2007夏 戸瀬「数学II」答 by 22組シゲ村

I

(1) i) $n=1$ のとき明らか

ii) $n=p$ のとき成立を仮定

$$(\lambda I+A)^{p+1} = (\lambda I+A)\sum_{k=0}^{p} {}_pC_k \lambda^k A^{p-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} {}_pC_k \lambda^{k+1} A^{p-k} + \sum_{k=0}^{p} {}_pC_k \lambda^k A^{p-k+1}$$

$$= \lambda^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} ({}_pC_k + {}_pC_{k-1}) \lambda^k A^{p-k+1} + A^{p+1}$$

$$= \lambda^{p+1} + \sum_{k=1}^{p} {}_{p+1}C_k \lambda^k A^{p-k+1} + A^{p+1}$$ （${}_{n+1}C_{k+1} = {}_nC_k + {}_nC_{k+1}$ を使った）

$$= \sum_{k=0}^{p+1} {}_{p+1}C_k \lambda^k A^{p+1-k}$$ Q.E.D.

(2)

$$\begin{pmatrix} x^n & nax^{n-1} & nbx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}acx^{n-2} \\ 0 & x^n & ncx^{n-1} \\ 0 & 0 & x^n \end{pmatrix}$$ 帰納法で示せるので略

II

Bに行基本変形をして

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 3&4&5&6&0&1&0&0 \\ 3&6&10&15&0&0&1&0 \\ 1&4&10&20&0&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{2r+=-3\times 1r \\ 3r+=-3\times 1r \\ 4r+=-1\times 1r}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&1&1&1&1&0&0&0 \\ 0&1&2&3&-3&1&0&0 \\ 0&3&7&12&-3&0&1&0 \\ 0&3&9&19&-1&0&0&1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{1r+=-1\times 2r \\ 3r+=-3\times 2r \\ 4r+=-3\times 2r}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&-1&-2&4&-1&0&0 \\ 0&1&2&3&-3&1&0&0 \\ 0&0&1&3&6&-3&1&0 \\ 0&0&3&10&8&-3&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{1r+=3r \\ 2r+=-2\times 3r \\ 4r+=-3\times 3r}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&1&10&-4&1&0 \\ 0&1&0&-3&-15&7&-2&0 \\ 0&0&1&3&6&-3&1&0 \\ 0&0&0&1&-10&6&-3&1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{1r+=-1\times 4r \\ 2r+=3\times 4r \\ 3r+=-3\times 4r}]{} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&20&-10&4&-1 \\ 0&1&0&0&-45&25&-11&3 \\ 0&0&1&0&36&-21&10&-3 \\ 0&0&0&1&-10&6&-3&1 \end{array}\right)$$

$$\therefore B^{-1} = \begin{pmatrix} 20&-10&4&-1 \\ -45&25&-11&3 \\ 36&-21&10&-3 \\ -10&6&-3&1 \end{pmatrix}$$

III

Cに行基本変形をして

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1 \\ 4&4&5&6&7 \\ 6&6&10&15&21 \\ 4&4&10&20&34 \end{pmatrix} \longrightarrow \cdots\cdots \longrightarrow \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1 \\ 0&0&1&2&3 \\ 0&0&0&1&3 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$ （$=D$とおく）

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1 \\ 0&0&1&2&3 \\ 0&0&0&1&3 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c+d+e \\ c+2d+3e \\ d+3e \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(C) \right)$$

No.

DATE

$\therefore \begin{cases} a+b+c+d+e=0 \\ c+2d+3e=0 \\ d+3e=0 \end{cases}$

$\therefore \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -3a-3b \\ 3a+3b \\ -a-b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

故に $\mathrm{Ker}(C)$ の基底は ${}^t(1\ 0\ -3\ 3\ -1)$ ${}^t(0\ 1\ -3\ 3\ -1)$

また $D=(\vec{d_1}\ \vec{d_2}\ \vec{d_3}\ \vec{d_4}\ \vec{d_5})$, $C=(\vec{c_1}\ \vec{c_2}\ \vec{c_3}\ \vec{c_4}\ \vec{c_5})$ とおくと。

$\vec{d_1}=\vec{d_2}$, $\vec{d_5}=\vec{d_1}-3\vec{d_3}+3\vec{d_4}$

$\Longleftrightarrow \vec{c_1}=\vec{c_2}$, $\vec{c_5}=\vec{c_1}-3\vec{c_3}+3\vec{c_4}$

$\therefore C=(\vec{c_1}\ \vec{c_1}\ \vec{c_3}\ \vec{c_4}\ \vec{c_1}-3\vec{c_3}+3\vec{c_4})$ $\therefore \mathrm{Im}(C)$ の基底は $\vec{c_1}, \vec{c_3}, \vec{c_4}$

i.e. ${}^t(1,4,6,4)$, ${}^t(1,5,10,10)$, ${}^t(1,6,15,20)$ //

IV

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \alpha & c & b \\ \beta & 0 & a \\ \gamma & a & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}}=\frac{-a\alpha+b\beta+c\gamma}{2bc} \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \alpha & b \\ c & \beta & a \\ b & \gamma & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}}=\frac{a\alpha-b\beta+c\gamma}{2ac}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 0 & c & \alpha \\ c & 0 & \beta \\ b & a & \gamma \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}}=\frac{a\alpha+b\beta-c\gamma}{2ab}$$

V

$\vec{a_2}$ から $\vec{a_1}$ への正射影ベクトルは

$$\frac{(\vec{a_1},\vec{a_2})}{\|\vec{a_1}\|^2}\vec{a_1}=\frac{1}{3}\vec{a_1}$$

$\vec{a_2}-\frac{1}{3}\vec{a_1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{e_1}=\frac{\vec{a_1}}{\|\vec{a_1}\|}$, $\vec{e_2}=\frac{\vec{a_2}-\frac{1}{3}\vec{a_1}}{\|\vec{a_2}-\frac{1}{3}\vec{a_1}\|}$ とおく。

$\vec{e_1}\perp\vec{e_2}$, $\|\vec{e_1}\|=\|\vec{e_2}\|=1$ シュミットの直交化法より $\vec{b}$ を

$\vec{b}=\vec{a_3}-(\vec{e_1},\vec{a_3})\vec{e_1}-(\vec{e_2},\vec{a_3})\vec{e_2}$ とおくと。$\vec{e_1}\perp\vec{b}$, $\vec{e_2}\perp\vec{b}$

更に $\vec{e_3}=\frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ とおけば $\langle\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\rangle$ は求める正規直交基底

$\therefore \vec{e_1}=\frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2}=\frac{1}{3\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e_3}=\frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

No.

DATE

VI

$\vec{p}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ に $A\vec{v} = \vec{\beta}$ とすると $(D\vec{p}, \vec{\alpha} - D\vec{v}) = 0$

$\therefore (\vec{p}, {}^tD(\vec{\alpha} - D\vec{v})) = 0$　$\vec{p}$ は任意だから

${}^tD\vec{\alpha} = {}^tD D\vec{v}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \vec{\alpha} = 9\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \vec{v}$$

$$\therefore \vec{\beta} = D\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{\alpha}$$

VII

(1) $|F - \lambda I_2| = 0$ より　$\lambda = 7, 12$

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix}$ とする $(\vec{p}_1, \vec{p}_2 \neq \vec{0})$

i) $\lambda = 7$ のとき

$(F - 7I_2)p_1 = \vec{0} \iff 2p_{11} + p_{12} = 0$　$\therefore \vec{p}_1 = p_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

ii) $\lambda = 12$ のとき

$(F - 12I_2)\vec{p}_2 = \vec{0} \iff -p_{21} + 2p_{22} = 0$　$\therefore \vec{p}_2 = p_{22}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\| = 1$ となるよう p_{11}, p_{22} をおくと $p_{11} = p_{22} = \frac{1}{\sqrt{5}}$　$P = (p_1\ p_2)$ とする。

このとき $F(p_1\ p_2) = (7p_1\ 12p_2) = (p_1\ p_2)\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \iff P^{-1}FP = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$

なおこのとき P は回転行列

(2) $\left(F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(P\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, {}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

$= \left(\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$　($\because P$ は直交行列)

$= 7x^2 + 12y^2 = 7 + 5y^2$　$\therefore$ 最小値 7

※おわりに

シケ対のくせに授業聞いてないので分かりません。レジュメすら手元にありません。VI は全く自信ないです。字が読めないところは雰囲気で何とかしてください。