) \quad ??$$

となります．これは正しいでしょうか？分母を見ると，ベクトル $\boldsymbol{h}$ で割っています．こんな操作はありません．つまり，1 変数関数の定義を直接当てはめることはできないのです．

では，どうすればいいでしょうか？もし割るという操作をしたければ，$\boldsymbol{h}$ というベクトルそのものではなく，$\|\boldsymbol{h}\|$ で割るということを考えるのが妥当でしょう．すると，

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to 0}\frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|}=0$$

となります．これなら不都合な点はありません．これを多変数実数値関数の微分の定義にします．$\boldsymbol{c}$ を多変数実数値関数の $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ における**微分係数**といい，$f'(\boldsymbol{a})$ で表します．つまり，

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to 0}\frac{f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-f'(\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{h}}{\|\boldsymbol{h}\|}=0$$

となります．また，領域 $U\subset\mathbb{R}^n$ のすべての点で微分可能なとき，f は U で微分可能であるといいます．

ここからは，$f'(\boldsymbol{a})$ が具体的にどのように与えられるのかを考えてみましょう．結論から先に言うと，

$$f'(\boldsymbol{a})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}),\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right)$$

となります．物理などでもよく出てきたように，

$$f'(\boldsymbol{a})=\operatorname{grad}f(\boldsymbol{a})=\nabla f(\boldsymbol{a})$$

とも書けます．$f(\boldsymbol{x})$ は曲面を表すと考えられるので ($n=2$，つまり 2 変数関数を考えると分かりやすいです．この場合は一般に 3 次元空間内の曲面になります)，$\operatorname{grad}f(\boldsymbol{a})$ は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$ における曲面の勾配を表していると考えることができます．

では，具体的な表式を得ることにします．$\boldsymbol{h}=h\boldsymbol{e}_i=h(0,\cdots,1,\cdots,0)$ (i 番目だけ 1，他はすべて 0 で $h\in\mathbb{R}$) として，定義の式に代入してみます[*1]．すると，

$$\begin{aligned}\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to 0}\frac{|f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h})-f(\boldsymbol{a})-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{h}|}{\|\boldsymbol{h}\|}&=\lim_{h\to 0}\frac{|f(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{e}_i)-f(\boldsymbol{a})-hc_i|}{|h|}\\&=\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})-c_i\right|\\&=0\end{aligned}$$

つまり，

$$c_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})$$

となるので，微分係数，すなわち $\boldsymbol{c}=f'(\boldsymbol{a})$ は

$$f'(\boldsymbol{a})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}),\frac{\partial f}{\partial x_2}(\boldsymbol{a}),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\right)$$

となり，目的が達成されました．

一番簡単な例をやってみましょう．$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$ ($\boldsymbol{a}$ は定ベクトル) とすると，$f(\boldsymbol{x})=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$ ですから，上の式に代入して，$f'(\boldsymbol{a})=(a_1,\cdots,a_n)=\boldsymbol{a}$ となります．もっともこれは定義の式でも簡単に導出できます．

[*1] ここでは，分子の絶対値をとります．この方が論を進めやすくなります．

1.2 多変数ベクトル値関数の微分法

では，今度は多変数ベクトル値関数の微分法を考えてみましょう．多変数ベクトル値関数とは，$\mathbb{R}^n$ の部分集合 U から $\mathbb{R}^m$ の部分集合 V への関数です．ここでも，1 変数の場合の式を直接使うことはできず，修正が必要となります．今度は分母・分子の両方のノルムをとることで修正をします．つまり，次のようになります．

$$f'(\boldsymbol{a}) = \lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to 0} \frac{\|f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{a}) - M\boldsymbol{h}\|}{\|\boldsymbol{h}\|}$$

ここで，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ における**微分係数** M は $m \times n$ 行列です．これから，M を求めていきましょう．結論から先に言うと，多変数実数値関数の微分法のアナロジーで，

$$f'(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

となります．(i, j) 成分が $\partial f_i/\partial x_j(\boldsymbol{a})$ です．これを示しましょう．

求める M を行ベクトルで

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 \\ \boldsymbol{c}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_m \end{pmatrix} \qquad (\boldsymbol{c}_i \text{は } n \text{ 成分の横ベクトル})$$

とします．すると，

$$M\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_1 \cdot \boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{c}_2 \cdot \boldsymbol{h} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_m \cdot \boldsymbol{h} \end{pmatrix}$$

と書けます．ここまでくると，各行ごとに考えれば，多変数実数値関数の場合に帰着できます．そのために次の事実を使います．

$$f'(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} f_1'(\boldsymbol{a}) \\ f_2'(\boldsymbol{a}) \\ \vdots \\ f_m'(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

これは明らかでしょう．この事実から，

$$f'(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_j}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

が導かれます．

　具体例をやってみましょう．$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が，

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} x^2y \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

で与えられるとき，その導関数は

$$f'(x,y)=\begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

です．

1.3　連鎖律

　次に，微分法の**連鎖律**を説明します．いわゆる合成関数の微分法です．これは計算などで使うことがよくあるので，慣れておきましょう．

定理　$U\subset\mathbb{R}^l$, $V\subset\mathbb{R}^m$ をそれぞれ開集合とする．また，連続写像 $f:U\longrightarrow V$, $g:V\longrightarrow\mathbb{R}n$ に対し，f は $\boldsymbol{a}\in U$ で微分可能，g は $\boldsymbol{b}=f(\boldsymbol{a})\in V$ で微分可能とする．このとき，$h=g\circ f$ は $a\in U$ で微分可能で，

$$Dh(\boldsymbol{a})=Dg(\boldsymbol{b})Df(\boldsymbol{a})$$

が成り立つ．

系　$U, V\subset\mathbb{R}^n$ をそれぞれ開集合とする．また，連続写像 $f:U\longrightarrow V$, $g\,V\longrightarrow\mathbb{R}n$ に対し，f は $\boldsymbol{a}\in U$ で微分可能，g は $\boldsymbol{b}=f(\boldsymbol{a})\in V$ で微分可能とする．さらに，$g(f(x))=x$, $f(g(y))=y$ であるとき，つまり，g が f の逆写像であるとき，$h=g\circ f$ は $a\in U$ で恒等写像で，

$$Dg(\boldsymbol{b})=(Df(\boldsymbol{a}))^{-1}\quad\text{(逆行列)}$$

が成り立つ．

証明はここではしません．典型例を通じて慣れていきましょう．

例題 ⋆　$\mathbb{R}^2$ における**ラプラシアン**は

$$\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

で与えられる．極座標表示 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ により，上のラプラシアンは，

$$\triangle'=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

と表されることを示せ．

解答　(**方針**：$\partial/\partial x$ などを $\partial/\partial r$ などを使って表したい．そのために，合成関数の微分法を用いる．)

$x=r\cos\theta=\varphi(r,\theta)$, $y=r\sin\theta=\psi(r,\theta)$ として，$f(x,y)=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ とおくとき，

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial r}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial r}\\&=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\\\frac{\partial f}{\partial\theta}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial r}\\&=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\end{aligned}$$

ここからは f を省略し，演算子の形で書く．上の計算結果を行列で表示して，

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

これを解くと，

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

すなわち，

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} \triangle &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ &= \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{aligned}$$

となる．■

2　逆関数定理・陰関数定理

ここでは，逆関数定理と陰関数定理について説明しますが，定理の証明は省略します．定理を使っていくつかの例題を解くことにしましょう．

定理 (逆関数定理)　U が $\mathbb{R}^n$ の開集合で，$f : U \to \mathbb{R}^n$ は U 上 C^1 級で，一点 $a \in U$ において，$\det f'(a) \neq 0$ を満たすとき，次のことが成り立つ．

(1) $b = f(a)$ のある開近傍 W と a の開近傍 $V \subset U$ が存在し，f の定義域を V に制限した関数 $f|V$ には逆関数 $g = (f|V)^{-1} : W \to V$ が存在して，g は W 上 C^1 級である．

(2) 任意の $y = f(x) \in W, x \in V$ に対し，$g'(y) = f'(x)^{-1}$

定理 (陰関数定理)　U を $\mathbb{R}^{n+m}$ の開集合とし，C^1 級関数 $f : U \to \mathbb{R}^m$ が，$c = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U \quad (a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m)$ に対して，

$$f(a,b) = 0, \qquad \frac{\partial(f_1, \cdots, f_m)}{\partial(y_1, \cdots, y_m)}(c) := \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(c) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(c) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(c) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(c) \end{vmatrix} \neq 0$$

を満たすとする．このとき，

(1) $c \in V \times W \subset U$ を満たす $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ の開集合 V, W と関数 $g : V \to W$ が存在して，次の (a)(b)(c) を満たす．

(a) $g(a)=b$　　(b) g は連続　　(c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in V \times W$ に対して，$f(x,y)=0 \Leftrightarrow y=g(x)$

(2) g は C^1 級である．

注意 このような g は一意的に定まる．

なんのことだか分かりにくいですが，例題をやって理解していきましょう．

例題　(1) 方程式 $f(x,y,z)=x^2+(x-y^2+1)z-z^3=0$ は $(0,0,1)$ の近傍で z について解けることを示せ．

(2) $(0,0,1)$ における $\partial z/\partial x, \partial z/\partial y$ の値を求めよ．

解答　z について偏微分すると，$\partial f/\partial z = x-y^2+1-3z^2$ で，$(\partial f/\partial z)(0,0,1)=-2\neq 0$．よって，陰関数定理より，$f=0$ は z について解ける．

(2) (1) から，$z=z(x,y)$ とおけることが分かった．連鎖律に注意して，$f(x,y,z)=0$ の式を x,y で偏微分すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}&=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}&=0 \end{aligned}$$

$(0,0,1)$ を代入して解くと，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=0$$

を得る．■

授業の演習でよく取り上げられる問題を解いておきます．どちらもやることは同じです．

例題 *　Δ を単位行列に十分近い 3 次対称行列としたとき，単位行列の近くの 3 次対称行列：

$$X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

で，

$$X^2=\Delta$$

を満たすものがただ一つ存在することを示せ．

解答　X,Δ が実対称行列であることに注意して，

$$X=\begin{pmatrix} x & u & w \\ u & y & v \\ w & v & z \end{pmatrix}, \Delta=\begin{pmatrix} X & U & W \\ U & Y & V \\ W & V & Z \end{pmatrix}$$

とおくと，

$$\begin{pmatrix} x^2+u^2+w^2 & xu+uy+wv & xw+uv+wz \\ xu+uy+wv & u^2+y^2+v^2 & uw+yv+vz \\ xw+uv+wz & uw+yv+vz & w^2+v^2+z^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X & U & W \\ U & Y & V \\ W & V & Z \end{pmatrix}$$

(**方針**：X の存在を示したいのだから，上の方程式 (六個) が，x,y,z,u,v,w について解けることを示せば，陰関数定理から題意が示せる．)

上の方程式が x, y, z, u, v, w について解けることをみよう．そのために，

$$\begin{aligned}
f_1(x,y,z,u,v,z,X,Y,Z,U,V,W) &= x^2+u^2+w^2-X \\
f_2(x,y,z,u,v,z,X,Y,Z,U,V,W) &= u^2+y^2+v^2-Y \\
f_3(x,y,z,u,v,z,X,Y,Z,U,V,W) &= w^2+v^2+z^2-Z \\
f_4(x,y,z,u,v,z,X,Y,Z,U,V,W) &= xu+uy+wv-U \\
f_5(x,y,z,u,v,z,X,Y,Z,U,V,W) &= uw+yv+vz-V \\
f_6(x,y,z,u,v,z,X,Y,Z,U,V,W) &= xw+uv+wz-W
\end{aligned}$$

とおく (六個の関数に対して六個の変数があるからヤコビアンを求めることができる．示すべきは点 $(1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0)$ におけるヤコビアンが 0 でないこと．それぞれの関数を偏微分して $(1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0)$ を代入してみよう．すると，対角成分はすべて 2 で，それ以外はすべて 0 になる．)．この式のヤコビアンを求めると，

$$\frac{\partial(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6)}{\partial(x,y,z,u,v,w)} = \begin{vmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

よって，陰関数定理により，上の方程式は $(1,1,1,0,0,0,1,1,1,0,0,0)$ の近傍で x, y, z, u, v, w について解け，しかもそのとき一意的に定まる．■

例題 ⋆　B を単位行列に近い二次行列とする．このとき，単位行列に十分近い二次行列 A で $A^3 = B$ であるようなものが存在することを示せ．

解答　やるべきことは先の例題と同じ．

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix}$$

とおくと，$A^3 = B$ より，

$$\begin{pmatrix} x^3+2xyz+yzw-X & x^2y+y^2z+xyw+yw^2-Y \\ x^2y+y^2z+xyw+yw^2-Z & xyz+2yzw+w^3-W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

$$\begin{aligned}
f_1(x,y,z,w,X,Y,Z,W) &= x^3+2xyz+yzw-X \\
f_2(x,y,z,w,X,Y,Z,W) &= x^2y+y^2z+xyw+yw^2-Y \\
f_3(x,y,z,w,X,Y,Z,W) &= x^2y+y^2z+xyw+yw^2-Z \\
f_4(x,y,z,w,X,Y,Z,W) &= xyz+2yzw+w^3-W
\end{aligned}$$

とおいて，点 $(1,0,0,1,1,0,0,1)$ の近傍で上の方程式が x, y, z, w について解けることをみよう．ヤコビアンを求めると，

$$\frac{\partial(f_1,f_2,f_3,f_4)}{\partial(x,y,z,w)} = \begin{vmatrix} 3 & & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

よって，上の方程式は $(1,0,0,1,1,0,0,1)$ の近傍で x, y, z, w について解けて，しかもそれは一意的．■

2.1　ラグランジュの未定乗数法

陰関数定理の応用として，ラグランジュの未定乗数法を説明します．この定理は極値を求める問題で使われます．例題を通じて慣れてください．また，授業で取り上げられた事柄を説明しておきます．ノルムが一定のときの二次形式の極値を求める問題です．最後に結論を書いておくので，以下のプロセスは急いでいるときは読まなくても良いと思います．

まずは，束縛条件というものを説明しておきます．今からこの章で考える問題は，ある与えられた条件の下で，関数の極値を求めることです．その与えられた条件を**束縛条件**といいます．もう少し数学的に整理しておくと，

問題　$U \subset \mathbb{R}^n$ (開集合) とする．

$$g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_p \end{pmatrix} : U \longrightarrow \mathbb{R}^p \quad (1 \leq p \leq n-1)$$

を微分可能な写像とし，$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ を微分可能な関数とする．束縛条件

$$g_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = g_p \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

の下に，関数 f の極大値，極小値を求めよ．

というような問題です．

定理　$\boldsymbol{a} \in A$ ($\boldsymbol{a} \in U,\ g_1 = g_2 = \cdots = g_p = 0$) で，次の条件が満たされているとする．

(1)　$\operatorname{rank} Dg(\boldsymbol{a}) = p$

(2)　$f|_A$ は $\boldsymbol{a}$ で極値をとる．ただし，$f|_A$ とは，f の定義域を A に制限したものである．

このとき，$(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ が存在し，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \right) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_p}{\partial x_1}(\boldsymbol{a}) & \cdots & \dfrac{\partial g_p}{\partial x_n}(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}$$

が成り立つ．

なんだかよく分からないので，授業で取り上げた例を，上の定理に則して解いてみましょう．

例題 ⋆　条件

$$x^2 + y^2 = 1$$

の下に，

$$f(x, y) = x + y$$

の極値を求めよ．

解答　(上の定理で，$p = 1,\ U = \mathbb{R}^n,\ g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ と思う)

(1) の確認．$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$ で $f|_A(x, y)$ が極値をとるとする．

$$Dg(\boldsymbol{a}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x},\ \frac{\partial g}{\partial y} \right) = (2a_1,\ 2a_2) \neq (0, 0)$$

$(0,0)$ は $g(0,0)=0$ を満たさないので，$(0,0)$ は A の点ではない．A 上では常に $\operatorname{rank} Dg(\boldsymbol{a})=1=p$．(1) を満たす．よって，定理により，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\boldsymbol{a}),\ \frac{\partial f}{\partial y}(\boldsymbol{a})\right)=\lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x}(\boldsymbol{a}),\ \frac{\partial g}{\partial y}(\boldsymbol{a})\right)$$

なる $\lambda\in\mathbb{R}$ が存在する．計算すると，

$$(1,1)=\lambda(2a_1,\ 2a_2)$$

であるから，$a_1=a_2$．これを $g(x,y)=0$ に代入して，

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

である．それぞれ $f(x,y)$ に代入すれば，極大値は $\sqrt{2}$，極小値は $-\sqrt{2}$．■

ただ，今は極値を求める際に，「本当に極値をとるのか？」ということを考えずに解いています．これは大学入試でもよく出てるような問題で，最大値，最小値があると分かっているから何の証明もなく「ここは極値をとります」といっているのです．実際，求めた $\boldsymbol{a}$ が必ずしも極値を与えるとは限らず，それが本当に極値を与えるかどうかは別な判定法が必要になります．それは**ヘッセ行列**に頼ることが多いのですが，授業ではやっていないのでこのシケプリでは解説しません．

では，ラグランジュ未定乗数法の中でも典型的な問題を解いてみましょう．これは極値の判定が本来必要になりますが，下の定理に書くように，必ず極値をもつこと，および極値は何であるかが保証されます．なお，最終的な結論だけが欲しいときは，ここからしばらく続く議論を飛ばしてもかまいません．

問題　A を n 次対称行列，$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ とし，

$$F_A(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x},A\boldsymbol{x})$$

と定める．束縛条件 : $\|\boldsymbol{x}\|=1$ の下で，$F_A(\boldsymbol{x})$ の極値を求めよ．

解答　まずはラグランジュ未定乗数法に従いましょう．

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$$

で極値をとるとします．

$$g(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}\|^2-1,\ G(\boldsymbol{x})=F_A(\boldsymbol{x})-\lambda g(\boldsymbol{x})$$

とおきます．この式を各 x_i で偏微分して $\partial G/\partial x_i(\boldsymbol{a})=0$ とします．すると，

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_A}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})\\\vdots\\\dfrac{\partial F_A}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})\\\vdots\\\dfrac{\partial g}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\end{pmatrix}=2\lambda\boldsymbol{a}$$

ここで，次のことを示します．これは演習問題として取り上げられていました．

補題 *　次の式が成り立つ．

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial F_A}{\partial x_1}(\boldsymbol{a})\\\vdots\\\dfrac{\partial F_A}{\partial x_n}(\boldsymbol{a})\end{pmatrix}=2A\boldsymbol{a}$$

証明

$$F_A(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i \end{pmatrix} \right)$$

第 J 行について考える (分かりにくいときは第 1 行目でやっても十分わかります)．内積を計算して

$$(\text{第 } J \text{ 行目}) = x_J \sum_{i=1}^{n} a_{Ji}x_i + \sum_{k \neq J} \sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_k x_i$$

ところが今 A は対称行列なので $a_{ki} = a_{ik}$．従って，

$$(\text{第 } J \text{ 行目}) = x_J \sum_{i=1}^{n} a_{Ji}x_i + \sum_{k \neq J} \sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_k x_i$$

これを x_J で偏微分して

$$2a_{JJ}x_J + \sum_{i \neq J} a_{Ji}x_i + \sum_{k \neq J} a_{Jk}x_k = 2\sum_{k=1}^{n} a_{Jk}x_k = (2A\boldsymbol{x} \text{ の第 } J \text{ 行目})$$

ここで $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ とすればよい．■

さて，以上のことが示せたので，次の式が導けました．

$$A\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a} \qquad (\leftarrow \text{固有方程式！})$$

つまり，極値をとる点 $\boldsymbol{a}$ は A の固有方程式の固有ベクトルで，未定乗数 λ は固有値だったわけです．このとき，ノルムが 1 であったことを思い出すと，

$$F_A(\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}, \lambda\boldsymbol{a}) = \lambda(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \lambda$$

ここで注意しておきますが，n 次対称行列は実数の固有値しか持ちません (おそらく，ここでの問題は**実**対称行列ということなのでしょう．そうでないと，上の変形はできません．$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ の外は $\overline{\lambda}$ になります．虚数に大小関係はないので，極値が虚数というのもありえません)．また，**極値がすべて固有値とも限りません**．ところで，線型代数学でやりましたが，

> **定理**　実対称行列 A は，適当な直交行列 ($PP^T = E$, P^T は P の転置行列) を選ぶことによって対角化できる．このとき対角成分はすべて実数の固有値である．

という定理がありました．そこで，そのような直交行列 P をとり，対角化行列を Λ，対角成分を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ として，

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$$

とおいて，F_A とノルムの条件を書き直してみると，

$$F_A(\boldsymbol{x}) = (P\boldsymbol{y},\ AP\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y},\ P^T AP\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{y}, \Lambda\boldsymbol{y}) = F_\Lambda(\boldsymbol{y}), \quad \|\boldsymbol{y}\| = 1$$

となります．つまり，このように座標を変換して問題を書き換えても良いわけです．

極値の決定に入りましょう．このような定理が成り立ちます．

定理　F_Λ の極大値は最大固有値，極小値は最小固有値．

証明　簡単のため，$\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$ としておきます．

$$\boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \text{ 行目}$$

とおきます．すると，$\Lambda \boldsymbol{e}_i = \lambda_i \boldsymbol{e}_i$ です．今，1 より十分に小さい δ をとって，

$$\boldsymbol{e}'_i = \begin{pmatrix} \delta \\ \vdots \\ 0 \\ \sqrt{1-\delta^2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \text{ 行目}$$

$$\boldsymbol{e}''_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sqrt{1-\delta^2} \\ 0 \\ \vdots \\ \delta \end{pmatrix} \leftarrow i \text{ 行目}$$

とすると，これらのノルムはともに 1 です．今，$\lambda_1 < \lambda_i < \lambda_n$ とすると，

$$F_\Lambda(\boldsymbol{e}'_i) = \lambda_1 \delta^2 + \lambda_i(1-\delta^2) < \lambda_i$$

$$F_\Lambda(\boldsymbol{e}''_i) = \lambda_n \delta^2 + \lambda_i(1-\delta^2) > \lambda_i$$

もし λ_i が極小値であれば，$\boldsymbol{e}_i$ に十分近い点では**常に** $F_\Lambda \geq \lambda_i$ でなければなりませんが，それは二式のうちの上の式により起こりえません．λ_i が極大値と仮定すると，今度は下の式と矛盾します．つまり，λ_i は極値ではありません．

さて，それでは λ_1, λ_n は極値なのでしょうか？一般的には場合によっては片方しかない場合だってありえます．しかし，今回は束縛条件 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ があり，点 $(x_1, \cdots, x_n)$ はその球面上しか動きません．その球面は**コンパクト集合**と呼ばれるものです．そして，コンパクト集合であることと**有界閉集合**であることは同値で，有界集合上では連続関数は最大値・最小値をとります．従って，この問題設定においては必ず極大値・極小値があるわけです．これで定理が示せました．■

では，ここまでの議論をまとめておきましょう．

まとめ　A を実対称行列とする．束縛条件 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ の下で，$(\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})$ は極値をもち，極小値は A の最小固有値，極大値は A の最大固有値で，そのような点はそれぞれ固有値に属する固有ベクトルとなる．

それでは，演習でやった問題の解答をやってみましょう．一見上の議論とは無関係に見えますが・・・．

例題 *　束縛条件

$$x^2 + 4y^2 = 1$$

の下で，関数

$$f(x, y) = x^2 + 4xy - y^2$$

の極小値・極大値を求めよ．

解答　(**方針**：上の議論ができるような変形を考えよう)

$X = x,\ Y = 2y$ とすると，$f(x, y) = X^2 + 2XY - Y^2/4$ となる．

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/4 \end{pmatrix}$$

とおくと，結局，束縛条件 $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ の下での，関数 $g(X, Y) = X^2 + 2XY - Y^2/4 = (\boldsymbol{x},\ A\boldsymbol{x})$ の極値を求める問題に帰着する．このとき，A は実対称行列になっている (これも先の議論の仮定でした)．つまり，A の固有値を求めればよい．固有多項式を $\Phi_A(t)$ とおくと，

$$\Phi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ -1 & 1/4 \end{vmatrix} = t^2 - \frac{3}{4}t - \frac{5}{4}$$

$\Phi_A(t) = 0$ を解いて，極小値 $\dfrac{3-\sqrt{89}}{8}$，極大値 $\dfrac{3+\sqrt{89}}{8}$．　■

3　線積分

ここでは，線積分について説明します．線積分は力学や電磁気学でも出てきたので，イメージはつかみやすいと思います．

定義　連続写像 $\varphi\ :\ [a, b] \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^2$ (開集合) が**区分的に滑らか**であるとは，適当な分割 $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$ をとることで，$\varphi|_{[a_{j-1}, a_j)}$ $(j = 1, 2, \cdots, N)$ を C^1 級にできることをいう．

線積分の定義の議論はなんかごちゃごちゃしてしまうので，流してもかまいません．パラメータ付けされた曲線 $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$ が $I = [a, b]$ で定義された C^1 級の (区分的に滑らかな) 曲線 C であるとします．曲線を分割し，

$$\sum_{j=1}^{N} \{f(x_j, y_j)\Delta x_j + g(x_j, y_j)\Delta y_j\}$$

という近似和を考えてみます．これは物理の仕事の微小和みたいなものです．これは誤差項を ε とすると，

$$\sum_{j=1}^{N} \{f(\varphi(t_j)),\ \psi(t_j))\varphi'(t_j) + g(\varphi(t_j), \psi(t_j))\psi'(t_j)\}\Delta t_j + \varepsilon$$

となります．この積分は収束し，その極限が

$$\int_a^b \{f(\varphi(t),\ \psi(t))\varphi'(t) + g(\varphi(t),\ \psi(t))\psi'(t)\}dt$$

です．これを線積分の定義として採用します．

線積分の性質をいくつか例題としてあげておきます．

例題　線積分に関する次の性質を証明せよ．

(1) 線積分はパラメータのとり方によらず，曲線 C のみによって定まる．（だからこそ，線積分が定義できるのですが $\cdots$．）

(2) 経路を C と逆向きにとったものを $-C$ とする．このとき，

$$\int_{-C} f(x,y)dx + g(x,y)dy = -\int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

(3)

$$\int_C \{f_1(x,y)+f_2(x,y)\}dx+\{g_1(x,y)+g_2(x,y)\}dy = \left(\int_C f_1(x,y)dx+g_1(x,y)dy\right)+\left(\int_C f_2(x,y)dx+g_2(x,y)dy\right)$$

$$\int_C a\{f(x,y)dx + g(x,y)dy\} = a\left(\int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy\right) \qquad (a \in \mathbb{R})$$

解答　(1) 別のパラメータをとっても，線積分の結果が元の線積分と一致することを示す．$f(x,y)dx$ について示せば十分．狭義単調増加関数 φ によって，$t = \varphi(s) \quad (\alpha \leq s \leq \beta,\ \psi(\alpha) = a,\ \psi(\beta) = b)$ と表したとき，$\varphi'(s)ds = dt$ であるから，

$$\int_C f(x,y)dx = \int_\alpha^\beta f(x(\varphi(s)), y(\varphi(s)))x'(\varphi(s))\varphi'(s)ds = \int_a^b f(x(t),y(t))x'(t)dt$$

よって，パラメータのとり方によらず，C によって線積分は決まった．

(2) $t = (a+b) - s$ として，

$$\begin{aligned}
\int_{-C} f(x,y)dx = \int_b^a f(x(t),y(t))x'(t)dt &= \int_a^b f(x((a+b)-s), y((a+b)-s))x'(a+b-s)(-ds) \\
&= \int_b^a f(x(t),y(t))x'(t)dt \\
&= -\int_a^b f(x(t),y(t))x'(t)dt \\
&= -\int_C f(x,y)dx
\end{aligned}$$

(3) 積分の定義に立ち返って，

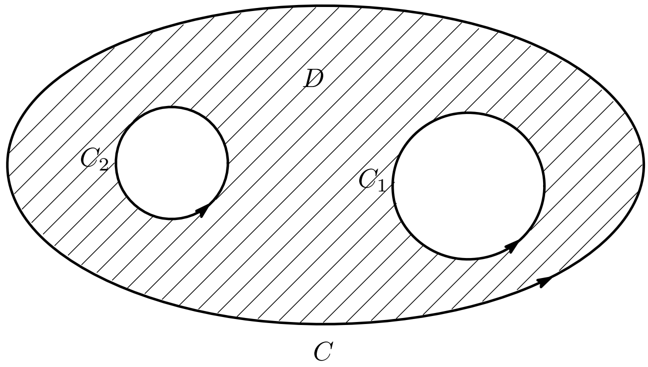
$$\begin{aligned}
\int_C \{f_1(x,y)+f_2(x,y)\}dx &= \int_a^b \{f_1(x(t),y(t))dt + f_2(x(t),y(t))\}x'(t)dx \\
&= \int_a^b f_1(x(t),y(t))x'(t)dt + \int_a^b f_2(x(t),y(t))x'(t)dt \\
&= \int_C f(x,y)dx + \int_C f(x,y)dx
\end{aligned}$$

$g_1 + g_2$ の方も同様．となります．定数倍の方も同様に示せる．■

ところで，線積分では，ある閉領域の境界上の線積分というものがしばしば現れます．この線積分についてはルールがあります．それは,

領域を左手に見る方向を積分路の正の向きとする

というものです．どういうことか，下の図で説明します．



まず，外側の C について考えてみると，矢印の方向に走ってみると，斜線部 (池みたいなイメージ) は確かに進行方向に対して左手の方にあります．よって，図の矢印の方向が正になります．

ところが，内側の C_1, C_2 について矢印の方向に走ってみると，斜線部は右手側にあります．つまり，この場合は矢印とは逆に走らなければなりません．

領域の境界上の線積分については，次のグリーンの定理が重要です．言ってみれば，領域での積分をその境界の積分に置き換える定理です．ですから，境界の向きを考えた線積分が重要になるのです．

4　グリーンの定理

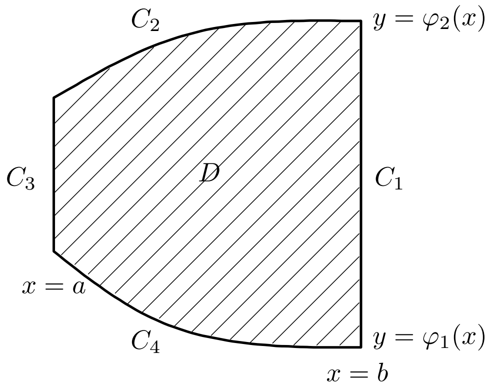
ここではグリーンの定理を紹介し，それを使っていくつか問題を解いてみましょう．

定理　P, Q を C^∞ 級関数とする．D を閉曲線 C で囲まれた領域とするとき,

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

が成り立つ．

証明　(線積分の計算練習として授業でやりました)



$\omega = f(x,y)dx$ とおく．$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ とし，

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \{(b,\ t) \mid \varphi_1(b) \le t \le \varphi_2(b)\} \\
C_2 &= \{(b,\ \varphi_2(t)) \mid a \le t \le b\} \\
C_3 &= \{(a,\ t) \mid \varphi_1(a) \le t \le \varphi_2(a)\} \\
C_4 &= \{(t,\ \varphi_1(t)) \mid a \le t \le b\}
\end{aligned}
$$

とする．これを反時計回りに線積分する．C_1, C_3 の線積分は考える必要はない ($dx = 0$ だから)．

$$
\int_{C_2} \omega = \int_b^a f(t, \varphi_2(t))dt = -\int_a^b f(t, \varphi_2(t))dt
$$

C_4 についても同様に計算すると，結局全体の線積分は

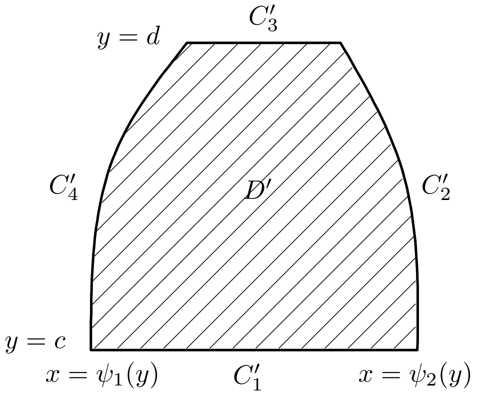
$$
\begin{aligned}
\int_C \omega &= -\int_a^b \{f(t, \varphi_2(t)) - f(t, \varphi_1(t))\}dt \\
&= -\int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \frac{\partial f}{\partial y}(t, y)dy \right\} dt \\
&= -\iint_D \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dxdy
\end{aligned}
$$

となる．同様に，領域を D'，境界を $C' = C_1' + C_2' + C_3' + C_4'$ として，

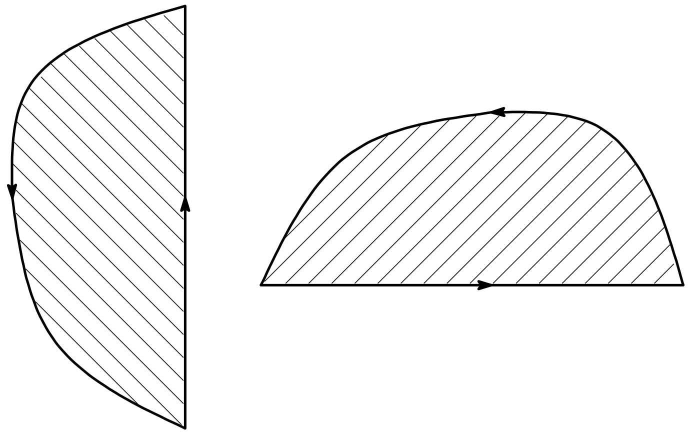
$$
\begin{aligned}
C_1' &= \{(t,\ c) \mid \psi_1(c) \le t \le \psi_2(c)\} \\
C_2' &= \{(\psi_2(t),\ t) \mid c \le t \le d\} \\
C_3' &= \{(t,\ d) \mid \psi_1(d) \le t \le \psi_2(d)\} \\
C_4' &= \{(\psi_1(t),\ t) \mid c \le t \le d\}
\end{aligned}
$$

に対して，

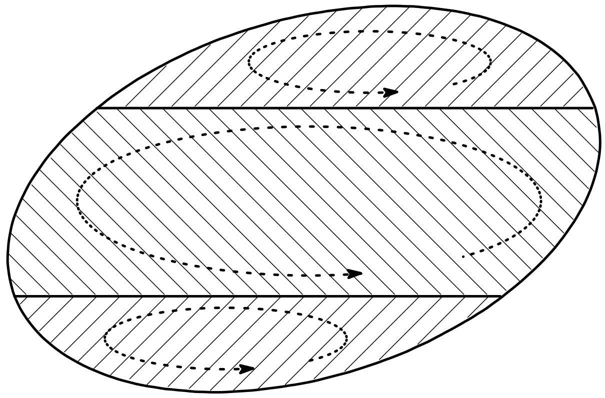
$$
\int_{C'} g(x, y)dy = \iint_{D'} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)dxdy
$$



また，次のような領域に対しても成り立つことが分かる．



これらは一般の領域にも拡張できる (電磁気学でやったように，小さな領域を足し合わせていくと，共有する境界は積分すると打ち消しあい，結局は外側の境界だけが残る．領域の分割を無限に細かくすると，その極限は厳密に上の結果と一致する．)．例えば，下のようにする．



よって，領域 D に対し，辺々加えると，定理の式を得る．■

少し流れが分かりにくかったかもしれません．まず，二つの場合を別に考えて計算し，後で同じ領域に対してその公式を適用し，辺々を加えて定理を証明したのです．途中までは補題みたいなものです．もっと丁寧にやるべきですが，そこまでは授業でやっていないので概略を示しました．では，これを使った演習の解答をしましょう．次のは意外と厄介なので，* があるものだけをやってもいいと思います．

例題　微分可能な写像

$$\Phi\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(u,v)\\y(u,v)\end{pmatrix}$$

を用意する．$\omega=f(x,y)dx+g(x,y)dy$ に対し，$x=x(u,v),\ y=y(u,v)$ を代入したものを，ω の**引き戻し** (pull back) という．

$\gamma=\gamma(t)\quad(a\leq t\leq b)$ を (u,v) 平面内の曲線とし，$\Phi\circ\gamma=\Phi(\gamma(t))$ と定める．このとき，

$$\int_{\Phi\circ\gamma}\omega=\int_\gamma\Phi^*\omega$$

となることを示せ．

解答

$$\int_{\Phi\circ\gamma}\omega=\int_a^b\left\{f(x(u(t),v(t)),y(u(t),v(t)))\frac{d}{dt}(x(u(t),v(t)))+g(x(u(t),v(t)),y(u(t),v(t)))\frac{d}{dt}(y(u(t),v(t))\right\}dt$$

連鎖律に注意すると，

$$\frac{d}{dt}(x(u(t),v(t))) = \frac{\partial x}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}v'(t)$$
$$\frac{d}{dt}(y(u(t),v(t))) = \frac{\partial y}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial y}{\partial v}v'(t)$$

一方，

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \varPhi^*\omega &= \int_\gamma f(x(u,v),y(u,v))d(x(u,v)) + g(x(u,v),y(u,v))d(y(u,v)) \\
&= \int_\gamma f(x(u,v),y(u,v))\left\{\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right\} + g(x(u,v),y(u,v))\left\{\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right\} \\
&= \int_\gamma \left[f(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial x}{\partial u} + g(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}\right]du + \left[f(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial x}{\partial v} + g(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial v}\right]dv
\end{aligned}$$

この式を t での積分に置き換えると

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \left[\left\{f(x(u(t),v(t)),y(u(t),v(t)))\frac{\partial x}{\partial u}(u(t),v(t)) + g(x(u(t),v(t)),y(u(t),v(t)))\frac{\partial y}{\partial u}(u(t),v(t))\right\}u'(t)\right. \\
&\quad \left. + \left\{f(x(u(t),v(t)),y(u(t),v(t)))\frac{\partial x}{\partial v}(u(t),v(t)) + g(x(u(t),v(t)),y(u(t),v(t)))\frac{\partial y}{\partial v}(u(t),v(t))\right\}v'(t)\right]dt
\end{aligned}$$

先ほどの式と比較すると，これらは一致する．■

例題 *　次の等式を示せ (領域の面積を求めるときに使います)．

$$\iint_D dxdy = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx$$

解答　グリーンの定理で

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

としたい．$Q = x,\ P = 0$ とすると，

$$\int_C xdy = \iint_D dxdy$$

$Q = 0,\ P = -y$ とすると，

$$\int_C -ydx = \iint_D dxdy$$

辺々加えて，2 で割ればよい．■

ところで，授業で**二次元の変数変換の公式**をグリーンの定理から導きました．一応ここでも書いておきます．読み飛ばしてもかまいません．

定理　uv 平面内の有界閉領域 E は，C^∞ 級写像

$$\varPhi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$$

により xy 平面内の有界領域 E に一対一に写されるとする．このとき，C^∞ 級関数 $f = f(x,y)$ に対し，

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_E f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

が成り立つ．但し，Φ は境界の向きを変えないものとし，C^∞ 級関数で

$$f(x,y)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$$

なるものが存在すると仮定する．

証明　グリーンの定理を用いる．E, D の境界をそれぞれ $\partial E, \partial D(=\Phi\circ\partial E)$ として，

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{\partial F}{\partial x}dxdy &= \int_{\partial D} Fdy \\ &= \int_{\Phi\circ\partial E} Fdy \\ &= \int_{\partial E} \Phi^*\omega & (\omega = Fdy\ \text{とした}) \\ &= \int_{\partial E} F(x(u,v),y(u,v))dy(u,v)\end{aligned}$$

ここで，

$$dy(u,v)=\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv$$

となるから，

$$\begin{aligned}\int_{\partial E} F(x(u,v),y(u,v))dy(u,v) &= \int_{\partial E}\left\{F(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}du + F(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial v}dv\right\} \\ &= \int_E \left\{\frac{\partial}{\partial u}F(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}F(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}\right\}dudv\end{aligned}$$

上の変形でグリーンの定理を使った．括弧の中を連鎖律を用いて計算しよう．

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial v}+F\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial y}{\partial u}-F\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v} &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial F}{\partial x} \\ &= f(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\end{aligned}$$

示すべき等式と違うのは，ヤコビアンに絶対値記号がついているかいないかという点であるが，実はヤコビアンは正である．なぜならば，一対一の仮定から，Φ は逆写像をもつ．つまり，ヤコビ行列は逆行列をもつので，正則であって，ヤコビアン (ヤコビ行列式) は E 上で 0 でない．もし，E 内のある点でヤコビアンの正負が入れ替わったとすると，中間値の定理より，かならずどこかで 0 になってしまうので，ヤコビアンは常に正であるか常に負であるかのどちらかである．先ほど導出した結果で $f(x,y)=1$(定数関数) とすると，

$$0<\iint_D dxdy=\iint_E \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv<0$$

となり，矛盾．よって，ヤコビアンは常に正である[*2]．すると，先ほどのヤコビアンに絶対値記号をつけてもよく，

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_E f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

となり，定理は示された．■

例題 $\star$　楕円

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a,b>0)$$

[*2] 境界の向きを変えないという仮定があるから，それよりヤコビアンが正であるといっても良いと思います．

で囲まれた部分の面積を変数変換の公式を用いて求めよ．ただし，円の面積は用いてもよい．

解答

$$E = \{(u,v) \mid u^2+v^2 \leq 1\},\ D = \left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1 \ \ (a,b>0)\right\}$$

とおく．今，$x(u,v)=au,\ y(u,v)=bv$ とすれば，ヤコビアンは ab．よって，

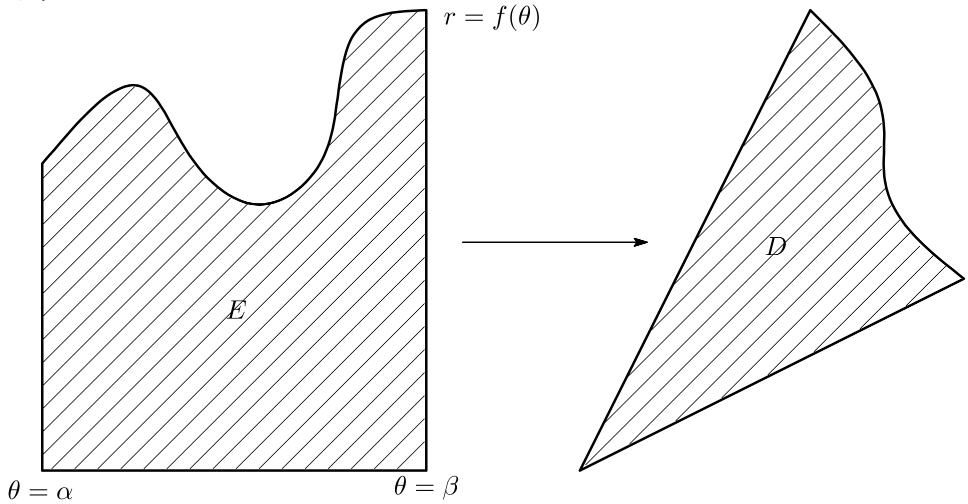
$$\iint_D dxdy = \iint_E abdudv = \pi ab$$

である．■

例題*　極座標表示された曲線 $r=f(\theta)\ \ (\alpha \leq \theta \leq \beta)$ と，原点を通る二つの直線 $\theta=\alpha$ 及び $\theta=\beta$ で囲まれた図形の面積 $S(D)$ は

$$S(D) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \{f(\theta)\}^2 d\theta$$

であることを示せ．



解答

$$E = \{(r,\theta) \mid 0 \leq r \leq f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta\},\ D = \{(x,y) \mid x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta\}$$

とおく．このとき，ヤコビアンは次のようになる．

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{pmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r$$

変数変換の公式から，

$$\begin{aligned} S(D) = \iint_D dxdy &= \iint_E rdrd\theta \\ &= \int_\alpha^\beta \left\{\int_0^{f(\theta)} rdr\right\} d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \{f(\theta)\}^2 d\theta \end{aligned}$$

よって，示された．■

例題*　上で導出した公式を用いて，次の曲線で囲まれた部分の面積を求めよ．

$$(x^2+y^2)^2 = x^2-y^2$$

解答　極座標表示 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を用いて，$r^4 = r^2\cos 2\theta$ を得る．$r = 0$ は考えない．つまり，$r^2 = \cos 2\theta$．$\cos 2\theta \geq 0$ でなければならないので，$0 \leq \theta \leq \pi/4, 3\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4, 7\pi/4 \leq \theta < 2\pi$．よって，

$$S(D) = 4\left\{\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta d\theta\right\} = 1$$

となる．ここで，cos の対称性を用いた．■

グリーンの定理を直接用いた計算問題をやりましょう．面積は三つの方法で得られます．つまり，

$$\iint_D dxdy = \int_{\partial D} xdy = -\int_{\partial D} ydx = \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx$$

の三つで計算できます．ここでは三番目の式を使ってみます．他の方法でもやってみてください．

例題 *　グリーンの定理を用いて，次の曲線で囲まれる部分の面積を求めよ．

$$x = \cos^3\theta,\ y = \sin^3\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

解答　グリーンの定理より，

$$S(D) = \iint_D dxdy = \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx$$

$$\begin{aligned} xdy &= (\cos^3\theta)(3\sin^2\theta(\cos\theta)d\theta) = 3\cos^4\theta\sin^2\theta d\theta \\ ydx &= (\sin^3\theta)(3\cos^2\theta(-\sin\theta)d\theta) = -3\cos^2\theta\sin^4\theta d\theta \end{aligned}$$

よって，$xdy - ydx = 3\cos^2\theta\sin^2\theta d\theta = \dfrac{3}{4}\sin^2 2\theta d\theta$ で，

$$\begin{aligned} S(D) &= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta d\theta \\ &= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4\theta}{2}d\theta \\ &= \frac{3}{16}\left[1 - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$

となる．■

とりあえずこんな感じの講義でした．重かったとは思いますが，とりあえずは例題 * をカバーしてください．なお，ミスもあるかもしれません．そのときはメールで教えてください．もう少し計算問題を入れようと思ったのですが，とりあえずこれで終了します．ひょっとしたら続編で計算問題をいくつか書くかもしれません．では，本番でがんばりましょう．

P.S.　ゴキブリが出ました．助けてください．洗面台の下の扉の奥でカサカサいってます．