2006 夏　（斉藤）

1. (1) $f(x,y) = xy/(x+y) = y\times\left(1-\frac{y}{x+y}\right) = x\left(1-\frac{x}{x+y}\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{(x+y)^2}$　$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{(x+y)^2}$　$\left(X = \frac{y}{x+y},\ Y = \frac{x}{x+y} とする。\right)$

$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2X\cdot\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{-2y^2}{(x+y)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(1-X)^2 = -2(1-X)\cdot\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{2xy}{(x+y)^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2Y\cdot\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{-2x^2}{(x+y)^3}$

(2) $f = \sin^{-1}\left(xy/(1+x^2+y^2)\right)$

$y = \sin^{-1}x$ とすると．$x = \sin y$　$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-x^2}$　$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

$\therefore X = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$,

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sin^{-1}X}{dX}\cdot\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-X^2}}\times y\cdot\left(\frac{1}{1+x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(1+x^2+y^2)^2}\right) = \frac{y(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2\sqrt{1-\left(\frac{xy}{1+x^2+y^2}\right)^2}}$.

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2\sqrt{1-\cancel{\mathrm{Arcsin}}^2\left(\frac{xy}{1+x^2+y^2}\right)^2}} = \frac{x(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)\sqrt{(1+x^2+y^2)^2-(xy)^2}}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(\frac{y}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^2-(xy)^2}}\cdot\left(-1+\frac{2(1+y^2)}{1+x^2+y^2}\right)\right)' = \cdots$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \left(\frac{y}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^2-(xy)^2}}\cdot\left(1-\frac{2x^2}{1+x^2+y^2}\right)\right)'$

$= \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(\frac{x}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^2-(xy)^2}}\left(-1+\frac{2(1+x^2)}{1+x^2+y^2}\right)\right)'$

2. $f(x,y) = x^2+x^3+y^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2+2x = 3x\left(x+\frac{2}{3}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$.

$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x+2 = 6\left(x+\frac{1}{3}\right),\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\right)$

ここで停留点 ~~極値~~ をとる時．$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ より　$(x,y) = (0,0), \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$

(i) $(x,y) = (0,0)$ のとき．

$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\times\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2 = 2\times 2 - 0 = 4 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$ より　極小点である。//

また $f(0,0) = 0$ //

(ii) $(x,y) = \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$ のとき

$D = -2\times 2 - 0 = -4 < 0$　よって 鞍点である．（極値でない）．

3.

$x^2+4y^2=1$ より $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$ $(|x|\leqq 1)$

∴ $f(x,y)=g(x)=x\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$. $(-1\leqq x\leqq 1)$

ここで、$g_1(x)=x+\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$, $g_2(x)=x-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}$ とすると、

$g_1(-x)=-g_2(x)$ より $g_1(x)$ と $g_2(x)$ は 原点対称である。

$g_1(x)$ について考える。

$(g_1(x))'=1-\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{2\sqrt{1-x^2}-x}{2\sqrt{1-x^2}}$ …①

$-1<x<1$ で $\sqrt{1-x^2}>0$。

また、$x\leqq 0$ で $2\sqrt{1-x^2}-x\geqq 0$.

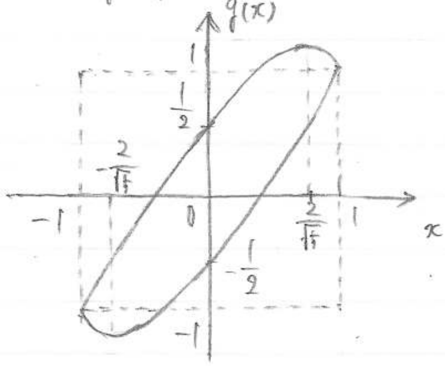
$x>0$ で $2\sqrt{1-x^2}$ は単調減少関数、$-x$ も単調減少関数より、$2\sqrt{1-x^2}-x$ は単調減少する。

$2\sqrt{1-x^2}-x=0$ とおくと $(x\geqq 0)$ $x=\sqrt{\frac{4}{5}}$

よって $y=g_1(x)$ の増減表は右のようになる。

よって $y=g(x)$ のグラフは下図。

x	-1	… 0 …	$\frac{2}{\sqrt5}$	…	1
$(g_1(x))'$		+	0	−	
$g_1(x)$	-1	↗	$\frac{9\sqrt5}{10}$	↘	1



よって最大値は $x=\frac{2}{\sqrt5}$, $y=\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt5}$ の時、$\frac{9\sqrt5}{10}$ //

(∵ $y=g_1(x)$ のとき最大値、この時、$y\geqq 0$)

最小値は $x=-\frac{2}{\sqrt5}$, $y=-\frac{1}{2\sqrt5}$ の時、$-\frac{9\sqrt5}{10}$ //

4. $x=g_1(s,t)=s+t$, $y=g_2(s,t)=s-t$ とおく。

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g_1}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g_2}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g_1}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g_2}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}$$

$\frac{\partial x}{\partial s}=\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial y}{\partial s}=1$ $\frac{\partial y}{\partial t}=-1$ より

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial t}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial s}-\frac{\partial f}{\partial t}\right)\ \cdots ①$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial s}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial t}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial s\partial t}+\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial s}-\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right)$$

同様にして $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial s\partial t}-\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial s}+\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}\right)$

$$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial t\partial s}-\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$$ //

2006 夏（斉藤）

※ sinhx の事。

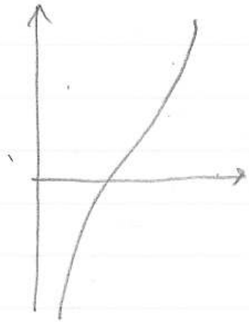
5-(1) 逆関数をもつ条件は、

① $y=f(x)$ が単調(強)増加する。

② $-\infty < x < \infty$ （xの定義域）

となる事である。

② は満たされているので、① を考える。



$$f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$
$$\geq \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} = 1 > 0.$$

より $y=f(x)$ は単調増加をする。 … Ⓐ

また、

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= -\infty \\ \lim_{x\to\infty} f(x) &= \infty\end{aligned}\right\} \cdots Ⓑ$$

ⒶⒷ より ① が示され、①② を満たすので、 $f(x)$ は $\mathbb{R}$ を定義域とする逆関数 $f^{-1}(x)$ をもつ。//

(2). $y=f^{-1}(x)$ とすると、 $x=f(y)$ である。
単に微分していっても求める事はできない。
そこで、

$$x = f(y)$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{1}{2}\{(e^y)^2 - 1\}$$
$$\Leftrightarrow (e^y)^2 - 2x - 1 = 0.$$
$$\Leftrightarrow (e^y - x)^2 = x^2 + 1 \ (>0)$$
$$\therefore e^y = x + \sqrt{x^2+1} \quad (e^y > 0 \text{ より } e^y = x - \sqrt{x^2+1} \text{ は不適}).$$
$$\therefore y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$$

coshx の時は 2解存在。→ $\cosh^{-1}x = \pm$ Ⓛ になる。

求めたい値は $\frac{dy}{dx}$ なので、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \ //$$

ちなみに、 $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ， $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ， $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ 　cf. $\coth x = \frac{1}{\tanh x}$ ， $\mathrm{sech}\, x = \frac{1}{\cosh x}$

$\mathrm{cosech}\, x = \frac{1}{\sinh x}$ (cschx)

- 加法定理や微分公式が三角関数と一致したり似ていたりします。
- $\sinh^{-1}x = \log(x+\sqrt{x^2+1})$
  $\cosh^{-1}x = \pm\log(x+\sqrt{x^2-1})$
  $\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\{\log(x+1) - \log(1-x)\}$ （らしい…）
- $\frac{d}{dx}\sinh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
  $\frac{d}{dx}\cosh^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ 　 $\frac{d}{dx}\tanh^{-1}x = \frac{1}{1-x^2}$

ちなみに、
sinhx, coshx の Taylor展開は、演習問題で聞かれていました。