数 IB(植松) 2006 年夏学期解答(兼ノート)

(2007 年のは課題プリでやってしまったので・・・)

$\boxed{1}$

(a) 補完公式を使う問題です。

補完公式とは、n+1 個の点を通る n 次の多項式を求める公式のことです。

<u>例　n=3</u>

x	0	1	2	3
y	y_0	y_1	y_2	y_3

このデータを補完して得られる多項式を $y=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ と置きます。

データより、

$$\begin{cases} y_0 = D \\ y_1 = A+B+C+D \\ y_2 = 8A+4B+2C+D \\ y_3 = 27A+9B+3C+D \end{cases}$$

ですが、これらの階差をとると

$$\begin{cases} \Delta y_0 = y_1 - y_0 = A+B+C \\ \Delta y_1 = y_2 - y_1 = 7A+3B+C \\ \Delta y_2 = y_3 - y_2 = 19A+5B+C \end{cases}$$

さらに階差をとると、

$$\begin{cases} \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = 6A+2B \\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 12A+2B \end{cases}$$

であり、また

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_1 = 6A$$

より、ここで A~D が求まるわけです。

で、一般には

$x=0,1,\cdots,n$ での値が $y=y_0,y_1,\cdots,y_n$ のとき

$$y = y_0 + x\Delta y_0 + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_0 + \cdots + \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}\Delta^n y_0$$

で求まることが導かれるので、x の値が等間隔であるときにはうまく拡大縮小や平行移動をすることによって y を求めることができます。

今回は、x=k+1 とすることによって k=0,1,2 となり、補完公式をつかうことができます。
$y_0 = 2\,, \Delta y_0 = 6\,, \Delta^2 y_0 = 4$ より、

$$y = 2 + 6k + 4\frac{k(k-1)}{1\cdot 2} = 2 + 6(x+1) + 2(x-1)(x-2) = 2x^2$$

よって、レベル n の電子核に存在できる電子の個数は **$2n^2$ 個**

(b) $(5+i)^4$ を頑張って求めて 2(1+i)で割り、有理化すると$(5+i)^4$=2(1+i)×**(239+i)**
ここまではとりましょう。

で、次の式にどうやってつながっているかというと、複素数平面の考え方が出てきます。
極座標表示された複素数をかけるとき、絶対値同士をかけて偏角同士を足すことで計算できますが、今回は左辺と右辺で偏角を比べれば OK です。

$(5+i)$の偏角は$\arctan\frac{1}{5}$なので$(5+i)^4$の偏角は$4\arctan\frac{1}{5}$

また$(1+i)$の偏角は$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, $(239+i)$の偏角は$\arctan\frac{1}{239}$なので、

$$\mathbf{4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}}$$

で、arctan は幾何的な関係を用いることでベキ級数展開できます。結果は Taylor 展開と同じです。

$$\mathbf{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots}$$

(c) n 次導関数のお話。こんなのやったっけ…。
$y^{(n)} = A_n e^{ax}\sin bx + B_n e^{ax}\cos bx$ とおく。
$A_0=1$, $B_0=0$ なので、

$$\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ これを利用して実際に求めることで、

$$\begin{cases} A_n = a^n - \dfrac{n(n-1)}{2\cdot 1}a^{n-2}b^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}a^{n-4}b^4 - \cdots \\ B_n = na^{n-1}b - \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2\cdot 1}a^{n-3}b^3 + \cdots \end{cases}$$

*こんなもんで合ってるのか不明…。ちゃんと解けたら教えてください。

(d) ある有理数αについて、

$$\alpha = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

と表したとき、右辺を正則(分子がすべて 1 ということ)連分数と言い、

$q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$ は$q_0 + \frac{1}{q_1 +}\frac{1}{q_2 +}\cdots$や$[q_0; q_1, q_2 \cdots]$等と表すこともあります。

有理数は有限正則連分数に直せるし、有限正則連分数は有理数なので、今回のような無理数は無限正則連分数となります。

ということで、

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{4}{2(1+\sqrt{5})} = 1 + \frac{1}{\alpha} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\alpha}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\alpha}}} = \cdots$$

より、**[1;1,1,1,⋯]**となります。

$\boxed{2}$

(1) 面積を S とおくと、

$$S = \frac{1}{2}t(1-\log t)^2, S' = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\log t)^2$$

より、増減表は以下。

t	0	⋯	1/e	⋯	e
S’		+	0	―	0
S					0

S は$\mathbf{t = \frac{1}{e}}$のとき最大で、最大値は$\mathbf{\frac{2}{e}}$

(2) 包絡線とは、直線が動くとき、その直線群が存在できる範囲の境界線の曲線のことです。ほとんどの場合、ある x のときの y の最大値を求めて、x の関数として表せば OK です。

直線 AB の式は、$y = -\frac{x}{t} + 1 - \log t$ で表わされる。

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{x}{t^2}-\frac{1}{t}=\frac{x-t}{t^2}$$

より、ある x をとると t=x のときに y は最大。

(増減を調べると、$0\leq t(1-\log t)\leq 1$ より、$t=x$ とおいても $0<t\leq e$を満たす。)

で、包絡線は$\mathbf{y=-\log x\ (0<x\leq 1)}$

$\boxed{3}$

(a) 計算が煩雑ですが、きちんと直線の式を立てて連立すれば出てきます。

$$\begin{cases} x=r\cos\theta+\sin^2\theta \\ y=r\sin\theta+\sin\theta\cos\theta \end{cases}$$

(b) 曲線の長さの式知ってますかーという問題。

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta}=-r\sin\theta+\sin 2\theta \\ \dfrac{dy}{d\theta}=r\cos\theta-\cos 2\theta \end{cases}$$

であるから、

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2+(\frac{dx}{d\theta})^2}d\theta=\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{2\pi}}\sqrt{\mathbf{r^2+1-2r\cos\theta}}\,\mathbf{d\theta}$$

(c) r=1 のとき、

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{\theta}{2}d\theta=\mathbf{8}$$

(d) (b)の式に r=0 を代入して 2π っつうのは多分×。

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+1-2r}d\theta\leq\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+1-2r\cos\theta}\,d\theta\leq\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+1+2r}d\theta$$ より、

$$|r-1|2\pi\leq\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+1-2r\cos\theta}\,d\theta\leq(r+1)2\pi$$

よって、$\lim_{r\to 0} l=\mathbf{2\pi}$

$\boxed{4}$

(a) この手の問題は解きまくったんじゃないでしょうか。

$y'' = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$ より、変曲点は$(\pm\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{e}}})$

(b) バウムクーヘン。

$2\pi x \times y \times \Delta x = \mathbf{2\pi x e^{-x^2} \Delta x}$

(c) $\int_0^r 2\pi x e^{-x^2} dx = \left[-\pi e^{-x^2}\right]_0^r = \mathbf{(1 - e^{-r^2})\pi}$

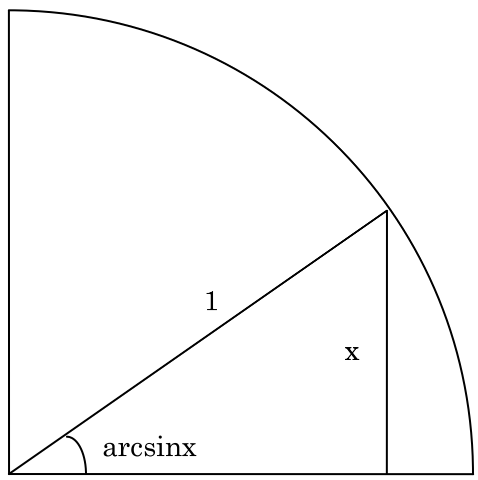
(d) $\lim_{r\to\infty}(1 - e^{-r^2})\pi = \boldsymbol{\pi}$

数 IB(植松) 基礎事項まとめ

初出と思われる単元の初歩です。どうしても手をつけられない人用。

逆三角関数

1 学期になぜか悲鳴を上げている人が多かった逆三角関数。難しく考える必要はありません。



$\sin\theta$ =x となるときの θ が arcsinx です(上図参照)。$\sin^{-1}x$ と書くこともあります。
同様にして arccosx(=$\cos^{-1}x$) , arctanx(=$\tan^{-1}x$)も定義できます。

ここで注意。sin , cos は 2π、tan は π の周期で同じ値をとります。ここできちんと定義。

$$\boxed{\begin{aligned} y = \arcsin x\,(=\sin^{-1}x) \quad &\Leftrightarrow \quad x = \sin y \text{ かつ } -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \\ y = \arccos x\,(=\cos^{-1}x) \quad &\Leftrightarrow \quad x = \cos y \text{ かつ } 0 \le y \le \pi \\ y = \arctan x\,(=\tan^{-1}x) \quad &\Leftrightarrow \quad x = \tan y \text{ かつ } -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2} \end{aligned}}$$

あとは微分さえ覚えれば OK .

$y = \arcsin x$ のとき、$x = \sin y$ の両辺を x で微分し、$1 = \cos y \cdot y'$

$$\therefore y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y = \arccos x$ のとき、$x = \cos y$ の両辺を x で微分し、$1 = -\sin y \cdot y'$

$$\therefore y' = -\frac{1}{\sin y} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$y=\arctan x$ のとき、$x=\tan y$ の両辺を x で微分し、$1=\dfrac{1}{\cos^2 y}\cdot y'=(1+\tan^2 y)y'$

$$\therefore y'=\frac{1}{(1+\tan^2 y)}=\frac{1}{1+x^2}$$

＊$\frac{1}{1+x^2}$などの積分は高校の時に置換積分でやりましたが、微分はその逆をやってるだけです。

級数展開

級数展開とは、牛腸風にいうと関数を多項式の形に“化かす”ということ。
1 学期の授業の大まかな流れは、幾何関係から関数の級数展開→Taylor 展開との一致を確認という感じでした。
幾何的な級数展開は発想に至るのが難しいので、結果だけわかればたぶん大丈夫。
結果は Taylor 展開で確認してください。

曲率

y=f(x)のグラフ上の(a , f(a))で、グラフを円弧とみなしたとき、
その半径を曲率半径 ρ、曲率半径の逆数を曲率 κ といいます。($\kappa=\rho^{-1}$)

$(a, f(a))$での法線は $y=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$であり、円弧の中心は法線上にあるはず。
また円弧とみてるのでこれは a+Δa でも一緒。つまり、中心を(x,y)と置くと

$$\frac{\partial y}{\partial a}=0$$

こっからスタートして、結果的に

$$\begin{cases} x=a-\dfrac{f''(a)(1-(f'(a))^2)}{f''(a)} \\ y=f(a)+\dfrac{1+(f'(a))^2}{f''(a)} \end{cases}$$

より、$\rho=\dfrac{\left(1+\left(f'(a)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|f''(a)|}$, $\kappa=\dfrac{|f''(a)|}{\left(1+\left(f'(a)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ が導かれます。

暗記は難しいので、導けるようにしときましょう。

最初の方にやった 3 次方程式の解法はよくわかりません。出ないと信じたい。

なんか重要だけど説明が必要なところとかあったら気軽に連絡してください。

試験勉強ですが、受験知識 ：牛腸問題 ：植松授業 ＝7：2：1 くらいの重要度なイメージ。

牛腸問題さえ解いてれば極限・微分・積分は(多分)かなりレベルアップすると思うので、

きちんとやりましょう。

ちなみに提出は **9/5(金)17:00** まで **数理科学研究科棟の 219 号室**なので忘れずに。
詳細は http://lecture.ecc.u-tokyo.ac.jp/~nkiyono/mon08.html へ。

試験勉強がんばりませう！　　　　　　　　　　　　　　　　作成者 ：進木