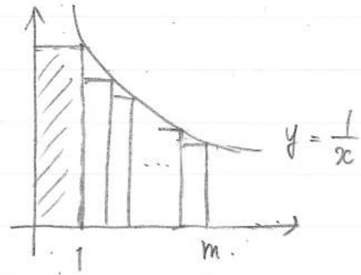
2007年 夏 (宮岡)

1. (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\qquad \sum \frac{1}{n} = 1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \cdots \to \infty$ となりそう



右図のように関数 $y = \frac{1}{x}$ の面積を考えて.

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \geqq 1 + \int_1^m \frac{dx}{x} = 1 + \log m$$

$$\to \infty \quad (m \to \infty)$$

よって追い出し論法により, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (発散) //

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right\}$$

ここで.

$$\sum_{n=1}^{m} \left\{ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} = \left(1 - \frac{1}{m+1}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}\right) \to \frac{1}{2} \quad (m \to \infty)$$

よって. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}$ //

2. (1) $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{3}}$ とおく.

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}} \\ f''(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (1+x)^{-\frac{5}{3}} \\ f'''(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot (1+x)^{-\frac{8}{3}} \\ f''''(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot (1+x)^{-\frac{11}{3}} \end{cases}$$ より

$f'(0) = \frac{1}{3}$, $f''(0) = -\frac{2}{9}$, $f'''(0) = \frac{10}{27}$, $f''''(0) = -\frac{80}{81}$

$$\therefore \sqrt[3]{1+x} = \sum_{n=0}^{4} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{273}x^4 + \cdots$$ //

(2). $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$\therefore \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} = (\arctan x)' \cdots ①$.

$\frac{1}{1+x^2}$ の $x=0$ の周りでの Taylor展開は.

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

また $\arctan 0 = 0$

$$\therefore \arctan x = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots$$

$\sin X = X - \frac{1}{3!}X^3 + \cdots$ より $X = \arctan x$ を代入し, x^4 の項まで求めると.

$$\sin(\arctan x) = \left(x - \frac{1}{3}x^3\right) - \frac{1}{6}x^3 + R(x)$$

$$= x - \frac{1}{2}x^3 + \cdots$$

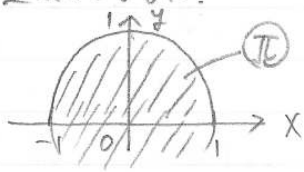
3.

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$　　$X=\dfrac{x}{a}$ で置換積分して.

$\displaystyle = \int_{-1}^{1}\frac{dX}{\cancel{a}\sqrt{1-X^2}}\cdot\frac{dx\!\!\!/}{dX}$

$= \left[\mathrm{Arcsin}X\right]_{-1}^{1} = \pi$ //

cf.) $X=\sin y$ $(x=a\sin y)$ で置換してもOK.
単位円の(半円の)面積。

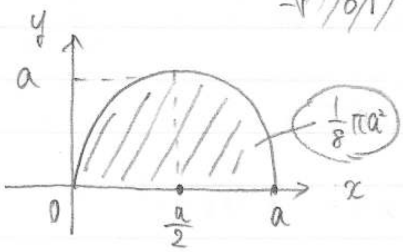


(2). $\displaystyle\int_0^a\sqrt{x(a-x)}\,dx$　　$x=\dfrac{a}{2}-X$

$\displaystyle = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} +\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2-X^2}\,dX$　　$X=\dfrac{a}{2}\sin y$

$\displaystyle = \int_{-\pi}^{0}\left(\frac{a}{2}\cdot\cos y\right)^2 dy$

$\displaystyle = \frac{a^2}{4}\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos 2y+1}{2}dy = \frac{a^2}{8}\left[\frac{1}{2}\sin 2y + y\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{8}\pi a^2$ //



4.

(a) $0<a<1$ の任意の a において

$\displaystyle\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a) = \lim_{x\to a+0} f(x)$

が成立すること。

(b) ?

イミがよく分かりません…

http://homepage3.nifty.com/gomiken/essay/column/cont.htm

より

関数 f が連続であるとは,
各点 a と各正数 ε に応じて正数 δ を適当にとれば, $|x-a|<\delta$ なる任意の x に対して $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$ が成立すること.

関数 f が, 一様連続とは.
各正数 ε に応じて δ を適当にとれば, $|x-y|<\delta$ なる任意の x. y に対して $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ が成立すること.

一様連続 $\Rightarrow$ 連続,　連続 $\not\Rightarrow$ 一様連続

★「a を下端とし, b を上端とする有界区間上の連続関数 f が一様連続であるためには,
$\displaystyle\lim_{x\to a+0} f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to b-0} f(x)$ とが存在する事が必要十分である」.

→ 区間 $(0,1)$ で $\dfrac{1}{x}\sin x$ が一様連続, $\dfrac{1}{x}$ が一様連続でない.