2004年, 冬 数II 問題 解答　　　文責, 椎木

Ⅰ. $\mathbb{K}$値の3次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

に対して, $\det(A) = 0$ ならば,

$$A\vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{v} \neq \vec{0}$$

をみたす $\mathbb{K}^3 \ni \vec{v}$ が存在することを示せ

解)

$$\det(A) = 0 \iff PAQ = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \text{ or } O_3$$

となる P, Q が存在.

$Q^{-1}\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix}$ とおく,

$A\vec{v} = \vec{0}$ なる $\vec{v}$ が存在
$\iff PAQ\,Q^{-1}\vec{v} = \vec{0}$ なる $Q^{-1}\vec{v}$ が存在

(i) $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ のとき

$Q^{-1}\vec{v} = v_3' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり 存在.

(ii) $PAQ = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ のとき

$Q^{-1}\vec{v} = v_2' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_3' \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり存在。

(iii) $PAQ = O_3$

$\Leftrightarrow A = O_3$ のとき、

任意の$\vec{v}$が$A\vec{v} = O_3$をみたし、存在。

(i)〜(iii)より示せた。（証明終）

Ⅱ

実2次対称行列

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

に対して、2次形式

$$(B\vec{v}, \vec{v})$$

を考える。

$\vec{v}$が$\|\vec{v}\| = 1$を満たしながら動くとき、2次形式の最大値と最小値を求めよ。

解法にあたっては行列の対角化を用いること。

これは ジトプリで 出してます。

解)

$$\Phi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(4-\lambda) - 4$$

$$= 4 - 5\lambda + \lambda^2 - 4$$

$$= \lambda(\lambda - 5)$$

($\lambda=0$ のとき)

$$|A| = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{p_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく

($\lambda=5$ のとき)

$$|A - 5I_2| = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x$. $\therefore \vec{p_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおく.

$P = (\vec{p_1}\ \vec{p_2})$ とおくと, P は直交行列.

$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ を得る.

$\iff B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1}$

$$(B\vec{v},\vec{v}) = \left(P\begin{pmatrix}0&0\\0&5\end{pmatrix}P^{-1}\vec{v},\ \vec{v}\right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix}0&0\\0&5\end{pmatrix}({}^tP\vec{v}),\ ({}^tP\vec{v})\right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix}0&0\\0&5\end{pmatrix}\vec{\xi},\ \vec{\xi}\right)$$

$$\boxed{\vec{\xi} = {}^tP\vec{v} = \begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix} \text{とおいた}}$$

$$= \left(\begin{pmatrix}0\\5\xi_2\end{pmatrix},\ \vec{\xi}\right)$$

$$= 5\xi_2^2 \quad \cdots ①$$

$\|\vec{v}\|=1$ という制約条件は，$\|\vec{\xi}\|=1$ という条件と必要十分

（$\because$ Pは直交行列なので ノルムを変えない）

$\therefore\ \xi_1^2+\xi_2^2=1 \iff \xi_2^2 = 1-\xi_1^2 \quad \cdots ②$

①に②を代入して，

$$(B\vec{v},\vec{v}) = 5(1-\xi_1^2)$$
$$= 5-5\xi_1^2 \leqq 5$$

等号が成り立つとき $\xi_1=0,\ \xi_2=1$

また，①より

$$(B\vec{v},\vec{v}) = 5\xi_2^2 \geqq 0$$

等号が成り立つとき，$\xi_2=0,\ \xi_1=1$

以上より $(B\vec{v},\vec{v})$ の $\left\{\begin{array}{l}\text{最大値は } 5 \ (\xi_1=0,\ \xi_2=1)\\ \text{最小値は } 0 \ (\xi_2=0,\ \xi_1=1)\end{array}\right.$

$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき　$\vec{v} = P\vec{\xi} = \vec{p_2}$

$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき　$\vec{v} = P\vec{\xi} = \vec{p_1}$

$$\therefore \begin{cases} \mathrm{Max}\ 5 & (\vec{v} = \vec{p_2}) \\ \mathrm{Min}\ 0 & (\vec{v_1} = \vec{p_1}) \end{cases}$$

//

III

実2次正方行列

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

が全ての $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\|C\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$$

を満たすと仮定する。

C を全て求めよ。

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく。　$\left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|$ より、

$$\left\| \begin{matrix} ax + by \\ cx + dy \end{matrix} \right\|^2 = \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\|^2$$

$$acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2 = x^2 + y^2$$

x, y についての恒等式より、

$$
\begin{cases}
ac = 1 & \text{—①} \\
ad + bc = 0 & \text{—②} \\
bd = 1 & \text{—③}
\end{cases}
$$

②の両辺に dc をかけて

$$ac \times d^2 + bd \times c^2 = 0$$

$$\therefore\ d^2 + c^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow\ c^2 = 1 - d^2$$

$$c = \sqrt{1-d^2}.$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{1-d^2}},\ b = \frac{1}{d} \quad (d \neq 1, 0)$$

(d=1のとき)

$b=1,\ c=0,$

(d=0のとき)

$c=1,\ a=1$

以上より

$$
C = \begin{cases}
\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-d^2}} & \frac{1}{d} \\ \sqrt{1-d^2} & d \end{pmatrix} \quad (d \neq 0, 1)
\end{cases}
$$

//

(iv)

実2次正方行列

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -9 & -4 \end{pmatrix}$$

に対して、Hamilton − Cayleyの定理を用いて D^nを計算せよ.

HC定理から

$$D^2 - (2-4)D + (-8+9)I_2 = O_2.$$

$$D^2 + 2D + I_2 = O_2$$

$$(D + I_2)^2 = O_2.$$

$\Phi_D(\lambda) = (\lambda+1)^2.$

$$\begin{cases} \lambda^n = g(\lambda)\cdot(\lambda+1)^2 + a\lambda + b. & \cdots ① \\ \dfrac{d①}{d\lambda} \cdots n\lambda^{n-1} = 2(\lambda+1)g(\lambda) + (\lambda+1)^2\cdot g'(\lambda) + a & \cdots ② \end{cases}$$

①、②に $\lambda = -1$を代入すると、

$$\begin{cases} (-1)^n = -a + b \\ n(-1)^{n-1} = a \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_n = n(-1)^{n-1} \\ b_n = (-1)^n(1-n) \end{cases}$$

①に $\lambda = D$ を代入

$$D^n = n(-1)^{n-1} \cdot D + (-1)^n(1-n)$$ //

V 次の2次曲線を標準形に変換せよ。ただし座標系の平行移動と回転移動を用いてよい

(1) $2x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x - 2y = 0$

(2) $x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおく

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)^2 - \frac{9}{4}$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4 - \frac{9}{4}$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + \frac{7}{4}$$

$$= \frac{1}{4}(4\lambda^2 - 16\lambda + 7)$$

$$= \frac{1}{4}(2\lambda - 7)(2\lambda - 1)$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{2}, \frac{7}{2}$$

$$\left(A - \frac{1}{2}I_2\right) = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $A\vec{v} = \vec{0}$ をみたす $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{v_1}$ $\therefore$ $\vec{p_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする

$$\left(A - \frac{7}{2}I_2\right) = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$A\vec{v} = \vec{0}$ をみたす $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \vec{v_2}$ $\therefore$ $\vec{p_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする

$P = (\vec{p_1}\ \vec{p_2})$ とすると、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \quad \left(P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

ここで

$$2x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x - 2y = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x\ y) \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (2\ 2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x\ y)\, P \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (2\ 2)\, P\, {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

(ここで $(x\ y)P = {}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とおくと)

$$\Longleftrightarrow (x'\ y') \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - (2\ 2)\, P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow (x'\ y') \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - (4\ 0) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \underline{\frac{1}{2}x'^2 + \frac{7}{2}y'^2 - 4x' = 0}$$

これが2次曲線の標準形

ただし $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} x+y \\ y-x \end{pmatrix}$ である //

(2) $\underline{x^2-2xy+y^2-2x-2y+1=0}$

$A=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$ とおく

$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda\end{vmatrix}$

$=(1-\lambda)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)$

$=1-2\lambda+\lambda^2-\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{4}(4\lambda^2-8\lambda+3)$

$=\frac{1}{4}(2\lambda-3)(2\lambda-1)$

$\left(\lambda=\frac{1}{2}\right.$ のとき$\left.\right)$

$\left(A-\frac{1}{2}I_2\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\to\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore\ \vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}v_2\quad\therefore\ \vec{p_1}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ とおく。

$\left(\lambda=\frac{3}{2}\right)$ のとき

$\left(A-\frac{3}{2}I_2\right)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} v_2 \quad \therefore \vec{p_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} \vec{p_1} & \vec{p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad P^t A P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ とかける}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x\ y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (2\ 2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + I_2 = O_2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x\ y)^t P A P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (2\ 2)\, {}^t P P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + I_2 = O_2$$

$$\left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x\ y)^t P = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} \text{ とおくと、} \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x'\ y') \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - (4\ 0) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + I_2 = O_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} x'^2 + \frac{3}{2} y'^2 - 4x' + 1 = 0 \quad //$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}$$

VI 実3次正方行列

$$D=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

が正則である必要十分条件を求めよ。

解)

$$D=\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1-a^2 & 1-a & 1 & -a & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 1 & -a & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & 1 & -a+(1+a) & -1-a \end{array}\right)$$

$\left(\begin{array}{l} a \neq 1, \\ a \neq -2 \end{array}\right)$ aとき

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{a-1} & \frac{1}{1-a} \\ 0 & 0 & 1 & \underbrace{\frac{1}{(1-a)(a+2)}}_{=b} & \underbrace{\frac{1}{(1-a)(a+2)}}_{=c} & \underbrace{-\frac{1+a}{(1-a)(a+2)}}_{=d} \end{array}\right)$$

とおく。

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & -b & 1-c & -d \\ 0 & 1 & 0 & b & \frac{1}{a-1}+c & \frac{1}{1-a}+d \\ 0 & 0 & 1 & b & c & d \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & b(-1-a) & (1-c)-a\left(\frac{1}{a-1}+c\right) & -d-a\left(\frac{1}{1-a}+d\right) \\ & 1 & & b & \frac{1}{a-1}+c & \frac{1}{1-a}+d \\ & & 1 & b & c & d \end{array}\right)$$

右側の 3×3 部分を B とおく

したがって D が逆行列をもつための必要条件は

$$a \neq 1,\ a \neq -2$$

逆に $a \neq 1,\ a \neq -2$ のとき

D は B という逆行列をもつ

(証明終)

VII

(1) 3次元ベクトル

$$\vec{a_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を考える。原点を通り、$\vec{a_1}, \vec{a_2}$ が張る平面を V とする。グラム・シュミット直交化法

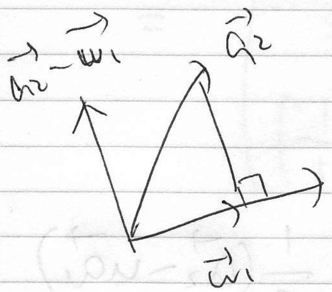
を用いて、

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

のVへの正射影ベクトル$\vec{c}$を求めよ。

(2). (1)のベクトル$\vec{c}$を、$A = (\vec{a_1}\ \vec{a_2})$と$\vec{e}$で表せ。

(1) まず、$\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$を正規直交化させる



$\vec{p_1} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\vec{a_1}$ とおく。

$$\vec{p_2} = \frac{1}{\|\vec{a_2}-\vec{w_1}\|}(\vec{a_2}-\vec{w_1})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{66}}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ とおく。}$$

$$\vec{c} = (\vec{e}, \vec{p_1})\cdot\vec{p_1} + (\vec{e}, \vec{p_2})\cdot\vec{p_2}$$

$$= \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad //$$

(2)

$$\vec{p_1} = \frac{1}{\|\vec{a_1}\|}\vec{a_1} = \frac{1}{t}\vec{a_1} \text{ とおく}$$

$$\vec{p_2} = \frac{1}{\left\| \vec{a_2} - \frac{(\vec{a_1}\cdot\vec{a_2})}{\|\vec{a_1}\|^2}\vec{a_1} \right\|}\left(\vec{a_2} - \frac{(\vec{a_1}\cdot\vec{a_2})}{\|\vec{a_1}\|^2}\vec{a_1}\right)$$

$$= \frac{1}{s}\cdot(\vec{a_2} - u\cdot\vec{a_1})$$

$$= \frac{1}{s}\vec{a_2} - \frac{u}{s}\vec{a_1} \text{ とおく}$$

$$\vec{c} = \left(\vec{e}, \frac{1}{t}\vec{a_1}\right)\frac{1}{t}\vec{a_1}$$

$$+ \left(\vec{e}, \frac{1}{s}(\vec{a_2} - u\vec{a_1})\right)\frac{1}{s}(\vec{a_2} - u\vec{a_1})$$

$$= \frac{1}{t^2}{}^{t}\vec{a_1}\vec{e}\,\vec{a_1}$$

$$+ \frac{1}{s^2}\Big\{(\vec{e}, (\vec{a_2} - u\vec{a_1}))\vec{a_2}$$

$$- (\vec{e}, (\vec{a_2} - u\vec{a_1}))\cdot u\vec{a_1}\Big\}$$

$$= \frac{1}{t^2} {}^t\vec{a_1} \vec{e} \vec{a_1}$$

$$+ \frac{1}{s^2} \left\{ \left({}^t\vec{a_2} - u {}^t\vec{a_1} \right) \vec{e} \vec{a_2} \right.$$

$$\left. - \left({}^t\vec{a_2} - u {}^t\vec{a_1} \right) \vec{e}\, u\vec{a_1} \right\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{1}{t^2} - \frac{u}{s^2} \right) {}^t\vec{a_2} + \frac{u}{s^2} {}^t\vec{a_1} \right\} \vec{e} \vec{a_1}$$

$$+ \frac{1}{s^2} \left({}^t\vec{a_2} - u {}^t\vec{a_1} \right) \vec{e} \vec{a_2}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{u}{s^2} {}^t\vec{a_1} \\ \left(\frac{1}{t^2} - \frac{u}{s^2} \right) {}^t\vec{a_2} \end{pmatrix} \vec{e} \vec{a_1}$$

$$+ \frac{1}{s^2} \begin{pmatrix} -u {}^t\vec{a_1} \\ {}^t\vec{a_2} \end{pmatrix} \vec{e} \vec{a_2}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{u}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t^2} - \frac{u}{s^2} \end{pmatrix} {}^tA \vec{e} \vec{a_1}$$

$$+ \frac{1}{s^2} \begin{pmatrix} -u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} {}^tA \vec{e} \vec{a_2}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{u}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t^2} - \frac{u}{s^2} \end{pmatrix} = B, \quad \frac{1}{s^2}\begin{pmatrix} -u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = C \text{ とおく。}$$

$$= B\,{}^t\!A\,\vec{e}\,\vec{a_1} + C\,{}^t\!A\,\vec{e}\,\vec{a_2}$$

$$= \begin{pmatrix} B\,{}^t\!A\,\vec{e} & C\,{}^t\!A\,\vec{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t\vec{a_1} \\ {}^t\vec{a_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B\,{}^t\!A\,\vec{e} & C\,{}^t\!A\,\vec{e} \end{pmatrix} {}^t\!A \quad //$$

これでいいのかな？不安。