2009 年度夏学期　力学 A(下村裕)　期末試験

第 1 問

2 次元極座標(r,θ)の基本(単位)ベクトル$\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta}$を用いて,速度$\vec{v}$,加速度$\vec{a}$を

$$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\frac{d\vec{r}}{dt}=v_r\overrightarrow{e_r}+v_\theta\overrightarrow{e_\theta}\ ,\ \ \vec{a}=\ddot{\vec{r}}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=a_r\overrightarrow{e_r}+a_\theta\overrightarrow{e_\theta}$$

と書いたときの(1) v_r, (2) v_θ, (3) a_r, (4) a_θをr,θによって表現せよ.さらに,(5)「1 つの質点が原点から中心力の作用を受けて運動するとき,力の中心のまわりの面積速度は一定である.」ことを示せ.

(解答)

2 次元直交座標(x,y)に対し

$$x=r\cos\theta\ \ ,y=r\sin\theta$$

が成り立つ.このとき速度のx,y成分v_x,v_yは

$$v_x=\frac{dx}{dt}=\dot{r}\cos\theta-r\dot{\theta}\sin\theta,$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=\dot{r}\sin\theta+r\dot{\theta}\cos\theta$$

である.よって座標系をθだけ回転して,

$$\begin{pmatrix}v_r\\v_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_x\\v_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{r}\\r\dot{\theta}\end{pmatrix}.$$

同様に,加速度のx,y成分a_x,a_yは

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\ddot{r}\cos\theta-2\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta-r\ddot{\theta}\sin\theta-r\dot{\theta}^2\cos\theta,$$

$$a_y=\frac{dv_y}{dt}=\ddot{r}\sin\theta+2\dot{r}\dot{\theta}\cos\theta+r\ddot{\theta}\cos\theta-r\dot{\theta}^2\sin\theta$$

であるから

$$\begin{pmatrix}a_r\\a_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ddot{r}-r\dot{\theta}^2\\2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}\end{pmatrix}.$$

以上より(1) $v_r=\dot{r}$, (2) $v_\theta=r\dot{\theta}$, (3) $a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2$, (4) $a_\theta=2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}$.

次に(5)を示す.質点の原点のまわりの面積速度は

$$A=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$$

で与えられる.質点が受ける力は原点からの中心力のみであるから,θ方向の運動方程式は

$$0=2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}.$$

両辺にrを掛けて

$$0 = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) = \frac{d}{dt}(2A)$$

$$\therefore \frac{dA}{dt} = 0.$$

よって面積速度の時間変化はなく,一定である.

第 2 問

平面内で運動する質点に働く力$\vec{f}$の直角座標系成分が$f_x = a\sin x\cos y$,$f_y = a\cos x\sin y$ (aは定数)で与えられるとき,

(1)$\vec{f}$が保存力であることを示せ. (2) $\vec{f}$のポテンシャルを求めよ. (3)原点からx軸上の点 A$(\pi, 0)$まで質点がゆっくり動く場合の,$\vec{f}$のする仕事を求めよ.

注) (1)では,「ポテンシャルを具体的に求める」以外の方法を用いよ.

(解答)

(1)

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(a\sin x\cos y) = -a\sin x\sin y\ ,\frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(a\cos x\sin y) = -a\sin x\sin y$$

$$\therefore \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}.$$

よって$\vec{f}$は保存力である.

(2) $U = a\cos x\cos y$とおくと

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = a\sin x\cos y = f_x\ ,-\frac{\partial U}{\partial y} = a\cos x\sin y = f_y.$$

よって$\vec{f}$のポテンシャルは$a\cos x\cos y$.

(3) 求める仕事をWとすると

$$W = \int_{\mathrm{OA}} \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathrm{OA}} \left(f_x dx + f_y dy\right) = \int_0^{\pi} a\sin x\, dx = a[-\cos x]_0^{\pi} = 2a.$$

第 3 問

地球の中心を通り,まっすぐ通り抜ける穴を掘ったと仮定する.地球の密度を一様であるとすれば,この穴の中へ落した質点は単振動することを示せ.

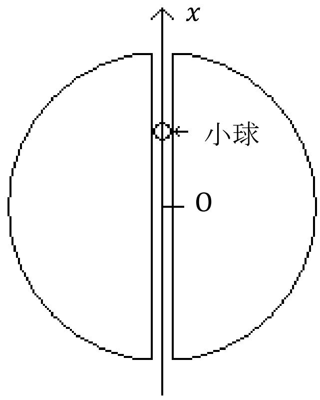
(解答)

図のように,穴に沿って軸を定め,地球の中心を原点とする.小球の質量をm,地球の密度をρ,

万有引力定数をGとする.小球が位置xにあるとき,運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-G\frac{m\left(\rho\cdot\frac{4}{3}\pi x^3\right)}{x^2}=-\left(\frac{4}{3}\pi\rho mG\right)x.$$

これは単振動の方程式に他ならないから,小球の運動は単振動である.



第 4 問

コマの歳差運動の各速度Ωを,コマの質量M,コマの軸の支点(下端)から重心までの距離l,コマの慣性モーメントI,軸のまわりの回転の各速度ω,重力加速度gを用いて表せ.ただし,コマの軸の支点は机上にあってすべることがないとする.また,ωが十分大きいのでコマの自転の角運動量に対して歳差の角運動量は無視できるとする.

(解答)

コマの自転の角運動量を$\vec{L}$,重力によるモーメントを$\vec{N}$,コマの軸と歳差運動の軸とのなす角をθとする.このとき

$$d\vec{L}=\vec{N}dt$$

であり,さらに

$$\left|d\vec{L}\right|=\left(\left|\vec{L}\right|\sin\theta\right)\Omega dt$$

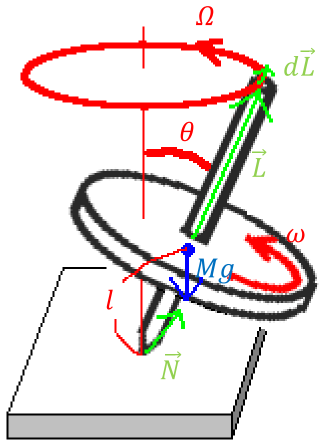
が成り立つ.ここで

$$\left|\vec{N}\right|=Mgl\sin\theta$$

であるから,

$$Mgl\sin\theta\,dt=\left(\left|\vec{L}\right|\sin\theta\right)\Omega dt$$

$$\therefore\Omega=\frac{Mgl}{\left|\vec{L}\right|}=\frac{Mgl}{I\omega}.$$



第 5 問

水平面内で一端Oのまわりに一定の各速度ωで回転するなめらかな菅の中に質量mの質点がある.時刻tにおいて,菅がこの質点に及ぼす力を求めよ.ただし,Oから質点までの距離をrと書くと,$t=0$で$r=a, dr/dt=0$とする.

(解答)

菅が質点に及ぼす力をSとすると,小球の運動方程式は

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\omega^2) = 0, \\ m(2\dot{r}\omega) = S. \end{cases}$$

第 1 式より

$$\ddot{r} = r\omega^2.$$

初期条件を考慮して

$$r = a\cosh\omega t.$$

従って,第 2 式より

$$S = 2m\omega(a\omega\sinh\omega t) = 2ma\omega^2\sinh\omega t.$$

～あとがき～

「試験ではこのくらい書けば十分」と思われる程度のことを書いたつもりです.論理的飛躍・不整合や厳密性に欠ける記述があれば髙橋までお知らせください m(_ _)m

…どうでもいいけど,第 5 問に「菅」と書いてあったのは「管」の間違いだと思います.

2009 年 10 月 10 日　　髙橋　一史