数理科学1過去問解答

細野

平成22年7月18日

1 はじめに

こんにちは。今回はシケプリをつくる時間的、精神的余裕がなかったので、代わりに過去問の解答を作ることにしました。'05年と、'07年の問題については解答を、'09年の問題についてはヒントをのせてあります。これらの問題を一通り解けるようにしておけばまず単位はくると思われますので、がんばって解けるようにしておきましょう。
5年前の良さげなシケプリをあげておいたので、そちらもご参照ください。

2 傾向と対策

'07以前は全体的に、誘導が丁寧で、計算も大変ではない穏やかな出題がされています。それに比べ、'09では一気に難化した感があります。今年も難しい出題がされるかもしれませんので、しっかり対策しておきましょう。
さて、各分野の要点について述べたいと思います。まず、極値や最大値・最小値を求める問題は毎年出ているようです。**極値** の求め方や、**ラグランジュの未定乗数法** について確認しておきましょう。
陰関数定理、逆写像定理 についてもよく問われています。これは具体的に導関数が計算できることが重要となりますが、定理の成立条件についての問題もあるので、しっかり押さえておく必要があります。
重積分も重要な分野です。といっても **極座標変換** で解けるものが大半ですので、極座標変換さえできれば問題ないでしょう。$dxdy$ が $rdrd\theta$ になることには注意！
線積分 についての問題もちょくちょく出ています。グリーンの定理を使うと楽になる場合と、定義に沿って計算した方が楽な場合がありますので、どちらもこなせるようにしておくといいですね。面積分については出題されていませんが、出題される可能性は大いにありますので、対策するに越したことはありません。

3 2005年の問題

3.1 第一問

基本的な最大・最小値を求める問題です。最大値の候補は、「極値を取る点」か「定義域の境界上」であることに注意して調べていきましょう。
(解)　まず、D の境界 ∂D 上での値を考える。$x=0$ または $y=0$ または $x+y=1$ であるので、$f(x,y)=0$ となる。
次に、D の内部での $f(x,y)$ の値を考える。最大値の候補になるのは f の極値をとる点であり、極値を求めるには、

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

を解けば良い。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2(1-2x-y) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = xy(2-2x-3y) = 0$$

$x \neq 0, y \neq 0$ なので、これらを解くと $(x,y) = (1/4, 1/2)$ $f(1/4,1/2) = 1/64$ なので、∂D 上での値と比較して、求める最大値は $1/64$ (注：この点で極大となるかどうかは確かめていませんが、問題はありません。)

3.2　第二問

重積分の問題です。二問ともそれほど難しい計算は必要ありませんが、I_2 に関しては、45 度回転させてから考える必要があるうえ、その後も普通の極座標変換ではない変換を使うので面倒です。
(解)　(I_1 について) まず、$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおく。(「x^2+y^2」を見かけたら、大喜びでこの置換を行うべきです。) この変換のヤコビアンは r なので [1]、$dxdy = rdrd\theta$ となる。また、(r,θ) の範囲は $0 < r < 1$,$0 \leq \theta < 2\pi$ となる (この範囲を E とおく)。よって、

$$I_1 = \iint_E r\log r^2 drd\theta$$

θ で先に積分をします。

$$= 2\pi \int_0^1 r\log r^2 dr$$

(ここは厳密には広義積分ですから、$\int_{c_1}^{c_2}$ とおいて、あとで $c_1 \to 0$,$c_2 \to 1$ とやるのが正式ですが、気にしないことにします)
$r^2 = t$ とおいて、

$$= \pi \int_0^1 \log t dt$$
$$= \pi[t\log t - t]_0^1$$
$$= -\pi$$

$0\log 0$ が気持ち悪いという人は、上のように c_1 をおいて極限をとりましょう。
(I_2 について) まず 45 度回転させるために、$(x,y) = ((s-t)/\sqrt{2}, (s+t)/\sqrt{2})$ とおく。すると、$dxdy = dsdt$ で、$x+y \geq 0 \Leftrightarrow s \geq 0$ となるので、

$$I_2 = \iint_{s\geq 0} e^{-\frac{1}{2}s^2 - \frac{3}{2}t^2} dsdt$$

となる。ここで

$$\frac{s}{\sqrt{2}} = r\cos\theta$$
$$\sqrt{\frac{3}{2}}t = r\sin\theta$$

とおけば、

$$I_2 = \iint_{r\geq 0, -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2} \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-r^2} rdrd\theta$$
$$= ... = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

[1] 去年の数学 1B のシケプリ参照

3.3 第三問

「え、何回でも微分可能ってどういうこと？」と思われるかもしれません。基本的には、元の関数が何回でも微分可能であって、しかも f_y が 0 でなければ OK です。この 2 つを示してみましょう。後半については、ありがちな「陰関数の微分」の問題です。
(解) f が C^∞ 級であり、$f_y \neq 0$ であることを示せば良い。
まず、f の偏導関数は x, y の多項式 $P(x,y), Q(x,y)$ に対して

$$P(x,y) + Q(x,y)e^{xy}$$

と表せる (帰納法)。これは全て連続なので、f は C^∞ 級である。
つぎに、$f_y = 1 - x^2e^{xy}$ が 0 でないことを示せばよいが、δ を十分小さくとったので x, y は 0 に近い数。よってこれは成立する。次に、$\varphi'(0)$ を求めよう。

$$y - xe^{xy} + x^2 = 0$$

の両辺を x で微分して、

$$y' - e^{xy} + xye^{xy} + 2x = 0$$

よって、

$$y' = e^{xy} - xye^{xy} - 2x$$

$(x,y) = (0,0)$ を代入して、

$$y' = \varphi'(0) = 1$$

また、y' の式をもう一度 x で微分することにより、

$$y'' = ye^{xy} - ye^{xy} - xy'e^{xy} - xy^2e^{xy} + 2 = 0$$

これに $(x,y) = (0,0)$ を代入して、

$$y'' = \varphi''(0) = 2$$

3.4 第四問

ラグランジュの未定乗数法の問題です。小問が親切で、考慮しなければならない特殊な場合を排除してくれていますので、最後は素直に解いてしまって構いません。
(解)(1)$g_x(x,y) = 4x^3 + y, g_y(x,y) = 4y^3 + x$ となる。$g = g_x = g_y = 0$ が解を持たないことを示せば良い。

$$4x^3 + y = 0 \Leftrightarrow y = -4x^3$$

なので、

$$4y^3 + x = 4(-4x^3)^3 + x = x(1 + (2x)^4)(1 + (2x)^2)(1 + 2x)(1 - 2x)$$

となる。よって、$x = 0, 1/2, -1/2$ がわかるが、$y = -4x^3$ よりそれぞれ $y = 0, -1/2, 1/2$ であり、これらはどれも $g(x,y) = 0$ をみたさない。
(2)$x^4 + xy + y^4 = 1$ の左辺を上から評価することを考える。

$$x^4 + y^4 = 1 - xy \leq 1 + (x^2 + y^2)/2$$

より、

$$x^4 - x^2/2 + y^4 - y^2/2 \leq 1$$

$$(x^2-1/4)^2+(y^2-1/4)^2 \leq 9/8$$

よって、

$$|x^2-1/4| \leq \frac{3}{\sqrt{8}}, |y^2-1/4| \leq \frac{3}{\sqrt{8}},$$

これから有界性がいえた。
(3) (1)(2) の結果を考えると、ラグランジュの未定乗数法を用いて、i3 変数関数

$$F(x,y,\lambda)=xy-\lambda(x^4+xy+y^4-1)$$

の極値を考えれば十分である。ということで、

$$F_x=y-\lambda(4x^3+y)=0$$

$$F_y=x-\lambda(4y^3+x)=0$$

$$-F_\lambda=x^4+xy+y^4-1=0$$

の三式を連立して解けばよい。$F_x=0$ より $4\lambda x^3=y(1-\lambda)$、$F_y=0$ より $4\lambda y^3=x(1-\lambda)$ なので、

$$4\lambda(1-\lambda)x^4=4\lambda(1-\lambda)y^4$$

が得られる。[2] つまり、$\lambda=0,1 \mathrm{or} x=\pm y$ 。
(i)$\lambda=0,1$ のとき、x=y=0 となり不適。
(ii)x=y のとき、$2x^4+x^2-1=0 \Leftrightarrow (2x^2-1)(x^2+1)=0$ なので、$x=y=\pm 1/\sqrt{2}$。このとき、$f(x,y)=1/2$ となる。
(iii)x=-y のとき、$2x^4-x^2-1=0 \Leftrightarrow (2x^2+1)(x^2-1)=0$ なので、$x=\pm 1$,$y=\mp 1$。このとき、$f(x,y)=-1$ となる。
以上から、$f(x,y)$ の最大値は 1/2, 最小値は -1。

4 2007 年の問題

4.1 第一問

'05 の第一問と同じく、基本的な最大・最小値の問題です。(a) で極値を求めているので、(b) では境界上での値の範囲を考えれば十分です。ラグランジュの未定乗数法を利用しましょう。
(解)(a) 極値の候補は、$f_x=f_y=0$ より、

$$f_x=4x+y+2=0$$

$$f_y=x+2y-3=0$$

これを解いて、$(x,y)=(-1,2)$ となる。このとき、$f(-1,2)=-4$。
この点におけるヘッセ行列の行列式を調べて、$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}f_{yx}=7>0$ なので極小。
(b) 最大・最小値の候補は、(a) の点と D の境界上である (D は有界なので)。よって $2x^2+xy+y^2=16$ を満たすときの $f(x,y)$ の最大・最小を考えれば良い。この条件の下で、$f(x,y)=16+2x-3y$ と表せる。

$$F(x,y,\lambda)=16+2x-3y-\lambda(2x^2+xy+y^2-16)$$

とおいて、$F_x=F_y=F_\lambda=0$ を解けばよい。

$$F_x=2-\lambda(4x+y)=0$$

[2] 左辺は (F_x から得た式の左辺) と (F_y から得た式の右辺) の積。右辺は (F_y から得た式の左辺) と (F_x から得た式の右辺) の積。

$$F_y = -3 - \lambda(x+2y) = 0$$
$$-F_\lambda = 2x^2 + xy + y^2 - 16 = 0$$
$2F_x - F_y = 7 - 7\lambda x = 0$ より、$x = 1/\lambda$。よって、$y = -2/\lambda$。これを F_λ の式に代入すると、
$$\frac{4}{\lambda^2} = 16$$
よって、$\lambda = \pm 1/2$ となる。このとき、$(x, y) = (2, -4), (-2, 4)$。それぞれのときに f(x,y) を求めると、$f(2, -4) = 32, f(-2, 4) = 0$ である。
(a) の値と比較することにより、最大値は 32、最小値は-4 とわかる。

4.2 第二問

一般の関数についての陰関数の微分の問題です。多変数関数の微分に慣れていないとうまく解けないかもしれません。この機会に連鎖律も見直しておきましょう。
(解)$f(x(u), y(u))$ に対し、
$$\frac{df}{du} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{du}$$
となることに注意する。$f(x, \varphi(x)) = 0$ の両辺を x で微分して、
$$f_x + f_y \varphi' = 0$$
この式の両辺を再度 x で微分して、
$$f_{xx} + f_{xy}\varphi' + f_{yx}\varphi' + f_{yy}(\varphi')^2 + f_y \varphi'' = 0$$
$\varphi' = -f_x/f_y$ を代入して、
$$f_{xx} - \frac{f_{xy} f_x}{f_y} - \frac{f_{yx} f_x}{f_y} + \frac{f_{yy} f_x^2}{f_y^2} + f_y \varphi'' = 0$$
$f_{xy} = f_{yx}$ に注意すると、
$$\frac{f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}{f_y^2} + f_y \varphi'' = 0$$
$$\varphi'' = \frac{-f_{xx} f_y^2 + 2 f_{xy} f_x f_y - f_{yy} f_x^2}{f_y^3}$$

4.3 第三問

(a) 多変数関数の連続性、微分可能性についての問題です。定義を忘れてしまっている方も、ぜひ確認しておいてください。(b) いかにも極座標変換で解いてください、という趣きの問題ですね。その通りにやってみます。
(解)(a)(連続性について)$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ とおく。$r = 0$ の付近での連続性を考えれば良い。
$$f(x, y) = \frac{r^2}{r^{2\lambda}} = r^{2(1-\lambda)}$$
なので、$1 - \lambda$ が正のとき、すなわち $\lambda < 1$ のとき f は原点で連続。それ以外のとき、すなわち $\lambda \geq 1$ のとき f は原点で不連続。
(微分可能性について)f が微分可能であることと、f の偏導関数が存在して全て連続であることは同値である。f は x, y について対称なので、f_x が原点で連続である条件を考えれば良い。まず、原点で偏導関数が存在するためには、
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^{2\lambda+1}}$$
$$= \lim_{x\to 0} x^{1-\lambda}$$

が存在する必要がある。つまり、$1-\lambda \geq 0$。
つぎに、原点以外での偏導関数は、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(x^2+y^2)^\lambda - \lambda(x^2+y^2)^\lambda 2x}{(x^2+y^2)^{2\lambda}}$$
$$= \frac{2x(1-\lambda)(x^2+y^2)^\lambda}{(x^2+y^2)^{2\lambda}}$$

これの原点での連続性を考えれば良い。さきの置換を行うと、

$$= \frac{2r\cos\theta(1-\lambda)r^{2\lambda}}{r^{4\lambda}}$$
$$= 2\cos\theta(1-\lambda)r^{1-2\lambda}$$

$\lambda = 1/2$ のとき、これは $\cos\theta$ と等しくなり、原点で連続ではない。(近づくときの偏角によって値が一定しないため)
よって、偏導関数が原点で連続であるための条件は、$\lambda < 1/2$ となる。このとき、原点で偏導関数が存在する。すなわち、$\lambda < 1/2$ のとき原点で全微分可能、$\lambda \geq 1/2$ のとき全微分不可能。
(b)(a) と同様の置換により、

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$
$$= \iint_{0<r\leq 1, -\pi/4\leq\theta\leq 3\pi/4} r^{2-2\lambda} r dr d\theta$$
$$= \pi \int_0^1 r^{3-2\lambda} dr$$
$$= \pi \left[\frac{r^{4-2\lambda}}{4-2\lambda}\right]_0^1$$
$$= \frac{\pi}{4-2\lambda}$$

4.4 第四問

線積分の問題です。(a) を見ると、グリーンの公式を使ってほしそうな誘導がついています。それを利用してみましょう。
(解)(a)

$$f_y = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$g_x = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

(b) グリーンの公式を使う。C で囲まれた部分は、楕円の内部である。

$$\int_C (f(x,y)dx + g(x,ydy)) = \iint_D (-f_y + g_x) dxdy = 0$$

5 2009年の問題のヒント

ここは解答を作る時間がなかったので、ヒントだけで勘弁してください。教えろと言われたら教えます。なんか 2009 年の問題は全体的に難し目なのが不安ですねぇ。よろしくありませんね。

5.1 第一問

(a) これは基本的な極値の問題ですね。'05,'07 にあるものと同様に解けます。
(b) こちらもありがちなラグランジュの未定乗数法の問題です。手順を確認しておきましょう。

5.2 第二問

逆写像定理の問題です。ノートや教科書を見返して、条件などを確認しておくと良いと思います。
(a) 次の行列が逆行列をもてば良いことになります。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

(b) 上の行列の逆行列は、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$

と一致するみたいです。

5.3 第三問

これは普通の重積分で、二問とも極座標変換で解けます。(a) は$\sqrt{\cos\theta}$ が出てきて驚くかもしれませんが、先に r について積分をするとルートが消えます。

5.4 第四問

線積分の問題です。私は最初グリーンの定理を使って解いたのですが、実は線積分の定義に従って解くと簡単です。

6 おわりに

片岡清臣先生が、2007 年度にめでたく数学科に進学された学生に向けて書かれた文章を掲載して、結びの挨拶とさせていただきます。みなさまの今後の進路に幸あれ。

数学科進学予定の皆さんへ 片岡 清臣 (理学部数学科長)[3]
(前略)2 年 3 年は以上のように将来の数理科学の知識の基礎を整えるための重要な科目を勉強する時期でありますが, 他方, 受験・進学振り分けから解放され大学院進学・就職までのほっとできる時期でもあります. やる気まんまんでない学生にとって特にこの時期は **ドロップアウト** したり講義に興味を持てず **精神不安定** になり **不登校** してしまう可能性が大きい時期でもあります. もしそのようになりそうだったら先延ばしにせず是非早い段階で **数学科長** や **知り合いの親しい教員・先輩**, または **全学の学生相談室** などに気軽にご相談ください. よい解決策を

[3] 当時。強調はすべて筆者による

早めにみつけ出したいと思います. 以上, 進学された学生 **すべて** が **無事標準期限内に数学科を卒業される** ことを願い, 祝辞を締めくくりたいと思います.

'07[3]後半の訂正版

y - xe^(xy) + x^2 = 0

の両辺を x で微分して、
y' - e^(xy) - x(y+xy')e^(xy) + 2x = 0 (☆)

(x,y)=(0,0)を代入して、
y' - 1 - 0 + 0 = 0
よって、y' = 1

そんでもって、(☆)を再度 x で微分して、
y'' - (y+xy')e^(xy) - (y+xy')e^(xy) - x(2y'+xy'')e^(xy) -x(y+xy')^2*e^(xy) + 2 = 0

(x,y,y')=(0,0,1)を代入して、
y'' - 0 - 0 - 0 - 0 + 2 = 0
だから、y'' = -2

あんまりあってる自信がないですが勘弁してください。