電磁気学 A (2002 年度冬学期)　解答

第 1 問

1. 静電平衡にあるとすれば正しい.ないとすると必ずしも正しくない.

2. 単独磁荷が存在しないとすれば正しい.存在するとすれば誤り.

3. 電流が時間変化しなければ正しい.時間変化すると必ずしも正しくない.

第 2 問

1. 球対称性より,電場は$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$と書ける.半径$r$の外向き球面を$S$とすると

$$\int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_S E(r)\hat{r} \cdot \hat{r} dS = E(r) \int_S dS = 4\pi r^2 E(r)$$

が成り立つから,Gauss の法則より

$$4\pi r^2 E(r) = \begin{cases} 0 \ (0 \leq r < a) \\ \dfrac{Q_1}{\varepsilon_0} \ (a < r < b) \\ \dfrac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0} \ (r > b) \end{cases}$$

$$\therefore E(r) = \begin{cases} 0 \ (0 \leq r < a) \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \ (a < r < b) \\ \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \ (r > b). \end{cases}$$

2. 積分路として,原点を始点とする半直線を考えると

$$V(\vec{r}) = -\int_\infty^r \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty E(r)\hat{r} \cdot \hat{r} dr = \int_r^\infty E(r) dr$$

$$\therefore V(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a} + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 b} \ (0 \leq r < a) \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 b} \ (a < r < b) \\ \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} \ (r > b). \end{cases}$$

3. $Q_1 = -Q_2$のとき,球殻間の電位差は

$$V=\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{-Q_1}{4\pi\varepsilon_0 b}\right)-0=\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

$$\therefore C=\frac{Q_1}{V}=4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}.$$

4. 電荷保存則より

$$Q_1{}'+Q_2{}'=Q_1+Q_2.$$

また,2 つの球殻が等電位となるから

$$\frac{Q_1{}'}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{Q_2{}'}{4\pi\varepsilon_0 b}=\frac{Q_1{}'+Q_2{}'}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

$$\therefore Q_1{}'=0\quad,\quad Q_2{}'=Q_1+Q_2.$$

第 3 問

1.

$$L\frac{dI}{dt}+RI=0.$$

2. 初期条件$I(0)=\varepsilon/R$を考え

$$I(t)=\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}.$$

3. 1.で得た微分方程式の両辺にIを掛けると

$$RI^2=-\frac{d}{dt}\left(\frac{LI^2}{2}\right)$$

が従う.従って,ジュール熱は

$$\int_0^\infty RI^2dt=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{LI^2}{2}\right]_0^t=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{L}{2}\left(\frac{\varepsilon}{R}e^{-\frac{R}{L}t}\right)^2\right]_0^t=\frac{L}{2}\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2.$$

第 4 問

1. 内側の円筒には図の上向きに,外側には下向きに電流が流れているとしてよい.このとき磁場は,円筒の共軸及び$\vec{\rho}$に垂直な成分のみを持つ.従って,共軸上に中心を持ち共軸と直交する半径ρの円を積分路C(右ねじを回すと上に進む向き)とすると,Ampère の法則より

$$\oint_C\vec{B}(\rho)\cdot d\vec{\rho}=B(\rho)\oint_C d\rho=2\pi\rho B(\rho)=\begin{cases}0\ (0\le\rho<a\,,\rho>b)\\ \mu_0 I\ (a<\rho<b)\end{cases}$$

が成り立つ.よって

$$B(\rho) = \begin{cases} 0 \ (0 \le \rho < a, \rho > b) \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \ (a < \rho < b). \end{cases}$$

2. $dV = d(\pi\rho^2 l) = 2\pi l\rho d\rho$であるから,磁場のエネルギーは

$$\int \frac{B^2}{2\mu_0} dV = \int_a^b \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\right)^2 (2\pi l\rho d\rho) = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln\frac{b}{a}.$$

3. インダクタンスをLとすると

$$\frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln\frac{b}{a}$$

$$\therefore L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln\frac{b}{a}.$$

…間違いなどあったらお知らせください.その他質問も,できる限り答えます.

2010 年 2 月 1 日　　髙橋　一史