数学Ⅱ（戸瀬信之）

試験対策

平成21年度　1年　理科一類　22組　雁木・山元作
2009年度　冬学期

期 末 試 験 対 策 後

数 学 Ⅱ

平成 21 年 2 月 9 日　15 時 05 分—16 時 35 分

注 意 事 項

1　試験開始の合図があるまでに、この試験対策プリントを開きなさい。

2　この試験対策プリントは全部で６６ページあります。落丁・乱丁または印刷不鮮明な箇所があったら、メールまたはクラス掲示板で雁木か山元に知らせなさい。

3　ただし、デザイン・レイアウトに関する苦情は一切受け付けません

4　勉強には必ず黒色鉛筆（または黒色シャープペンシル）を用いて手を動かしなさい。

5　解答用紙の指定欄に学生証番号、科類、氏名、語学符号を記入しなさい。指定欄以外にこれらを記入してはいけません。

6　この試験対策プリントの余白は、落書き用に使用してもよいが、そのせいで単位を落としてはいけません。

7　試験終了後、数学のことは忘れてすぐに情報科学の勉強をしなさい。

はじめに

このシケプリは戸瀬信之教官の冬学期数学Ⅱ演習の問題及び解答をわかりやすく書きなおしたものです。

内容としては、基本的に

1. 問題
2. 解答
3. 解説・基本事項説明

となっております。

単位が危ない人用に作ってありますが、すべての問題をこなしたら、「優」も十分狙えることかと思われます。

「基本を根本から理解する」ためではなく、「よくわからないけど公式が使いこなせて、問題が解ける」ために作られたことを考慮に入れてください。「そんなの嫌だ」ていう人がいるなら、線形代数の「しっかりとした参考書」を読むか、戸瀬さんにでも聞いてください。とはいうものの、やはり公式・基本事項にたいする、視覚的、直観的理解があったほうが頭に入りやすいと思われますので、そのように理解できるよう努めて説明書きを加えるようにしました。

分量の都合上、計算過程は適宜省略してあります。ご了承ください。

質問・誤植等の指摘がありましたら、メールなり何なりください。。。

◆ 問題１

$$B=\begin{pmatrix}-4 & -3 & -3\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & 4 & 3\end{pmatrix}$$ を基本行列の積で表せ。

解）

まず、階段行列を作ります。（略）

$$B=\begin{pmatrix}-4 & -3 & -3\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & 4 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{1r\leftrightarrow 2r\\ 2r+=1r\times 4\\ 3r+=1r\times(-4)\\ 3r+=2r\\ 2r\leftrightarrow 3r\\ 3r+=2r\times 3\\ 1r+=3r\times(-1)}]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3$$

したがって

$$B=\overset{1r\leftrightarrow 2r}{\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}\overset{2r+=1r\times(-4)}{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}\overset{3r+=1r\times 4}{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{pmatrix}}\overset{3r+=2r\times(-1)}{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}}$$

$$\times\overset{2r\leftrightarrow 3r}{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}}\overset{3r+=2r\times(-3)}{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}}\overset{1r+=3r\times(-1)}{\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

となります。

解説）

解答が分かりにくいという方は、たとえば、

$$C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$ を考えると、

$$C=\underset{\substack{\uparrow\\ 1r\text{と}2r\text{を}\\ \text{入れ替え}}}{\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\underset{\substack{\uparrow\\ C_{12}\text{に}\\ 2\text{をたす}}}{\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\underset{\substack{\uparrow\\ I_3}}{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}\cdots(1)$$

というように、（1）式の左の 2 つの行列の積がそれぞれ基本変形に対応してます。

このように B に左から基本行列 P をかけて、

$PB=I_3$　としたなら、　$B=P^{-1}I_3$　となるので、

この P^{-1} にあたる行列を自分で考えるのが、この問題の意図です。

◆ 問題 2

> A を $m\times n$ 行列とする。
>
> $\ker({}^tAA)\subset\ker(A)$　　を示せ。

解）

$\vec{v}\in\ker({}^tAA)\Rightarrow\vec{v}\in\ker(A)$　　を示します、

すなわち、

$({}^tAA)\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow A\vec{v}=\vec{0}$　　を示します。

そこで、

$$\begin{aligned}\|A\vec{v}\|^2&=\left(A\vec{v},A\vec{v}\right)\\&=\left({}^tAA\vec{v},\vec{v}\right)\\&=\left(\vec{0},\vec{v}\right)\qquad(\because\ \text{仮定より})\\&=0\end{aligned}$$

したがって、$A\vec{v}=\vec{0}$　となり、

> ←　一般に、
>
> $\left(A\vec{x},\vec{y}\right)=(\vec{x},{}^tA\vec{y})$　が成
>
> 立します。
>
> 説明は省きます。

$({}^tAA)\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow A\vec{v}=\vec{0}$　が示せました。

◆ 問題３

次の基本行列　P_1, P_2, P_3　を求めましょう。

１．　$(\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3 \quad \vec{a}_4)P_1 = (\vec{a}_4 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3 \quad \vec{a}_1)$

２．　$(\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3 \quad \vec{a}_4)P_2 = (\vec{a}_1 \quad 3\vec{a}_2 \quad \vec{a}_3 \quad \vec{a}_4)$

３．　$(\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3 \quad \vec{a}_4)P_3 = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad 3\vec{a}_1+\vec{a}_3 \quad \vec{a}_4)$

解）

$$P_1 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 3 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$　← 0を省きました

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & & 3 & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

解説）

なぜこうなるかは、左辺に代入することでわかります。

じっくり考えてみてください。

◆ 問題４

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{a}_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{a}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\6\\3\\1\end{pmatrix},\quad \vec{a}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\4\\3\\2\end{pmatrix}$$

に対し、

$$V_1=\mathbf{R}\vec{a}_1+\mathbf{R}\vec{a}_2,\quad V_2=\mathbf{R}\vec{a}_3+\mathbf{R}\vec{a}_4$$

とする。

$V_1\cap V_2,\quad V_1+V_2$ の基底をそれぞれ求めよ。

解）

まず、$\vec{v}\in V_1+V_2$ の基底を求めます。
x,y,z,w を任意の実数として、$\vec{v}$ は、

$\vec{v}=x\vec{a}_1+y\vec{a}_2+z\vec{a}_3+w\vec{a}_4$ と表せます。

これを行列で表すと、

$$\begin{aligned}\vec{v}&=\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\1&3&3&1\\1&4&6&4\\0&1&3&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A$$ とすると、$\vec{v}$ は A の像（Image）になる。

したがって、$V_1 + V_2$ の基底は $\mathrm{Im}(A)$ の基底に一致します。

あとはいつも通り、掃き出して、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (= B\text{とする})$$

と変形できて、

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 & \vec{b}_4 \end{pmatrix}$$

と置くと、

$\vec{b}_4 = 4\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2 + 2\vec{b}_3$ とあらわすことができるので、

B の基底は $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$

したがって A の基底は $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ の三本と分かります。

$\therefore$ $V_1 + V_2$ の基底は $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$。

和集合 $V_1 + V_2$ はベクトル 2 本＋2 本＝4 本で表される空間であったのに、その基底が 3 本 $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ で表されるとわかったので、積集合 $V_1 \cap V$ の基底は、$4 - 3 = 1$ 本です。

$\vec{v}' \in V_1 \cap V_2$ と置くと、

$$\vec{v}' = x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 = z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4$$

$$\Leftrightarrow x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 - z\vec{a}_3 - w\vec{a}_4 = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \\ -w \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

と分かる。

これを解くと、

$x = 4w, \quad y = -3w$　が得られるので、

$$\begin{aligned} \vec{v}' &= x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 \\ &= 4w\vec{a}_1 - 3w\vec{a}_2 \\ &= \left\{ 4\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \times w \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -8 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} w \end{aligned}$$

となるので、

$V_1 \cap V_2$ の基底は $\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -8 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

◆ 問題 5

$$A=\begin{pmatrix}1&9&6&4\\1&1&-2&4\\1&-7&-10&4\end{pmatrix}$$ に対し、

$A=P(\text{標準形})Q$ を満たす正則行列 P,Q を求めよ。

解）これは今までの復習に近いので途中式を省略します。

$$P=\begin{pmatrix}1&9&0\\1&1&0\\1&-7&1\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}1&0&-3&4\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

解説）P は行基本変形、Q は列基本変形に対応する。

標準形とは、

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$ のような１と０のみで表された階段行列のこと。

◆ 問題 6

$$B=\begin{pmatrix}-1&0&2\\-53&-2&34\\-6&0&6\end{pmatrix}$$ に対し、

1. $\Phi_B(\lambda)=\det(\lambda I_3-B)$ を求めよ。
2. B を対角化せよ。

解）

これは今までの2×2行列のときと同じように解けばOK

1.

$$\Phi_B(\lambda)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0 & 2\\ -53 & -2-\lambda & 34\\ -6 & 0 & 6-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

2.

$\lambda=\pm2,3$ のときの固有ベクトル $\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3$ は

それぞれ

$$\vec{p}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix},\quad \vec{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{p}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$ であるから、

$$B(\vec{p}_1\quad\vec{p}_2\quad\vec{p}_3)=(2\vec{p}_1\quad -2\vec{p}_2\quad 3\vec{p}_3)$$
$$=(\vec{p}_1\quad\vec{p}_2\quad\vec{p}_3)\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&3\end{pmatrix}$$

$$\therefore B=P\begin{pmatrix}2&&\\&-2&\\&&3\end{pmatrix}P^{-1}$$ と対角化される。

◆ 問題7

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&2&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$ を対角化せよ。

解）問題６と同様にすればよい。

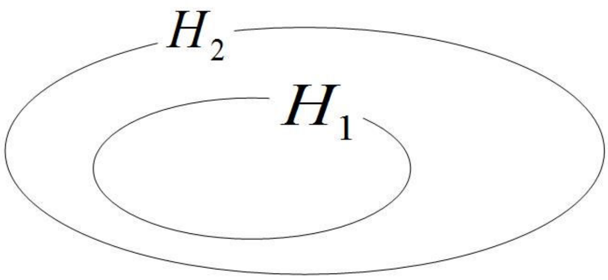
$$P=\begin{pmatrix}1&3&1\\0&2&3\\1&1&1\end{pmatrix} \text{で、} \quad A=P\begin{pmatrix}-1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}P^{-1}$$

◆ 問題８

H_1, H_2 を $\mathbf{R}^n$ の部分空間とする。

$H_1 \subset H_2 \Rightarrow H_1^{\perp} \supset H_2^{\perp}$　を示せ。

解）



$\vec{p} \in H_1, \vec{q} \in H_2^{\perp}$ とする。

$H_1 \subset H_2$　より、
$\vec{p} \in H_2$ である。

$\therefore (\vec{p}, \vec{q}) = 0$

ここで、$\vec{p}$ は H_1 の元でもあるので、

任意の $\vec{q}$ は $H_1^{\perp}$ の元である。

すなわち、　が成立するので、

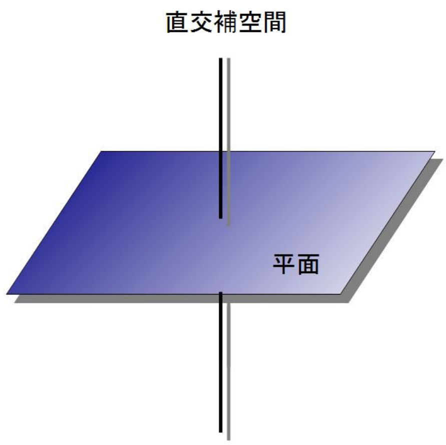
$H_1 \subset H_2 \Rightarrow H_1^{\perp} \supset H_2^{\perp}$　が示せた。

解説）　$\boxed{\text{直交補空間}}$
$\vec{p} \in H$ なる任意の $\vec{p}$ について、
$(\vec{p}, \vec{q}) = 0$　となるような $\vec{q}$ 全体の集合を、H の直交補空間といい、

$H^{\perp}$ で表す。

例）三次元で考える。

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$ で張られる xy 平面の直交補空間は $\vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ で張られる。



$\mathbf{R}\vec{e}_3$ は、$\vec{e}_1,\vec{e}_2$ で張られるどんなベクトルに対しても直交する。

◆ 問題9

写像 $\left.\begin{array}{l} f:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}\\ g:\mathbf{Y}\to\mathbf{Z}\end{array}\right\}$ が単射なら、
合成写像

$g\circ f:\mathbf{X}\to\mathbf{Z}$

も単射であることを示せ。

解）

$a_1,a_2\in\mathbf{X}$ とする。ただし、$a_1\neq a_2$

f は単射より、

$a_1\neq a_2\Rightarrow f(a_1)\neq f(a_2)$

また、g は単射より、

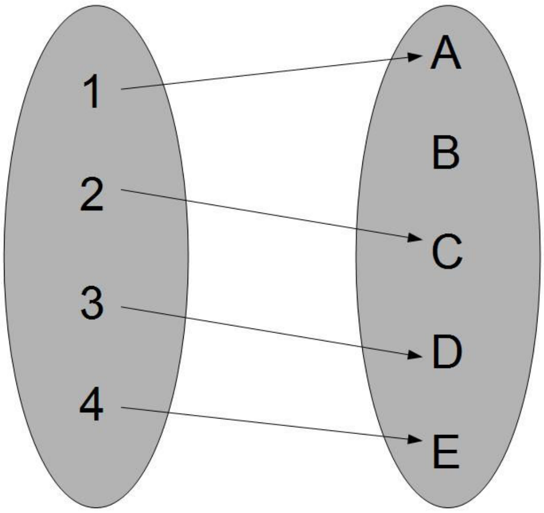
$f(a_1)\neq f(a_2)\Rightarrow g\circ f(a_1)\neq g\circ f(a_2)$

以上より、

$a_1\neq a_2\Rightarrow g\circ f(a_1)\neq g\circ f(a_2)$　　すなわち、$g\circ f$ も単射である。

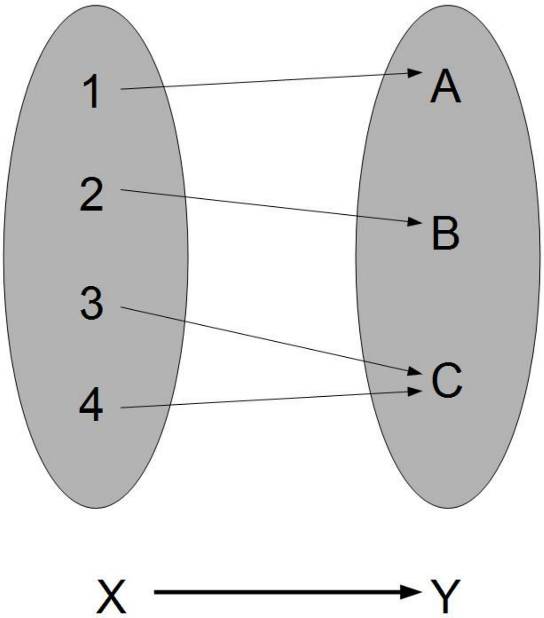
解説）$\boxed{\text{単射と全射}}$

単射のとき、



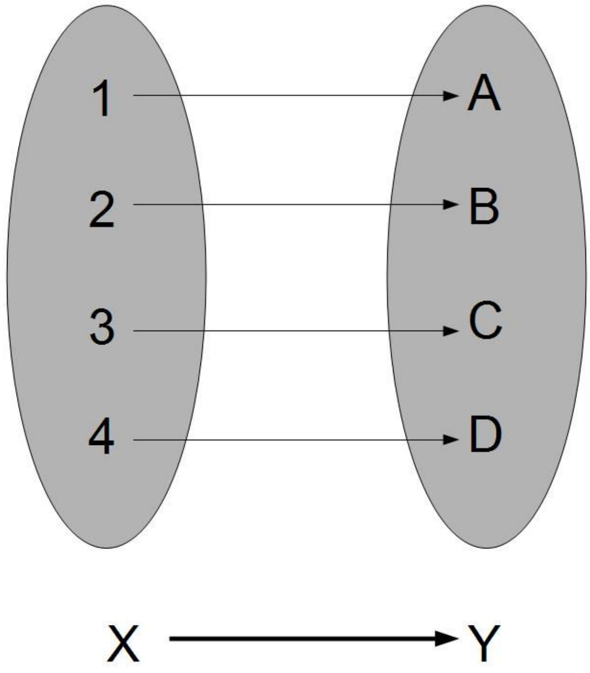
のように、元が違えば、写った先も違うものになる。

全射のとき



のように、**X** の元が写った先で、**Y** のすべての元を満たしている場合である。

全単射のとき、



このように、**X** の元の像が **Y** の元と一対一に対応している。
[一対一対応]と呼ばれる。

このとき、**X** と **Y** の次元は必ず一致する。

※ちなみに、単射は“一対一”と呼ばれたりもするが、
“一対一対応”とは違うので注意！！

◆ 問題 10

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 1 & 2 & 5 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

を巡回置換の積であらわせ。

解)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 1 & 2 & 5 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 & 4 \\ 3 & 9 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

↑下の段は省略する

解説）置換

置換とは、集合$\Omega = \{1,2,\cdots,n\}$の順序を入れ替える操作のことである。

これは、席替えに例えるとわかりやすいだろう。Ωをｎ個の席とみる。すると、席替えとは、各iにいる人が、どこかの席jに移動し、

（１）どの２人も同じ席には移らない（単射）

（２）どの席にも誰かが座る（全射）

ということである。

このことを数学の言葉で表そう。

ここでいう席替え（置換）とは

全単射写像 $\begin{aligned} \sigma:\quad & \Omega \to \Omega \\ & i \in \Omega \to j \in \Omega \end{aligned}$

のことである。

また、iの行き先を$\sigma(i)$と表すことにすると、置換は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

のように表現される。すなわち、上段の数字の行き先を下段に指定したわけである。ここで、$\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n)$はそれぞれ$1,2,\cdots,n$のいずれかであることに注意しよう。

たとえば、$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$という置換なら、
１が２に移り、
２が４に移り、
３が３に移り、
４が１に移るわけである。

・合成置換について

具体例でもって、合成置換の扱い方に慣れよう
合成置換は、二つの置換の積であらわされる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

のような合成置換があったとしよう。

このとき、右側の置換から計算することに注意しよう（行列の掛け算と一緒！！）

１→３→３
２→４→１
３→２→４
４→１→２

と移るので、この合成置換は

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。

・巡回置換について

特に、$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$のように

$1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 1$ という順で一周する置換を

「巡回置換」　という。

また、$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ のように、

$1 \to 2 \to 1, 3 \to 4 \to 3$　という順で

2 つの巡回置換を含んでいるときは、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

と、合成置換の形に分けれれる。（計算してみよう！）

巡回置換は

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ のように、下の段を省略できる。(書かなくてもわかるから。）

特に、$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ のように、2 文字を入れ替える巡回置換は

「互換」と呼ばれる。

たとえば、$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ のような巡回置換は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と、互換の積であらわされる。

このことは、慣れるまで分かりにくいと思うが、次の問題を通して慣れてしまおう

◆ 問題 11

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$　とする。

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. ρ, σ, τ を互換の積で表せ。
2. $\rho\sigma, \sigma\rho, \sigma\tau$ を計算せよ。

解)

1. ρ のとき、

1→4
2→1
3→2
4→3　だから、

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$$

同様に、σ のとき、

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$$

τ のとき、

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$$

※答えは一意的じゃないです。

2.　$\rho\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$

１→４→３
２→３→２
３→１→４
４→２→１　より、

$\rho\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix}$　と書ける。

同様に、$\sigma\rho$ のとき、

$\sigma\rho=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$

$\sigma\tau$ のとき、

$\sigma\tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$

◆ 問題１２

３次の置換全てを互換の積であらわせ。

解）３次の置換は

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

の６個。　　恒等置換である$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$は除いて、

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}$$

となる。

◆ 問題１３

H_1, H_2 が $\mathbf{R}^n$ の部分空間とする。

$(H_1+H_2)^{\perp}=H_1{}^{\perp}\bigcap H_2{}^{\perp}$　　を示せ。

解）（十分性）

$\vec{p}_1\in H_1,\quad \vec{p}_2\in H_2,\quad \vec{v}\in(H_1+H_2)^{\perp}$　と、置く。

H_1+H_2 上のベクトルは、
$\mathbf{R}\vec{p}_1+\mathbf{R}\vec{p}_2$ で表される。

$\vec{v} \in (H_1 + H_2)^{\perp}$ より、

$$\left(\vec{v}, \mathbf{R}\vec{p}_1 + \mathbf{R}\vec{p}_2\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \mathbf{R}\left(\vec{v}, \vec{p}_1\right) + \mathbf{R}\left(\vec{v}, \vec{p}_2\right) = 0$$

これが任意の実数 $\mathbf{R}$ で成立するから、

$$\left(\vec{v}, \vec{p}_1\right) = 0, \quad \left(\vec{v}, \vec{p}_2\right) = 0$$

したがって、$\vec{v} \in {H_1}^{\perp}$ かつ $\vec{v} \in {H_2}^{\perp}$ なので、

$$\vec{v} \in {H_1}^{\perp} \bigcap {H_2}^{\perp}$$

すなわち、$(H_1 + H_2)^{\perp} \subset {H_1}^{\perp} \bigcap {H_2}^{\perp}$

（必要性）

$\vec{v}' \in {H_1}^{\perp} \bigcap {H_2}^{\perp}$ とすると、

$\left(\vec{v}, \vec{p}_1\right) = 0, \quad \left(\vec{v}, \vec{p}_2\right) = 0$ である。

したがって、

$$\left(\vec{v}', \mathbf{R}\vec{p}_1 + \mathbf{R}\vec{p}_2\right) = \mathbf{R}\left(\vec{v}', \vec{p}_1\right) + \mathbf{R}\left(\vec{v}', \vec{p}_2\right) = 0$$

すなわち、$\vec{v}' \in (H_1 + H_2)^{\perp}$　であり、

$(H_1 + H_2)^{\perp} \supset {H_1}^{\perp} \bigcap {H_2}^{\perp}$　が成り立つ。

◆ 問題１４

$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$,　$\vec{a}$ を規格化して、$\vec{f}_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$　とする。

1. $\vec{f}_1$ を含む $\mathbf{R}^3$ の正規直交系 $\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3$ を求めよ。

2. $V=\left(\mathbf{R}\vec{f}_1\right)^{\perp}$ に関して、$\vec{x}$ をおりかえしたベクトル $\vec{y}$ を、$F=\begin{pmatrix}\vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3\end{pmatrix}$ を用いて表せ。
3. $\vec{y}=Q\vec{x}$ とするとき、$\det Q$ を求めよ。

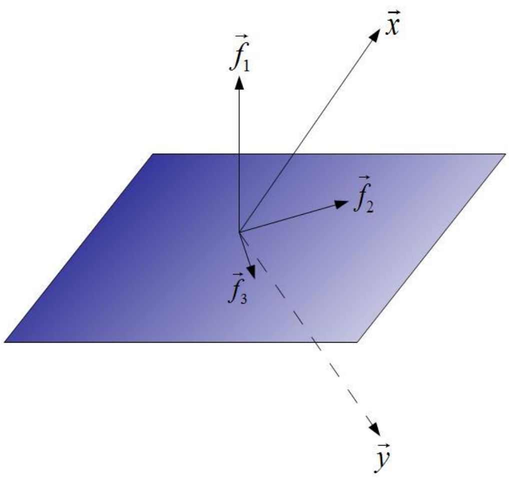
解）

1. $\vec{f}_1$ と垂直なベクトルを適当に作ると、

$$\vec{f}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

また、$\vec{f}_3$ は、$\vec{f}_1,\vec{f}_2$ の外積で作れるから、

$$\vec{f}_3=\vec{f}_1\times\vec{f}_2=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$



2. V は $\vec{f}_2,\vec{f}_3$ によって張られる。

$\vec{y}$ について、図より、

$\vec{f}_1$ 成分は $-(\vec{x}$ の $\vec{f}_1$ への正射影$)$ に等しく、

V 上の成分については、
$\vec{x}$ の V への正射影に等しい。

$$
\begin{aligned}
\vec{y} &= (-1)\vec{f}_1(\vec{x},\vec{f}_1)+\vec{f}_2(\vec{x},\vec{f}_2)+\vec{f}_3(\vec{x},\vec{f}_3) \\
&= \begin{pmatrix}\vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-(\vec{x},\vec{f}_1) \\ (\vec{x},\vec{f}_2) \\ (\vec{x},\vec{f}_3)\end{pmatrix} \\
&= F\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}{}^tF\vec{x} \\
&= F\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}F^{-1}\vec{x}
\end{aligned}
$$

F は直交行列です。
一般に、直交行列に対し、
${}^tF = F^{-1}$
が成り立ちます。

※2.　の別解

$\vec{x} = x_1\vec{f}_1 + x_2\vec{f}_2 + x_3\vec{f}_3$ と表されたとすると、

$\vec{x}$ は、$\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ を軸とする空間座標系で、(x_1, x_2, x_3) と表されます。

したがって、$\vec{y}$ はその座標系で、$(-x_1, x_2, x_3)$ と表されます。

このことを使うと次のような解答になります。

$\vec{x} = F\vec{\xi}$,　$\vec{y} = F\vec{\eta}$ とすると、

$\vec{\eta} = \begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\vec{\xi}$　から、

$$
\vec{y} = F\vec{\eta} = F\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}\vec{\xi} = F\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}F^{-1}\vec{x}
$$

となります。

3.　$Q = F\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}F^{-1}$　より、

$$\begin{aligned}\det Q &= \det\left(F\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}F^{-1}\right) \\ &= \det(F)\det\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}\det F^{-1} \\ &= -1\end{aligned}$$

解説）一般に、

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

が成り立つ。

また、

$\begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$という三角行列の場合、その行列式は、対角成分の積$abc$になる。

$\boxed{\text{行列式}}$

行列式の基本をおさらいしよう。

行列 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{pmatrix}$　と表すことにする。

i. $\det(A) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 + \lambda \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}$

$\mathbf{a}_1$ を実数倍してほかの行に足すのは OK

ii. $\det(A) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}$

行や列を交換するときは－１倍する。

iii. $\det(A) = \begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda}\begin{vmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \lambda \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{vmatrix}$

ある行を λ 倍するときは全体を 1/λ 倍する。

◆ 問題 16

R_1, R_2 が直交行列　$\Rightarrow$ $R_1 R_2$ も直交行列 を示せ。

解）

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ とする。

$$\begin{aligned}((R_1R_2)\vec{x}, (R_1R_2)\vec{y}) &= ({}^tR_1R_1R_2\vec{x}, R_2\vec{y}) \\ &= ((R_1^{-1}R_1R_2\vec{x}, R_2\vec{y}) \\ &= ({}^tR_2R_2\vec{x}, \vec{y}) \\ &= (\vec{x}, \vec{y})\end{aligned}$$

（証明終）

解説）$\boxed{\text{直交行列}}$

直交行列とは、行列を構成するベクトル同士が互いに直交している行列のことである。

ここで

$\boxed{\text{直交行列}\Leftrightarrow\text{内積を変えない行列}}$

となることを見てみよう。

有名な 2×2 行列として$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

を考える。

←もちろん
$$\left(\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}\right) = 0$$

これはあるベクトル$\vec{x}, \vec{y}$ を θ 回転させるだけで、
内積は変えない。
一般の直交行列はこれを拡張したものだと考えてほしい。

また、R が直交行列であることと次の 3 つは同値である。

A） ${}^tRR = R{}^tR = I$

B） 内積を変えない

C） $R = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 & \cdots & \vec{r}_n \end{pmatrix}$とした時、$\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_n$ は互いに直交し、ノルムが 1

◆ 問題１７

$\det\left(I_3 - {}^t\mathbf{aa}\right)$を求めよ。　ただし、$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$とする。

解）

$$\det\left(I_3-\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{pmatrix}\right)=\det\left(\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a_1{}^2 & a_1a_2 & a_1a_3\\ a_2a_1 & a_2{}^2 & a_2a_3\\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3{}^2\end{pmatrix}\right)$$

$$=\det\begin{pmatrix}1-a_1{}^2 & -a_1a_2 & -a_1a_3\\ -a_2a_1 & 1-a_2{}^2 & -a_2a_3\\ -a_3a_1 & -a_3a_2 & 1-a_3{}^2\end{pmatrix}$$

$$=\cdots$$

$$=1-a_1{}^2-a_2{}^2-a_3{}^2$$

補足）
一般に行列式は転置しても変わらない。

すなわち、任意の行列について $\det(A)=\det({}^tA)$　が成り立つ。

◆ 問題１８

$\alpha\neq\beta,\beta\neq\gamma,\gamma\neq\alpha$ とする。

ｎ次正方行列 A に対して $\vec{v}_i\in\mathbf{R}$ が

$$\begin{cases}A\vec{v}_1=\alpha\vec{v}_1\\ A\vec{v}_2=\beta\vec{v}_2\\ A\vec{v}_3=\gamma\vec{v}_3\end{cases}$$ が成立するとする。

1. $\vec{v}_1+\vec{v}_2=\vec{0}$　ならば　$\vec{v}_1=\vec{v}_2=\vec{0}$ となることを示せ。

2. $\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3=\vec{0}$　ならば　$\vec{v}_1=\vec{v}_2=\vec{v}_3=\vec{0}$　となることを示せ。

Hint

$(A-\gamma I_n),(A-\beta I_n)$ をかけてみる。

解）

1.　（異なる固有値の固有ベクトルがそれぞれ線形独立であることを証明しようとしている）

$\vec{v}_1+\vec{v}_2=\vec{0}$ の両辺に、左から $(A-\alpha I_n)$ をかけて、

$$\begin{aligned}(A-\alpha I_n)(\vec{v}_1+\vec{v}_2)&=\vec{0}\\(A-\alpha I_n)\vec{v}_1+(A-\alpha I_n)\vec{v}_2&=\vec{0}\\\vec{0}+(\beta-\alpha)\vec{v}_2&=\vec{0}\\\vec{v}_2&=\vec{0}\quad(\because \beta\neq\alpha)\end{aligned}$$

したがって、$\vec{v}_1=\vec{v}_2=\vec{0}$

2.　$\vec{v}_1+\vec{v}_2+\vec{v}_3=\vec{0}$　に両辺左から $(A-\alpha I_n)$ をかけると

$\vec{0}+(\beta-\alpha)\vec{v}_2+(\gamma-\alpha)\vec{v}_3=\vec{0}$　となり

両辺に左から $(A-\beta I_n)$ をかけると

$$\begin{aligned}\vec{0}+(\beta-\alpha)\cdot\vec{0}+(\gamma-\alpha)(A-\beta I_n)\vec{v}_3&=\vec{0}\\(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\vec{v}_3&=\vec{0}\end{aligned}$$

$(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\neq 0$ より、　$\vec{v}_3=\vec{0}$ が従う

$\therefore \vec{v}_1+\vec{v}_2=\vec{0}$

前問より

$\therefore \vec{v}_1=\vec{v}_2=\vec{v}_3=\vec{0}$

（証明終）

補足）異なる固有値の固有ベクトルは互いに線形独立なのは覚えておこう。

◆ 問題１９

写像 f を

$$S_n \mapsto S_n$$

$$\sigma \mapsto \sigma^{-1}$$

とする。

このとき、f が単射であることを示せ。

S_n ：n 次の置換全体の集合

σ ：置換

解）

$\sigma \neq \sigma'$ とすると、ある $i \in \{1,2,3,\cdots,n\}$ に対し、

$$\sigma(i) \neq \sigma'(i)$$

が成立する。

$\leftarrow \sigma \neq \sigma' \Rightarrow \sigma^{-1} \neq (\sigma')^{-1}$

を示したい。

$k = \sigma(i)$ とすると、 $\sigma^{-1}(k) = i$ となるが、

$l = \sigma'(i)$ とすると、 $k \neq l$ が成立し、

$(\sigma')^{-1}$ が単射なので、

$\sigma'^{-1}(k) \neq \sigma'^{-1}(l) = i$ が従う。

よって、

$\sigma^{-1}(k) \neq \sigma'^{-1}(k)$ より、

$\sigma^{-1} \neq (\sigma')^{-1}$ が成立。

解説）難しいしできる必要ないかも

◆ 問題２０

A を３次の対称行列とする。 $\alpha \neq \beta$ のもとで、

$A\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1$, $A\vec{v}_2 = \beta\vec{v}_2$ とするとき、

$(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \vec{0}$ を示せ。

解）

$$\left(A\vec{v}_1, \vec{v}_2\right) = \left(\vec{v}_1, A\vec{v}_2\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(\alpha\vec{v}_1, \vec{v}_2\right) = \left(\vec{v}_1, \beta\vec{v}_2\right)$$
$$\Leftrightarrow \alpha\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2\right) = \beta\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2\right)$$
$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta)\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2\right) = 0$$

←対称行列のとき、${}^tA = A$

$\alpha \neq \beta$　より、　$\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2\right) = \vec{0}$

解説）問題１８で、異なる固有値の固有ベクトルは線形独立となることを示したが、

この問いで、$\boxed{\text{対称行列}}$のときに限り、異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する（！）ことを示した。

よって、対称行列を対角化するときに出てくるPは必ず直交行列にできる！！

それが、次の問題である。

◆ 問題２１

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$ を直交行列で対角化せよ。

解）

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= \cdots$$
$$= -(\lambda - 2)(\lambda - 5)(\lambda + 1)$$

$\therefore$　固有値$\lambda = 2, 5, -1$

$\lambda = 2$ のとき

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = O_3 \quad \text{を解いて、}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} z \text{ となる。} \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{p}_1 \text{ とする。}$$

$\lambda = 5, -1$ のとき、同様にして、

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{p}_2, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{p}_3 \quad \text{を得る。}$$

このように $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ を定めると、これらは互いに直交していて、ノルムが 1 であることが分かる。

$P = \begin{pmatrix} \vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \vec{p}_3 \end{pmatrix}$ と置くと、

$$\begin{aligned} AP &= \begin{pmatrix} A\vec{p}_1 & A\vec{p}_2 & A\vec{p}_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\vec{p}_1 & 5\vec{p}_2 & -\vec{p}_3 \end{pmatrix} \\ &= P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore A = P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 5 & \\ & & -1 \end{pmatrix}P^{-1}$$

◆ 問題２２

1. $A \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R})$ を対称行列とする。

A の固有値を α, β 、$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ とするとき、

$$\begin{aligned} &(A\vec{x}, \vec{x}) \geq 0 \quad (\forall \vec{x} \in \mathbf{R}^2) \cdots (1) \\ &\qquad \Leftrightarrow \alpha, \beta \geq 0 \cdots (2) \\ &\qquad \Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0, \det(A) \geq 0 \cdots (3) \end{aligned}$$

を示せ。

$\mathbf{M}_2$ ：2×2 の実行列の集合

2. $B = (\vec{a} \quad \vec{b})$ を m 行２列の実行列とする。

$A={}^tBB$ を 1.に対して適用することで、
Cauchy-Schwarz の不等式

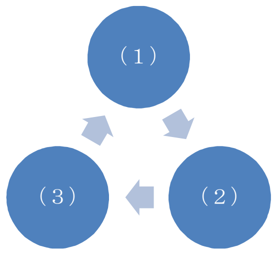
$$|(\vec{a}, \vec{b})| \leq \|\vec{a}\| \|\vec{b}\|$$

を示せ。

解）

1.

$(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1) \Rightarrow (2)$ を示せば、
$(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$ を示したことになる。



$(2) \Rightarrow (3)$ を示す。

A について、Cayley-Hamilton の定理より、

$$A^2 - (a+b)A + (ab - c^2)I_2 = O_2$$

また、$\Phi_A(A) = (A - \alpha I_2)(A - \beta I_2) = O_2$

解と係数の関係より、

$$a+b=\alpha+\beta\geq 0 \quad (\because \alpha,\beta\geq 0)$$

$$ab-c^2=\alpha\beta\geq 0$$

$$\therefore ab\geq 0$$

$$\therefore a\geq 0, b\geq 0$$

また、$ab-c^2\geq 0$ より、

$$\det(A)\geq 0$$

$(3)\Rightarrow(1)$ を示す。

$$(A\vec{x},\vec{x})=\left(\begin{pmatrix} ax+cy \\ cx+by \end{pmatrix},\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$=ax^2+2cxy+by^2$$

のもとで、

（ア）$a\neq 0$ のとき、

$$\det(A)=ab-c^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow ab\geq c^2$$

$$\Leftrightarrow b\geq \frac{c^2}{a}$$ より、

$$\begin{aligned}(A\vec{x},\vec{x})&=ax^2+2cxy+by^2\\ &\geq ax^2+2cxy+\frac{c^2}{a}y^2\\ &=\frac{1}{a}(ax+cy)^2\\ &\geq 0\end{aligned}$$

（イ）$a=0$ のとき

$0=ab\geq c^2$ より、$c=0$

$$\therefore (A\vec{x},\vec{x})=by^2\geq 0$$

$(1)\Rightarrow(2)$ を示す。

A は直交行列で対角化可能なので、

$$A=R\begin{pmatrix} \alpha & \\ & \beta \end{pmatrix}{}^tR \quad (R：直交行列で、R^{-1}={}^tR)$$

と置く。

$$
\begin{aligned}
\left(A\vec{x},\vec{x}\right) &= \left(R\begin{pmatrix}\alpha & \\ & \beta\end{pmatrix}{}^tR\vec{x},\vec{x}\right)\\
&= \left(\begin{pmatrix}\alpha & \\ & \beta\end{pmatrix}{}^tR\vec{x},{}^tR\vec{x}\right)\\
&= \left(\begin{pmatrix}\alpha & \\ & \beta\end{pmatrix}\vec{\xi},\vec{\xi}\right) \qquad \left({}^tR\vec{x}=\vec{\xi}=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}\ \text{とした。}\right)\\
&= \alpha{\xi_1}^2+\beta{\xi_2}^2\\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

$\xi_1=0,\quad \xi_2\neq 0$ となるように $\vec{x}$ をとると、$\beta\geq 0$
$\xi_1\neq 0,\quad \xi_2=0$ となるように $\vec{x}$ をとると、$\alpha\geq 0$

以上より、題意は示された。

2.

$$
\begin{aligned}
A &= {}^tBB\\
&= \begin{pmatrix}\vec{a}\\ \vec{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\|\vec{a}\|^2 & \left(\vec{a},\vec{b}\right)\\ \left(\vec{a},\vec{b}\right) & \|\vec{b}\|^2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となるので、

det(A) を考えればよい。

1. より、

$$
\begin{aligned}
\det(A) = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2-\left(\vec{a},\vec{b}\right)^2 &\geq 0\\
\Leftrightarrow \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 &\geq \left(\vec{a},\vec{b}\right)^2\\
\Leftrightarrow \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| &\geq \left|\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|
\end{aligned}
$$

となるので、題意はしめされた。

◆ 問題２３

次の置換の符号を求めよ。

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & & n & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & & 2 & 1 \end{pmatrix}$

解）

1.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & & n & 1 \end{pmatrix}$$
$$= (1 \quad n)(1 \quad n-1)\cdots(1 \quad 3)(1 \quad 2)$$

←互換の積が n-1 個

したがって、$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & (n\text{が奇数}) \\ -1 & (n\text{が偶数}) \end{cases}$

2.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= (1 \quad n)(2 \quad n-1)\cdots$$

(ア) n が偶数のとき

$$\sigma = (1 \quad n)(2 \quad n-1)\cdots\left(\frac{n}{2} \quad \frac{n}{2}+1\right)$$

$\leftarrow \frac{n}{2}$ 個

(イ) n が奇数のとき

$$\sigma = (1 \quad n)(2 \quad n-1)\cdots\left(\frac{n-1}{2} \quad \frac{n+1}{2}\right)$$

$\leftarrow \frac{n-1}{2}$ 個

したがって、

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \begin{cases} 1 & ((n : e.n. \wedge n/2 : e.n.)\, or\, (n : o.n. \wedge (n-1)/2 : e.n.)) \\ -1 & ((n : e.n. \wedge n/2 : o.n.)\, or\, (n : o.n. \wedge (n-1)/2 : o.n.)) \end{cases}$$

e.n.：偶数
o.n.：奇数としました。
∧は「かつ」を表します。

解説）$\boxed{\text{置換の符号}}$

置換σについての置換の符号は

$$\mathrm{sgn}(\sigma)=\begin{cases}1 & (\sigma\text{が偶数個の互換の積})\\ -1 & (\sigma\text{が奇数個の互換の積})\end{cases}$$

であらわされます。

行列式を定義するときなどに使われます。

◆ 問題２４

次の行列式を求めよ。

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3\end{vmatrix}$$

解）

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a & d-a\\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2\\ 0 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ b+a & c+a & d+a\\ b^2+ab+a^2 & c^2+ca+a^2 & d^2+da+a^2\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & c-b & d-b\\ 0 & c^2-b^2+a(c-b) & d^2-b^2+a(d-b)\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix}1 & 1\\ c+b+a & d+b+a\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

◆ 問題２５

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ が一直線上にある必要十分条件は、

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ であることを示せ。

解）三点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ をとおる直線

$ax + by + c = 0$　を仮定する。

このとき、連立方程式

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \\ ax_3 + by_3 + c = 0 \end{cases}$$

に自明でない(non-trivial)解が存在する。

すなわち、

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{0}$$

に自明でない(non-trivial)解が存在する。

したがって、

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

逆にこれが成り立つと、$(a, b, c) \neq (0,0,0)$ が存在する。

（証明終）

◆ 問題２６

$n<m$ とする。
A が m×n 行列、B が n×m 行列のとき、
$\det(AB)=0$
を示せ。

解）

$n<m$ のとき、$B\in\mathbf{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ には

$\vec{v}\neq 0$　を満たす
$B\vec{v}=\vec{0}$　の解が存在する。

このとき、

$AB\vec{v}=\vec{0},\quad \vec{v}\neq\vec{0}$　が成り立つので、

$\det(AB)=0$　が成立する。

解説）

ざっくり説明すると、横に長い行列（さっきの B とか）については、

$$PB=\begin{pmatrix}1&&&&&&\\&1&&&*&*&*\\&&1&&&&\\&&&1&&&\end{pmatrix}$$

$\leftarrow P$ は基本行列

上のように変形でき、このとき、$\mathrm{Im}(B)$ の基底は４本。
次元定理より、$\dim(\ker(B))=7-4=3$ となるので、

$B\vec{v}=\vec{0}$　となる、$\vec{v}$ の基底が三つ存在することになる。

$B\vec{v}=\vec{0}$ を満たす $\vec{v}$ が存在する。

次元定理
$\dim(\ker(B))+\dim(\mathrm{Im}(B))=n$
$\ker(B)$ の基底の本数と $\mathrm{Im}(B)$ の基底の本数がの和が n になること。
この場合 $n=7$

一般にあるベクトル $\vec{v}$ に写像 B を施すと、その像 $\mathrm{Im}(B)=B\vec{v}$ が表す空間は全空間よりも小さい、または等しい空間になる。
このとき、減少した空間は、写像 B をほどこして、$\vec{0}$ になってしまう空間、つまり、$B\vec{v}=\vec{0}$ となるような $\vec{v}$ の集合 $\ker(B)$ に等しい。

◆ 問題２７

> $\alpha \neq \beta, \beta \neq \gamma, \gamma \neq \alpha$ とする。
>
> $d_1(t)(t-\alpha)(t-\beta) + d_2(t)(t-\beta)(t-\gamma) + d_3(t)(t-\gamma)(t-\alpha) = 1$ 　を満たす、
>
> $d_i(t) \quad (i=1,2,3)$ をもとめよ。

解）に入る前に…

例題

> $\alpha \neq \beta$ とする。
> $d_1(t-\alpha) + d_2(t-\beta) = 1$ 　を満たす、d_1, d_2 を求めよ。

例題の答）

$$\frac{1}{t-\beta} - \frac{1}{t-\alpha} = \frac{\beta-\alpha}{(t-\alpha)(t-\beta)}$$ から、

$\alpha \neq \beta$ のとき、$\dfrac{1}{\beta-\alpha}\left(\dfrac{1}{t-\beta} - \dfrac{1}{t-\alpha}\right) = \dfrac{1}{(t-\alpha)(t-\beta)}$ となる。

これから、$\dfrac{1}{\beta-\alpha}(t-\alpha) - \dfrac{1}{\beta-\alpha}(t-\beta) = 1$

$$\therefore d_1 = \frac{1}{\beta-\alpha}, \quad d_2 = -\frac{1}{\beta-\alpha}$$

これを利用して問題２７を解きます。

解）

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(t-\alpha)(t-\beta)(t-\gamma)} &= \frac{1}{\beta-\alpha}\frac{1}{(t-\beta)(t-\gamma)} - \frac{1}{\beta-\alpha}\frac{1}{(t-\gamma)(t-\alpha)} \\
&= \frac{1}{\beta-\alpha}\frac{1}{\beta-\gamma}\left(\frac{1}{t-\beta} - \frac{1}{t-\gamma}\right) - \frac{1}{\alpha-\gamma}\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{t-\alpha} - \frac{1}{t-\gamma}\right) \\
&= \frac{1}{(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)}\frac{1}{t-\alpha} + \frac{1}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}\frac{1}{t-\beta} + \frac{1}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}\frac{1}{t-\gamma}
\end{aligned}$$

から、

$$\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)}(t-\beta)(t-\gamma)+\frac{1}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}(t-\alpha)(t-\gamma)+\frac{1}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}(t-\alpha)(t-\beta)=1$$

となる。

◆ 問題２９

> $\alpha\neq\beta$ とする。
>
> $d_1(t)(t-\alpha)^2+d_2(t-\beta)^2=1$　をみたす、
>
> $d_1(t),d_2(t)$ を求めよ。

解）

$$\frac{1}{(t-\alpha)^2(t-\beta)^2}=\left\{\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{1}{t-\beta}-\frac{1}{t-\alpha}\right)\right\}^2$$

$$=\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\left\{\frac{1}{(t-\beta)^2}-\frac{2}{(t-\alpha)(t-\beta)}+\frac{1}{(t-\alpha)^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\frac{1}{(t-\beta)^2}-\frac{2}{(\beta-\alpha)^3}\frac{1}{t-\beta}+\frac{2}{(\beta-\alpha)^3}\frac{1}{t-\alpha}+\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}\frac{1}{(t-\alpha)^2}$$

となるので、

両辺に $(t-\alpha)^2(t-\beta)^2$ をかけて、

$$1=\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}(t-\alpha)^2-\frac{2}{(\beta-\alpha)^3}(t-\alpha)^2(t-\beta)+\frac{2}{(\beta-\alpha)^3}(t-\alpha)(t-\beta)^2+\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}(t-\beta)^2$$

$$=(t-\alpha)^2\left\{\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}-\frac{2(t-\beta)}{(\beta-\alpha)^3}\right\}+(t-\beta)^2\left\{\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}+\frac{2(t-\alpha)}{(\beta-\alpha)^3}\right\}$$

したがって、

$$d_1(t)=\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}-\frac{2(t-\beta)}{(\beta-\alpha)^3},\quad d_2(t)=\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}+\frac{2(t-\alpha)}{(\beta-\alpha)^3}$$

◆ 問題２９

$A(t)=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1(t)\\ \mathbf{a}_2(t)\\ \mathbf{a}_3(t)\end{pmatrix}$ を $\mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ 値の関数とする。

このとき、$\dfrac{d}{dt}\left(\det\left(A(t)\right)\right)$ を求めよ。

解）

$\det\left(A(t)\right)=\sum_{\sigma}\mathrm{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}$ となる。 ←行列式の定義

$$\frac{d}{dt}\left(\det\left(A(t)\right)\right)=\sum_{\sigma}\mathrm{sgn}(\sigma)\left\{\frac{d}{dt}\left(a_{1\sigma(1)}\right)a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}+a_{1\sigma(1)}\frac{d}{dt}\left(a_{2\sigma(2)}\right)a_{3\sigma(3)}+a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\frac{d}{dt}\left(a_{3\sigma(3)}\right)\right\}$$

$$=\begin{vmatrix}\dfrac{d}{dt}\mathbf{a}_1(t)\\ \mathbf{a}_2(t)\\ \mathbf{a}_3(t)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1(t)\\ \dfrac{d}{dt}\mathbf{a}_2(t)\\ \mathbf{a}_3(t)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\mathbf{a}_1(t)\\ \mathbf{a}_2(t)\\ \dfrac{d}{dt}\mathbf{a}_3(t)\end{vmatrix}$$

↑積の微分法を用いました。

◆ 問題３０

$A\in\mathbf{M}_3(\mathbf{K})$ のとき、

$\dfrac{d}{d\lambda}\Phi_A(0)$ を求めよ。

解）

$$\frac{d}{d\lambda}\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23}\\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ 0 & 1 & 0\\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-a_{22} & -a_{23}\\ -a_{32} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{13}\\ -a_{31} & \lambda-a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22}\end{vmatrix}$$

↑問題２９の結果を用いました。

より、

$$\frac{d}{d\lambda}\Phi_A(0)=\widetilde{A}_{11}+\widetilde{A}_{22}+\widetilde{A}_{33}$$

ただし、$\widetilde{A}_{ij}$ は (i,j) 余因子。

◆ 問題３１

$\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3$ を $\mathbf{R}^3$ の基底とする。

$\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3$ から、Gram-Schmidt 直交化法を用いて、正規直交基底 $\vec{p}_1,\vec{p}_2,\vec{p}_3$ を作る。

このとき、

$$\begin{pmatrix}\vec{p}_1 & \vec{p}_2 & \vec{p}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}* & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & *\end{pmatrix}$$

という形になることを示せ。
さらに、右辺の上三角行列が正則であることを示せ。

解）

$\vec{p}_1=\dfrac{1}{\|\vec{x}_1\|}\vec{x}_1$ とおく。

$\vec{w}_2$ を $\vec{x}_2$ の $\vec{x}_1$ 方向への正射影とすると、

$$\vec{w}_2=\frac{(\vec{x}_1,\vec{x}_2)}{\|\vec{x}_1\|^2}\vec{x}_1$$

ここで、$\beta=\dfrac{(\vec{x}_1,\vec{x}_2)}{\|\vec{x}_1\|^2},\quad \gamma=\|\vec{x}_2-\beta\vec{x}_1\|$ とおくと、

$$\vec{p}_2=\frac{1}{\gamma}\left(\vec{x}_2-\beta\vec{x}_1\right)$$ とかける。

$\vec{w}_3$ を $\vec{x}_3$ の $\mathbf{R}\vec{x}_1+\mathbf{R}\vec{x}_2$ への正射影とすると、

$$\begin{aligned}\vec{w}_3&=\left(\vec{p}_1,\vec{x}_3\right)\vec{p}_1+\left(\vec{p}_2,\vec{x}_3\right)\vec{p}_2\\&=\frac{\left(\vec{x}_1,\vec{x}_3\right)}{\left\|\vec{x}_1\right\|^2}\vec{x}_1+\frac{\left(\vec{p}_2,\vec{x}_3\right)}{\gamma}\left(\vec{x}_2-\beta\vec{x}_1\right)\\&=\delta_1\vec{x}_1+\delta_2\vec{x}_2\end{aligned}$$

と表せるので、$\delta_3=\left\|\vec{x}_3-\delta_1\vec{x}_1-\delta_2\vec{x}_2\right\|$ とおくと、

$$\vec{p}_3=\frac{1}{\delta_3}\left(\vec{x}_3-\delta_1\vec{x}_1-\delta_2\vec{x}_2\right)$$

以上から、$X=\left(\vec{x}_1\quad\vec{x}_2\quad\vec{x}_3\right),\alpha=\dfrac{1}{\left\|\vec{x}_1\right\|}$ とすると、

$$\left(\vec{p}_1\quad\vec{p}_2\quad\vec{p}_3\right)=X\begin{pmatrix}\alpha&-\dfrac{\beta}{\gamma}&-\dfrac{\delta_1}{\delta_3}\\0&\dfrac{1}{\gamma}&-\dfrac{\delta_2}{\delta_3}\\0&0&\dfrac{1}{\delta_3}\end{pmatrix}$$

において、

$$\det\begin{pmatrix}\alpha&-\dfrac{\beta}{\gamma}&-\dfrac{\delta_1}{\delta_3}\\0&\dfrac{1}{\gamma}&-\dfrac{\delta_2}{\delta_3}\\0&0&\dfrac{1}{\delta_3}\end{pmatrix}=\alpha\cdot\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\delta_3}\neq0$$ より $$\begin{pmatrix}\alpha&-\dfrac{\beta}{\gamma}&-\dfrac{\delta_1}{\delta_3}\\0&\dfrac{1}{\gamma}&-\dfrac{\delta_2}{\delta_3}\\0&0&\dfrac{1}{\delta_3}\end{pmatrix}$$ は正則。

解説）Gram-Schmidt 直交化法

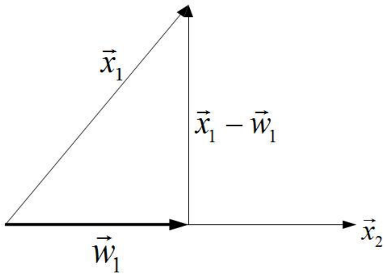
線形独立な３つのベクトル $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3$ があるとする。

① まず、$\vec{x}_1,\vec{x}_2$ を用いて直交する単位ベクトルを作る。

図より、

$$\left(\vec{x}_1 - \vec{w}_1\right) \perp \vec{x}_2$$

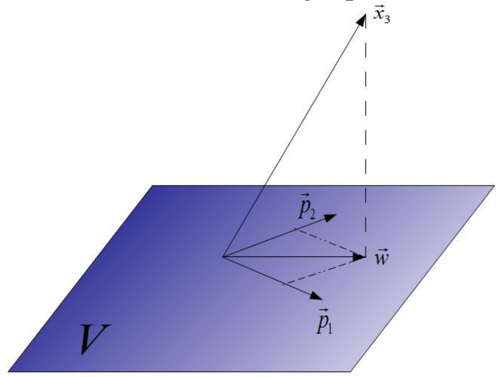
がわかる。



$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\left\|\vec{x}_2\right\|}\vec{x}_2$$

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{\left\|\vec{x}_1 - \vec{w}_1\right\|}\left(\vec{x}_1 - \vec{w}_1\right)$$

② つぎに、$\vec{p}_1, \vec{p}_2$ が張る平面への $\vec{x}_3$ の正射影を考え、それから $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ に直交する、長さ1のベクトル $\vec{p}_3$ を作る。



$\vec{x}_3 - \vec{w}$ は平面と直交する。

$$\therefore \vec{p}_3 = \frac{1}{\left\|\vec{x}_3 - \vec{w}\right\|}\left(\vec{x}_3 - \vec{w}\right)$$

このように、$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ を定めるのが Gram-Schmidt 直交化法である。

◆ 問題３２

$A \in \mathbf{M}_3(\mathbf{R})$ とする。$A = (a_{ij})$ に対し、$a_{ij} \in \mathbf{Z}$ とし、A は正則とする。

A^{-1} のすべての成分が整数 $\Leftrightarrow |A| = \pm 1$ を示せ。

解）

$a_{ij} \in \mathbf{Z}$ かつ $a^{-1}{}_{ij} \in \mathbf{Z}$ $\Rightarrow$ $|A|, |A^{-1}|$ はそれぞれ整数となる。（定義より明らか）

Z は整数全体の集合

また、$\left|A\right|\left|A^{-1}\right| = \left|AA^{-1}\right| = 1$ であるから、

$$\begin{cases} \left|A\right| = \left|A^{-1}\right| = 1 \\ \left|A\right| = \left|A^{-1}\right| = -1 \end{cases}$$ のいずれか。

したがって題意は示された。

◆ 問題３３

$A=\begin{pmatrix} 6 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ に対して、

$\Phi_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$　を示し、
$V(-1), V(1), V(2)$ への射影を A で表せ。

$V(\lambda)$ ：その固有値の固有ベクトルが張る空間（固有空間）

解）

$$\Phi_A(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-6 & 3 & 7 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ -5 & 3 & \lambda+6 \end{vmatrix}$$
$$=\cdots$$
$$=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$$

計算しよう！！

ここで、任意の $\vec{x}$ を
$\vec{p}\in V(-1), \vec{q}\in V(1), \vec{r}\in V(2)$ を用いて
$\vec{x}=\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}$ と分解する。

射影とはベクトルなどのある方向を取り出す写像、または、取り出された像をさす。

$\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ 方向成分を取り出す写像（$V(-1), V(1), V(2)$ への射影）は、それぞれ

$$\frac{(A-I)(A-2I)}{(-1-1)(-1-2)}=\frac{1}{6}(A-I)(A-2I)$$
$$\frac{(A+I)(A-2I)}{(1+1)(1-2)}=-\frac{1}{2}(A+I)(A-2I)$$
$$\frac{(A+I)(A-I)}{(2+1)(2-1)}=\frac{1}{2}(A+I)(A-I)$$

解説）上の式は、つまり、たとえば、$V(-1)$ の射影 $\frac{1}{6}(A-I)(A-2I)$ は $\vec{x}$ に左からかけると、

$$\frac{1}{6}(A-I)(A-2I)\vec{x}=\vec{p}$$

となるようなもの（射影）を頭を働かして、選んでいる、ということ。

◆ 問題３４

問題３３での行列Aについて、

A^nをA^2, A, I_3を表せ。

解）勝手な$\vec{x}=\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}$について、左から$A^n$かけて、

$$\begin{aligned}A^n\vec{x} &= (-1)^n\vec{p}+\vec{q}+2^n\vec{r}\\ &= \left\{\frac{(-1)^n}{6}(A-I)(A-2I)-\frac{1}{2}(A+I)(A-2I)+2^{n-1}(A+I)(A-I)\right\}\vec{x}\\ &= \frac{1}{6}\left[\left\{(-1)^n-3+3\cdot 2^n\right\}A^2+\left\{(-1)^n(-3)+3\right\}A+\left\{2\cdot(-1)^n+6-3\cdot 2^n\right\}I_3\right]\vec{x}\end{aligned}$$

これが勝手な$\vec{x}$で成り立つので、

$$A^n=\frac{1}{6}\left[\left\{(-1)^n-3+3\cdot 2^n\right\}A^2+\left\{(-1)^n(-3)+3\right\}A+\left\{2\cdot(-1)^n+6-3\cdot 2^n\right\}I_3\right]$$

◆ 問題３５

$A=\begin{pmatrix}7 & 1 & -2\\ 1 & 7 & -2\\ -2 & -2 & 10\end{pmatrix}$を直交行列で対角化し、

$\|\vec{x}\|=1$のもとで、$(A\vec{x},\vec{x})$の最大値、最小値を求めよ。

解）

$\Phi_A(\lambda)=(\lambda-6)^2(\lambda-12)$より、$\lambda=6,12$が固有値。

（ア）$\lambda=6$の固有空間について考える。

$(6I_3-A)\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\vec{0}\cdots$① とすると、

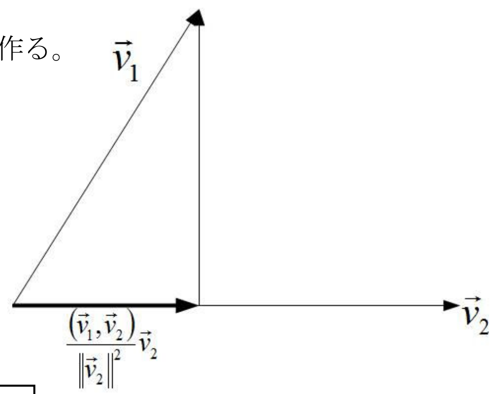
$$\left(6I_3 - A\right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ となるので、

$x = -y + 2z$ が①の必要十分条件

そこで、$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ より、

$V(6)$ の基底が、$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と、$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であることがわかる。

そこで、$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ を用いて、$V(6)$ の正規直交基底を作る。
$\vec{v}_2$ に垂直なベクトルを考えると、図より、



$$\vec{v}_1 - \frac{(\vec{v}_1, \vec{v}_2)}{\|\vec{v}_2\|^2}\vec{v}_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$ となる。

そこで、$\vec{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ とおく。 ←ノルムが 1

また、$\vec{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と定める。

（イ）$\lambda = 12$ のとき、

$\left(12I_3 - A\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ とすると、

$$(12I_3 - A) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ より、

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}z \\ y = -\frac{1}{2}z \end{cases}$$ となるので、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

これから、$\vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ と定める。

このとき、$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は互いに直交しておりノルムが１。

そこで、$P = (\vec{p}_1 \quad \vec{p}_2 \quad \vec{p}_3)$ とおく。

$$\begin{aligned} AP &= (6\vec{p}_1 \quad 6\vec{p}_2 \quad 12\vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1 \quad \vec{p}_2 \quad \vec{p}_3) \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 12 \end{pmatrix} \\ &= P \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と、A は直交行列 P により対角化されている。

このとき、

$$
\begin{aligned}
(A\vec{x},\vec{x}) &= (PP^{-1}APP^{-1}\vec{x},\vec{x})\\
&= ((P^{-1}AP)(P^{-1}\vec{x}),{}^tP\vec{x})\\
&= (({}^tPAP)({}^tP\vec{x}),{}^tP\vec{x})\\
&= \left(\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&12\end{pmatrix}{}^tP\vec{x},{}^tP\vec{x}\right)\\
&= \left(\begin{pmatrix}6&&\\&6&\\&&12\end{pmatrix}\vec{\xi},\vec{\xi}\right)\\
&= 6\xi_1{}^2+6\xi_2{}^2+12\xi_3{}^2
\end{aligned}
$$

←直交行列では $P^{-1}={}^tP$ が成立。（問題１６参照）

←$\vec{\xi}={}^tP\vec{x}$ とした。

と、二次形式で表される。

二次形式 : 斉二次多項式（全部の項の次数が２の多項式）のこと。

$\vec{\xi}={}^tP\vec{x}$ としたが、P が直交であるから

${}^tP$ も直交で、

$$\|\vec{x}\|^2=1\Leftrightarrow\|\vec{\xi}\|^2=\xi_1{}^2+\xi_2{}^2+\xi_3{}^2=1$$

${}^tP\,{}^t({}^tP)={}^t({}^tP)\,{}^tP=I_n$ より、

${}^tP$ も直交行列

と、制約条件は $\vec{\xi}$ で表される。

直交行列⇔内積が変わらない
⇒長さが変わらない

したがって、$\xi_3{}^2=1-\xi_1{}^2-\xi_2{}^2$ を

$$f(\xi)=6\xi_1{}^2+6\xi_2{}^2+12\xi_3{}^2$$

に代入して、

$$f(\xi)=12-6\xi_1{}^2-6\xi_2{}^2\leq 12$$

と、評価でき、

$f(\xi)=12$ のとき $\vec{\xi}=\begin{pmatrix}0\\0\\\pm1\end{pmatrix}$。

このとき、$\vec{x} = P\vec{\xi} = P\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} = \pm \vec{p}_3$

ゆえに、$\vec{x} = \pm \vec{p}_3$のとき、$(A\vec{x}, \vec{x})$は最大値１２をとることが分かった。

次に、$f(\xi)$に$\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 = 1 - \xi_3{}^2$を代入して、

$$f(\xi) = 6 + 6\xi_3{}^2 \geq 6$$

と、評価でき、

$f(\xi) = 6$のとき、

$$\vec{x} = P\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \xi_1 \vec{p}_1 + \xi_2 \vec{p}_2 \quad (\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 = 1)$$

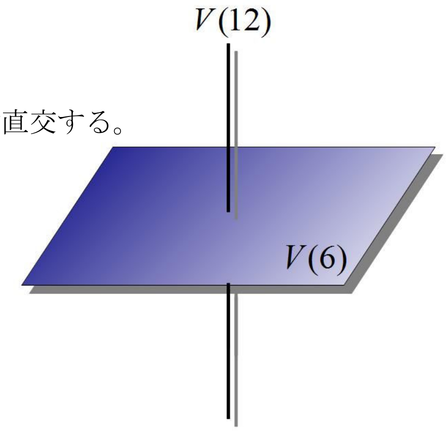
したがって、$\vec{x} = \xi_1 \vec{p}_1 + \xi_2 \vec{p}_2 \quad (\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 = 1)$のとき、最小値６をとることが分かった。

解説）

対称行列において、異なる固有値の固有ベクトルは必ず直交する。

したがって$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$は直交した。

なお、固有空間は右図のようになっている。



直交変換

ベクトルの線形変換は一般に$\vec{y} = A\vec{x}$で表されます。

もし、Aが直交行列Pと、対角行列Bを用いて、

$${}^tPAP = B$$

と対角化できたとする。ここで、

$$\vec{y} = A\vec{x}$$

の両辺に左から、${}^tP$をかけると、

$$
\begin{aligned}
{}^tP\vec{y} &= {}^tPA\vec{x} \\
&= {}^tPAP\,{}^tP\vec{x} \\
&= B\,{}^tP\vec{x} \\
&= \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix} {}^tP\vec{x}
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
\boxed{\left({}^tP\vec{y}\right) = B\left({}^tP\vec{x}\right)}
$$

と変形できます。

このように、いかに A が難しい形をしていても、直交行列で対角化できれば、上のように新たな座標軸 $\left({}^tP\vec{y}\right), \left({}^tP\vec{x}\right)$ を用いて、見通し良く問題を解決することができます。

問題３５では、$\left({}^tP\vec{x}\right) = \vec{\xi}$ とおきました。

このように、新たな座標軸 $\left({}^tP\vec{y}\right), \left({}^tP\vec{x}\right)$ を用いて、A を B になおすことを直交変換といいます。

問題３５では、$\left(A\vec{x}, \vec{x}\right)$ が $\left(\begin{pmatrix} 6 & & \\ & 6 & \\ & & 12 \end{pmatrix}\vec{\xi}, \vec{\xi}\right)$ となおせました。

◆ 問題３６

A を実対称行列とする。
$\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = 0 \Rightarrow \left(A\vec{x}, \vec{y}\right) = 0$ が成立するとき、
$A = \alpha I_n$ を満たす α が存在することを示せ。

解）

A が実対称行列なので、直交行列 P が存在し、

$$ {}^tPAP = B = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ & \ddots & \\ & & b_n \end{pmatrix} $$

と対角化できる。

$$ \begin{aligned} (A\vec{x},\vec{y}) &= (P{}^tPAP{}^tP\vec{x},\vec{y}) \\ &= (B{}^tP\vec{x},{}^tP\vec{y}) \\ &= (B\vec{\xi},\vec{\eta}) \end{aligned} $$

$\boxed{\leftarrow \vec{\xi}={}^tP\vec{x},\vec{\eta}={}^tP\vec{y} \quad \text{とした。}}$

となおせる。

ここで、$(\vec{x},\vec{y})=0$ をみたすかぎり、$\vec{x},\vec{y}$ の選び方は任意であるので、

$$ \vec{\xi}=\vec{e}_i+\vec{e}_j, \vec{\eta}=\vec{e}_i-\vec{e}_j \quad (i \neq j) $$

となるような $\vec{x},\vec{y}$ を選ぶ。

そうすると、$(\vec{\xi},\vec{\eta})=1-1=0$ より、

$$ 0=(\vec{\xi},\vec{\eta})=(P\vec{\xi},P\vec{\eta})=(\vec{x},\vec{y}) $$ となり、

$\boxed{\leftarrow P \text{ は直交行列より内積を変えない}}$

たしかに $(\vec{x},\vec{y})=0$ をみたす。

このとき、$(A\vec{x},\vec{y})=(B\vec{\xi},\vec{\eta})=0$ より、

$$ \begin{aligned} 0 &= (B\vec{\xi},\vec{\eta}) \\ &= \left(\begin{pmatrix} b_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & b_i & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & b_j & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= b_i - b_j \end{aligned} $$

$\therefore b_i = b_j \quad (i \neq j)$

$\therefore B = \alpha I_n$ なる α が存在。

したがって、

$$\begin{aligned} A &= PB^tP \\ &= P(\alpha I_n)^tP \\ &= \alpha P^tP \\ &= \alpha I_n \end{aligned}$$

なる α が存在。

◆ 問題３７

> A が歪エルミート行列とする。
> すなわち、$A^* = -A$ とする。
> このとき、A の固有値は純虚であることを示せ。
>
> A^* は A の複素共役を転置したもの。（随伴行列という）

解）

$A\vec{v} = \alpha\vec{v}$ とする。

$$\begin{aligned} (\alpha\vec{v}, \vec{v}) &= (A\vec{v}, \vec{v}) \\ &= (\vec{v}, A^*\vec{v}) \\ &= (\vec{v}, -A\vec{v}) \\ &= (\vec{v}, -\alpha\vec{v}) \\ &= -\overline{\alpha}(\vec{v}, \vec{v}) \\ &= -\overline{\alpha}\|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

$\leftarrow \overline{\alpha}$ は α の複素共役

を得る。

$\|\vec{v}\|^2 \neq 0$ より、$\alpha = -\overline{\alpha}$ がしたがうので、

α は純虚数。

解説）

今まで、$\left(A\vec{x},\vec{y}\right)=\left(\vec{x},{}^tA\vec{y}\right)$が成り立つと散々書きましたが、実は、$A$ が複素行列のとき、

$$\left(A\vec{x},\vec{y}\right)=\left(\vec{x},A^*\vec{y}\right)$$

が成立します。

A が実行列のとき、$A^*={}^tA$ なので、

$$\left(A\vec{x},\vec{y}\right)=\left(\vec{x},{}^tA\vec{y}\right)$$

と言っていたのです。

これからは、A ：複素行列のとき、

$$\left(A\vec{x},\vec{y}\right)=\left(\vec{x},A^*\vec{y}\right)$$

でおぼえてください。

$\boxed{\text{内積}}$

体$\mathbf{K}$ を実数体$\mathbf{R}$ もしくは複素数体$\mathbf{C}$ とする。

$\mathbf{K}$ 上のベクトル空間V に対して、内積とは以下の性質を満たす、

２変数関数$\langle\bullet,\bullet\rangle;V\times V\to\mathbf{K}$

のことである。

A) V の任意の元$\vec{x}$ に対して、

$\left(\vec{x},\vec{x}\right)\geq 0$ で　　　　　（正値性）

$\left(\vec{x},\vec{x}\right)=0\Leftrightarrow\vec{x}=0$　　　（正則性）

B) 任意のスカラー$\alpha,\beta\in\mathbf{K}$ と、V 上の任意のベクトル$\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{y}$ に対して、

$$\left(\alpha\vec{x}_1+\beta\vec{x}_2,\vec{y}\right)=\alpha\left(\vec{x}_1,\vec{y}\right)+\beta\left(\vec{x}_2,\vec{y}\right)$$

つまり、第一の変数について線型

C) 実数体$\mathbf{R}$ について考えるとき、

$\left(\vec{x},\vec{y}\right)=\left(\vec{y},\vec{x}\right)$　　　（対称性）

これと性質 B)から、第二の変数についても線形

複素数体$\mathbf{C}$について考えるとき、

$$(\vec{x},\vec{y})=\overline{(\vec{y},\vec{x})} \qquad \text{（Hermit 対称性）}$$

このとき、Hermit 内積、または単に内積という。

したがって、複素係数の内積については、

$$(A\vec{x},\vec{y})=(\vec{x},A^{*}\vec{y})$$

$$(\vec{x},\alpha\vec{y})=\overline{\alpha}(\vec{x},\vec{y})$$

が成立するわけである。

◆ 問題３８

Aがエルミート行列であるとする。
α,βが異なる固有値のとき、

$$A\vec{z}=\alpha\vec{z},\ A\vec{w}=\beta\vec{w}\Rightarrow\langle\vec{z},\vec{w}\rangle=0$$

を示せ。

Aがエルミート$\Leftrightarrow A=A^{*}$

解）

$$\begin{aligned}
\alpha\langle\vec{z},\vec{w}\rangle&=\langle\alpha\vec{z},\vec{w}\rangle\\
&=\langle A\vec{z},\vec{w}\rangle\\
&=\langle\vec{z},A^{*}\vec{w}\rangle\\
&=\langle\vec{z},A\vec{w}\rangle\\
&=\langle\vec{z},\beta\vec{w}\rangle\\
&=\beta\langle\vec{z},\vec{w}\rangle
\end{aligned}$$

←エルミート行列の固有値は必ず実数になる。
問題３７の歪エルミートをエルミートになおしてみるとよい（簡単に証明できるのでやってみよう）

$$\therefore(\alpha-\beta)\langle\vec{z},\vec{w}\rangle=0$$

$\alpha\neq\beta$より、

$$\langle\vec{z},\vec{w}\rangle=0$$

◆ 問題３９

$AA^{*}=A^{*}A\Rightarrow\|A\vec{z}\|=\|A^{*}\vec{z}\|$　を示せ。

解）

$$
\begin{aligned}
\|A\vec{z}\|^2 &= (A\vec{z}, A\vec{z}) \\
&= (A^* A\vec{z}, \vec{z}) \\
&= (AA^*\vec{z}, \vec{z}) \\
&= (A^*\vec{z}, A^*\vec{z}) \\
&= \|A^*\vec{z}\|^2
\end{aligned}
$$

$$\therefore \|A\vec{z}\| = \|A^*\vec{z}\|$$

◆ 問題４０

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \gamma & \delta & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha' & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \gamma' & \delta' & \varepsilon' \end{pmatrix}$ とする。

$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B) \Rightarrow \alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma', \delta = \delta', \varepsilon = \varepsilon'$ を示せ。

解）

$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(B)$ のとき、$B = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \end{pmatrix}$ とすると、

$$\vec{b}_j \in \mathrm{Im}(A)$$

が必要。

このとき、

$$\exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3, A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{b}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \alpha x + \beta y = \alpha' \\ z = 0 \\ \gamma x + \delta y + \varepsilon z = \gamma' \end{cases}$$

すなわち、

$$x = 1, y = 0, z = 0, \alpha = \alpha', \gamma = \gamma'$$

同様に、

$$\exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3, A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{b}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ \alpha x + \beta y = \beta' \\ z = 0 \\ \gamma x + \delta y + \varepsilon z = \delta' \end{cases}$$

より

$$x = 0, y = 1, z = 0, \beta = \beta', \delta = \delta'$$

$$\exists \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3, A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{b}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \alpha x + \beta y = 0 \\ z = 1 \\ \gamma x + \delta y + \varepsilon z = \varepsilon' \end{cases}$$

より

$$x = 0, y = 0, z = 1, \varepsilon = \varepsilon'$$

を得る。

◆ 問題４１

$a \neq b, b \neq c, c \neq a$ とする。
次の最小多項式を求めよ。

A) $A_1 = \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$

B) $A_2 = \begin{pmatrix} a & 1 & \\ 0 & a & \\ & & b \end{pmatrix}$

C) $A_3 = \begin{pmatrix} a & 1 & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix}$

解）

A) $\Phi_{A_1}(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)$

$\therefore m_{A_1}(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)$

B) $\Phi_{A_2}(\lambda) = (\lambda - a)^2(\lambda - b)$

$(A_2 - aI_3)(A_2 - bI_3) \neq O_3$ より、

$\therefore m_{A_2}(\lambda) = (\lambda - a)^2(\lambda - b)$

C) $\Phi_{A_3}(\lambda) = (\lambda - a)^3$

$(A_3 - aI_3) \neq O_3$
$(A_3 - aI_3)^2 = O_3$

より、

$$m_{A_3}(\lambda) = (\lambda - a)^2$$

解説）$\boxed{\text{最小多項式}}$

① $f(A) = O$

② ①を満たす $f(\lambda)$ のなかで最も次数が低いもの

③ ②を満たす $f(\lambda)$ のなかで最高次係数が１のもの

を全て満たす $f(\lambda)$ を最小多項式とよぶ。

※おもな性質※

・最小多項式は一意に定まる。

・$(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)$ のように、重根をもたなければ、その最小多項式　　は対角化可能

【見つけ方】

(ア) $\Phi_A(\lambda)$ を求める。（$\because \Phi_A(A) = |AI_n - A| = O$ は条件①を満たす。）

(イ) １　$\Phi_A(\lambda)$ が重根を持たなければ、それが最小多項式。

２　重根が存在するなら、その次数を下げた式が、条件①を満たすか確かめる。$f(A) \neq O$ となれば、条件①~③を満たすのは $\Phi_A(\lambda)$ しかないので、それに決定。

◆ 問題４２

$\alpha \neq \beta$ とする。

$$\frac{1}{(t-\alpha)^2(t-\beta)} = \frac{At+B}{(t-\alpha)^2} + \frac{C}{t-\beta}$$

を満たす定数 A, B, C を求めよ。

解）

両辺を $(t-\alpha)^2(t-\beta)$ 倍して、

$$\begin{aligned}1 &= (At+B)(t-\beta) + C(t-\alpha)^2 \\ &= (A+C)t^2 + (B - A\beta - 2C\alpha)t + C\alpha^2 - B\beta\end{aligned}$$

tに関する恒等式より、

$$\begin{cases} A+C=0 \\ B-A\beta-2C\alpha=0 \\ C\alpha^2-B\beta=1 \end{cases}$$

これを解いて、$\begin{cases} A=-\dfrac{1}{(\alpha-\beta)^2} \\ B=\dfrac{2\alpha-\beta}{(\alpha-\beta)^2} \\ C=\dfrac{1}{(\alpha-\beta)^2} \end{cases}$

◆ 問題４３

Cayley-Hamilton の定理をつかって、

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^n$ を求めよ。

解）

$$\Phi_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$$\lambda^n=q(\lambda)\Phi_A(\lambda)+a\lambda^2+b\lambda+c \qquad \cdots①$$

とすると、

$$1=q(1)\cdot 0+a+b+c \qquad \cdots②$$

$$(-1)^n=q(-1)\cdot 0+a-b+c \qquad \cdots③$$

①の両辺をλで微分して、

$$n\lambda^{n-1}=q'(\lambda)\Phi_A(\lambda)+q(\lambda)\Phi'_A(\lambda)+2a\lambda+b$$

これに　$\lambda=1$を代入して

$$n = 2a + b \qquad \cdots④$$

②，③，④から、

$$(a,b,c) = \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\left\{1 + (-1)^{n+1}\right\}, \frac{1}{2}\left\{1 + (-1)^{n+1}\right\}, \frac{1}{4}\left\{3 - 2n + (-1)^n\right\}\right)$$

①に$\lambda = A$を代入して、

$$A^n = \left[\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\left\{1 + (-1)^{n+1}\right\}\right]A^2 + \frac{1}{2}\left\{1 + (-1)^{n+1}\right\}A + \frac{1}{4}\left\{3 - 2n + (-1)^n\right\}I_3$$

解説） Cayley-Hamilton の定理

固有方程式

$\Phi_A(\lambda)$にAを代入すると、

$$\Phi_A(A) = O$$

が成立する。

A^nを求める方法

A) $\Phi_A(\lambda)$が重根を持たない、あるいはAの最小多項式が重根を持たない。

→対角化

B) A)じゃない時、

・Cayley-Hamilton の定理を利用

・A^2などしてみて、法則性を調べ、数学的帰納法

・固有空間に分解（問題３４参照）

C) それでもダメなら…

→Jordan 標準形

Jordan 標準形

Jordan 標準形の求めかた

Step1. $\Phi_A(\lambda)$、固有値$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$、固有ベクトル$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_r$を求める。

Step2.　$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_r$ について以下の作業を行う。

$\vec{v}_i=\vec{v}_{i1}$ とする。

そして、

$$(A-\alpha_i I_n)\vec{x}=\vec{v}_{i1}$$

を解く。

解がなければ、$\vec{v}_i$ に関する作業は終了。

解があるなら、

$$\vec{x}=V(\alpha_i)+\vec{v}_{i2}$$

という形で与えられる。このようにして $\vec{v}_{i2}$ を得る。

Step3,　Step2.で求めた $\vec{v}_{i2}$ に対し、

$$(A-\alpha_i I_n)\vec{x}=\vec{v}_{i2}$$

を解く。

解がなければ、$\vec{v}_i$ に関する作業は終了。

解があるなら、

$$\vec{x}=V(\alpha_i)+\vec{v}_{i3}$$

という形で与えられる。このようにして $\vec{v}_{i3}$ を得る。

以下、同じ手順を繰り返す。

この手順により、各 $\vec{v}_i$ に対して、

$$\vec{v}_{i1},\vec{v}_{i2},\cdots,\vec{v}_{ik}$$

を得ることができる。
そこで

$$P=\begin{pmatrix}\vec{v}_{11} & \cdots & \vec{v}_{1k_1} & \vec{v}_{21} & \cdots & \vec{v}_{2k_2} & \cdots & \vec{v}_{r1} & \cdots & \vec{v}_{rk_r}\end{pmatrix}$$

とする。
この行列 P が正方行列になることは定理により保証されている。
そして

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} J(\alpha_1,k_1) & O & \cdots & O \\ O & J(\alpha_2,k_2) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & O \\ O & \cdots & O & J(\alpha_r,k_r) \end{pmatrix}$$

$\leftarrow J(\alpha_i,k_i)$ を Jordan 細胞という

と表される。

この手順は分かりにくいので、実際に問題を解くことで理解しよう。

◆ 問題４４

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ を Jordan 標準形にせよ。

解）

$$\Phi_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

$\leftarrow \lambda-1$ ：重複度１
$\lambda-2$ ：重複度２

Step1.

$\lambda-1$ について、

$$(A-I_3)\vec{x}=\vec{0}_3\text{、つまり}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}=O\text{ を解くと、}\vec{x}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}z$$

$$\vec{v}_{11}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$ とおく。

固有値１のときは重複度が１なので、Jordan 細胞の大きさは１×１にきまっている。
よってこれ以上しらべても意味がないので、つぎにすすむ。

$\lambda-2$ について

$$(A-2I_3)\vec{x}=\vec{0}_3$$ 、つまり $$\begin{pmatrix}-1&2&2\\0&0&1\\-1&2&0\end{pmatrix}\vec{x}=\vec{0}_3$$ を解くと、$$\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}y$$

$$\vec{v}_{21}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$ とおく。

Step2. $$(A-2I_3)\vec{x}=\vec{v}_{21}$$ 、つまり $$\begin{pmatrix}-1&2&2\\0&0&1\\-1&2&0\end{pmatrix}\vec{x}=\vec{v}_{21}$$ を解くと、$$\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}y+\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_{22}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$ とおく。

↑ $y\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ 全体がなす集合が、

$V(\alpha_i)$ である。

固有値２のときは重複度が２なので、Jordan 細胞の大きさは２×２と決まっている。

これで必要な Jordan 細胞はそろった。

$$
\begin{aligned}
P &= \begin{pmatrix} \vec{v}_{11} & \vec{v}_{21} & \vec{v}_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

と置くと、

$AP = \begin{pmatrix} \vec{v}_{11} & 2\vec{v}_{21} & \vec{v}_{21} + 2\vec{v}_{22} \end{pmatrix}$となる。

なぜなら、$(A-2I_3)\vec{x} = \vec{v}_{21}$　の解、$\vec{x} = y\vec{v}_{21} + \vec{v}_{22}$を$\vec{x}$に代入すると、

$$
\begin{aligned}
(A-2I_3)\left(y\vec{v}_{21} + \vec{v}_{22}\right) &= \vec{v}_{21} \\
y(A-2I_3)\vec{v}_{21} + (A-2I_3)\vec{v}_{22} &= \vec{v}_{21} \\
0 + (A-2I_3)\vec{v}_{22} &= \vec{v}_{21}
\end{aligned}
$$

より、$A\vec{v}_{22} = \vec{v}_{21} + 2\vec{v}_{22}$を得るから。

$$
\therefore AP = \begin{pmatrix} \vec{v}_{11} & \vec{v}_{21} & \vec{v}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}
$$