

数1A シケプリ

細野

平成 22 年 2 月 10 日

1 はじめに

ずっとほっぽらかしてすみませんでした。要点をかいつまんだ感じのプリントになっています。証明には全く触れていませんので、そこは各自補完したりしなかつたりしてください。

問題もつけていますが、もっと演習したい人は、清野先生¹の数 1A 演習のプリントをガシガシといた方が良いです。というか、これを読むより清野プリントを読んだ方が理解が進むんじゃないか、という話もあります。まあいいや。問題の答えは明日までにあげます。

2 原始関数の求め方

2.1 基本事項

まずはおさらいから。 $f(x)$ の原始関数とは、 $F'(x) = f(x)$ となるような関数 $F(x)$ のことを指します。 $F(x)$ を $\int f(x)dx$ と表したりもします。簡単な関数の原始関数をおさらいしておきましょう。積分定数は省略します。

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} \quad (a \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log x$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$$

¹<http://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/haya09.html>

また、部分積分はこんな式でした。積の微分法から導けます。

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

2.2 有理関数のとき

$f(x), g(x)$ を (実数係数) 多項式とします。

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

の原始関数を求めるために、まず $g(x)$ を二次以下の式の積に分解します。そして、部分分数分解を行って、

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \frac{(Bx+c)^n}{(x-p)^2+q^2}$$

の形の式の和にします。前者の積分はおなじみでしょう。後者は部分積分とか \log とか Arctan を使うと求まります。

問 1

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+c}{x^2-x+1}$$

となる定数 A,B,C を求め、次の不定積分

$$\int \frac{1}{1+x^3}dx$$

を求めよ。

問 2 次の不定積分を求めよ。

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}dx$$

2.3 無理関数のとき

数パターンあります。

2.3.1 その 1

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

を含むときは、

$$\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$$

で置換します。

2.3.2 その2

$\sqrt{ax^2 + bx + c}$ を含むときは、

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{a}x \quad (a > 0)$$

$$\sqrt{\frac{\beta - x}{x - \alpha}} = t \quad (a < 0)$$

とします。

2.3.3 その3 (二項積分)

$$\int x^\alpha (ax^\beta + b)^\gamma dx$$

の求め方です。暗記してください。 α, β, γ は有理数とします。

1. γ が整数なら、そのまま展開すればできます。
2. $(\alpha + 1)/\beta$ が整数なら、 $ax^\beta + b = t^n$ とおきます。n は γ の分母です。
3. $(\alpha + 1)/\beta + \gamma$ が整数なら、 $a + bx^{-\beta} = t^n$ とおきます。ここでも n は γ の分母です。

問3 次の不定積分を求めよ。

注：これは超々めんどくさいです。飛ばした方が良いでしょう。Mathematica によると、答えは $(\sqrt{1+x^2}(x+2x^3) - \text{Arcsinh}(x))/8$ とのことです。

$$\int x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx$$

2.4 三角関数のとき

$\tan(x/2) = t$ とおけばすべて解決です。

問4 次の不定積分を求めよ。

$$\int \frac{\sin x + 1}{\cos x + 1} dx$$

3 リーマン積分

3.1 定義

リーマン積分というのは、いわゆる区分求積法のように、関数のグラフを短冊切りにして、積分の値を長方形の面積の和として近似しようっていうやつです。ちゃんとかくとめんどくさいです。以下数行は、最悪無視して構い

ません。

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ と $a = x_0 \leq t_1 \leq x_1 \leq t_2 \leq x_2 \leq t_3 \leq x_3 \leq t_4 \leq x_4 \leq \dots \leq t_n \leq x_n$ なる $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ (異なる点)、 $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_n\}$ に対するリーマン和は、 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ として、

$$R(f, P, T) = \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta x_i$$

で与えられます。

リーマン積分は、これで $\text{mesh}P = \max(\Delta x_i)$ を 0 に近づけたときの極限として定義されます²。 $f(t_i)$ が短冊の縦の長さ、 Δx_i が短冊の横の長さで、 $f(t_i)\Delta x_i$ は短冊の面積です。 Δx_i が 0 に近づくということは、どんどん切り方が細くなる、ということを意味します。

問5 (1) $f(x) = x, P = \{0, 1/n, 2/n, 3/n, \dots, 1\}, T = \{1/2n, 3/2n, \dots, (2n-1)/2n\}$ に対するリーマン和 $R(f, P, T)$ を求めよ。
(2) $f(x) = 0 (0 \leq x \leq 1), 1 (1 < x \leq 2)$ とする。このとき、 $f(x)$ の $[0, 2]$ におけるリーマン積分の値を求めよ。

3.2 性質

3.2.1 リーマン＝ルベークの定理

これは一番重要です。

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ に対し、 f はリーマン積分可能 $\iff f$ は有界で、 f の不連続点の集合 $D(f)$ はゼロ集合

有界とは、 f に上限と下限が存在するということです。ゼロ集合というのは説明が難しいのですが、その集合を覆うような可算個の開区間 $(a_i, b_i), i = 1, 2, 3, \dots$ が存在して、開区間の長さの和がいくらでも小さくなる、ということです。要は、「長さがおおよそ 0」ということになります。

問6 0 以上 1 以下の有理数の集合は、ゼロ集合であることを示せ。(Hint: 有理数と自然数は 1 対 1 対応する。有理数 r_i を含む区間の長さを 2^{-i} に比例するようにとると …?)

3.2.2 微積分学の基本定理

おなじみですね？

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

²mesh とやらは林先生の用語らしいんですが。いったい何がおこっているんだ。

というやつです。

ほかにも、合成関数の積分、部分積分なんかも成り立っています。

3.3 広義積分

$(-\infty, \infty)$ で積分するとか、 $f(x)$ が有界じゃない (無限に旅立つような) 範囲で積分したいときに使います。なんか偉そうにしていますが、極限をとってだけです。例えば、

$$\int_0^{\infty} f dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c f dx$$
$$f(0) \text{ が定義されていないとき、} \int_0^a f dx = \lim_{c \rightarrow +0} \int_c^a f dx$$

問 7

(1) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ を求めよ。

(2) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ を求めよ。

4 重積分

1B のシケブリも参照してくださいね。

4.1 定義

$\int f(x) dx$ は、微小な長方形の (符号付きの) 面積 $f(x) dx$ の和を表していました³。ここで、 f が多変数関数になったものが重積分です。

曲面 $z = f(x, y)$ と xy 平面の間にある部分の体積を、 x 方向の長さが dx , y 方向の長さが dy , z 方向の長さが $f(x, y)$ の微小な直方体で近似して求めよう、というのが重積分の趣旨です。

すなわち、 (x, y) が動く領域上において、 $f(x, y) dx dy$ を足し合わせたものが体積となります。このことを表したのが、次の式です。

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

\int が二重になってるのは、 x と y の 2 文字についての積分だということを表しています。 D は、 (x, y) の動く領域のことです。

さて、具体的にどう計算するかというと、高校で扱った求積と全く同じ手順を踏みます。高校では、体積を求めるときは、どこかの面と平行に切って、切

³実際には極限をとるわけが、余り細かいことはきにしないように

り口の面積を積分していたと思います。すなわち、先に x で切って積分して、その結果を y で積分すればよいのです (逆となる場合もあります)⁴。

ひとつ例を挙げてやってみます。

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2}{y} dx dy \quad (D = [0, 1] \times [1, 2]) \\ &= \int_0^1 \left(\int_1^2 \frac{x^2}{y} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 [x^2 \log y]_1^2 dx \\ &= \int_0^1 x^2 \log 2 dx = \frac{\log 2}{3} \end{aligned}$$

という感じです。2 行目で、「先に $x = k$ (定数) で切って、 y について積分して、その結果を x について積分する」ということを行っています。

問 8 次の重積分を求めよ。

$$\iint_D x^3 \cos y dx dy \quad (D = [0, 1] \times [\pi, 2\pi])$$

D が四角形なら簡単になりますが、そうでない場合はすこし複雑になります。

$$D = (x, y) | x^2 + y^2 < 1$$

のときを考えてみましょう。まず、 x は -1 から 1 までを動きます。この範囲で x を一つ固定すると、その x に対して、 y は $-\sqrt{1-x^2}$ から $\sqrt{1-x^2}$ までを動きます。つまり、 D 上の積分は次のようになります。

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$$

x, y がどこを動くのかを、この形であらわせるようにしておくの良いと思います。

問 9 つぎの積分で表されている領域を、 xy 平面上に図示せよ。また、 x と y の順序を入れ替えよ。

$$\int_1^3 \left(\int_{\sqrt{x}}^{x^2} f(x, y) dy \right) dx$$

数 1A 演習第 11 回の問題を解いておくの良いと思います。

⁴定義は直方体の和なのに、切り口の積分で良いの？と思ったあなたは鋭いです。それを保証するのがフビニの定理です。申し訳ないのですが、詳細は略させていただきます。もしくは 1B のスケブリを読みましょう。

4.2 変数変換

まず、一変数の積分のときの次の式を思い出してみましょう。

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

これは、 $x = g(t)$ において変数を変換した式です。同じことが多変数でも成立します。

$$\iint f(x, y)dx dy = \iint f(g(s, t), h(s, t))J ds dt$$

これは、 $x = g(s, t), y = h(s, t)$ において変数を変換した式になっています。 J というのはヤコビアンと呼ばれるもので、偏微分を並べた行列の行列式です⁵。

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

問 10 次の変数変換のヤコビアンを求めよ。

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

さて、変数変換において気をつけることは3つです。

- (1) 積分区間はどうか？
 - (2) 被積分関数はどうか？
 - (3) ヤコビアン ($dx = (dx/dt)dt$ の dx/dt に相当しています) は何か？
- これを気をつければ問題ないと思います。これも清野先生のプリントをたくさん解いておきましょう。

問 11 次の重積分を、問 9 の変数変換を用いて求めよ。

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$$

ただし、 $D = \{(x, y) | 1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2\}$

5 級数

数列の無限和が収束するかしないかを判定しよう、というのが目的です。大事なことは、 $\sum r^n$ は $r < 1$ なら収束、 $r > 1$ なら発散、ということです。

5.1 収束判定法

まあいろいろあるわけですが、よく使いそうなやつだけを。

⁵ どうでもいいんですが、TeX でヤコビ行列をかくのはクソ大変です。やってらんないです。

5.1.1 Ratio Test(ダランベールの判定法)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \alpha$$

が存在するとき、

$\alpha < 1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束。

$\alpha > 1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散。

「比がだいたい一定」「だいたい等比数列とみなせる」ということですね。

「絶対収束」というのは、 $|a_n|$ の和が収束しているということです。

また、 $\alpha = 1$ のときはなにも情報が得られないことに注意してください。(ほかの判定法についても同様です。)

問 12 $\sum_{n=1}^{\infty} (2^n + 1)/4^n$ の収束・発散を判定せよ。

5.1.2 Root Test(コーシーの判定法)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$$

が存在するとき、

$\alpha < 1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は絶対収束。

$\alpha > 1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散。

こちらは、「 n 項目の n 乗根がだいたい一定」「だいたい等比数列とみなせる」ということです。 \lim がない場合は、 \lim を \limsup として考えてみてください。

「絶対収束」というのは、 $|a_n|$ の和が収束しているということです。

問 13 $\sum_{n=1}^{\infty} (1/2 + 1/n)^n$ の収束・発散を判定せよ。

5.1.3 積分と比べる

グラフを描くと、 $1/n$ の和は $1/x$ の積分より大きくて、云々ってやつです。

5.1.4 その他

林先生は逆数和が好きらしいので、押さえておくと良いと思われます。

$$\begin{aligned} \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots &= \infty (p \leq 1) \\ \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots &= (\text{有限値}) (p > 1) \end{aligned}$$

とくに、次の式が成立する (「国民の常識」)。

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty$$

5.2 ベキ級数

つぎに、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ の形の級数を考えてみます。 x があるので複雑に思われるかもしれませんが、 $a_n x^n = b_n$ とおくと、

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

の収束を考えれば良いことになります。そして、Root Test より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} (= \sqrt[n]{|a_n|} |x|) = \alpha$$

が存在するとき、

$\alpha < 1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は絶対収束し、 $\alpha > 1$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は発散します。

$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} |x|$ ですから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r$ とおくと、 $|rx| < 1$ なら収束、 $|rx| > 1$ なら発散、とわかります。言い換えると、 $|x| < 1/r$ なら収束、 $|x| > 1/r$ なら発散します。つまり、原点と x の距離が $1/r$ より大きい小さいかで収束、発散が決まるということです。この $1/r$ のことを、収束半径と呼んでいます。

$r = 0$ の時は、つねに $\alpha = 0 < 1$ なので、収束半径は無限大です。

いま Root Test を使いましたが、Ratio Test を使って考えても全く同じです。考えやすい方を使いましょう。

問 14 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n / n!$ の収束半径が ∞ であることを確認せよ。Ratio Test を使うと良い。

5.3 関数列の収束

5.3.1 各点収束

関数の列 $f_1(x), f_2(x), \dots$ があるとします。全ての x に対し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ が存在するとき、 $f_n(x)$ は $f(x)$ に各点収束する、と言います。

問 15 次の関数が、ある関数に各点収束することを確認、収束先の関数を求めよ。

$$f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$$

5.3.2 一様収束

$f_1(x), f_2(x), \dots$ が $f(x)$ に各点収束しており、しかも $\max |f_n(x) - f(x)|$ が $n \rightarrow \infty$ で 0 に収束するとき、 $f_n(x)$ は $f(x)$ に一様収束する、と言います。一様収束のうれしいところは、連続性が保たれたり (f_n が連続なら f も連続)、積分と極限が交換可能になるということです。

問 16 問 15 の関数が一様収束ではないことを確認せよ。

問 17 次の関数が一様収束することを確認、収束先の関数を求めよ。また、導関数の収束も考えよ。

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + 1/n}$$

これで終わりです。お疲れさまでした。 $\epsilon - \delta$ を一回も使わずに数 1A のシケプリを書き上げるという奇跡。ちゃんとやりたい方は各自挑戦してみてくださいね。