2008 夏 (ウィロックス)

1.

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + x_n^2 + 4}{3x_n^2 + 2x_n - 4} \quad \cdots ①$$

$x_{n+1} = x_n$ を代入し、整理すると $x_n^3 + x_n^2 - 4x_n - 4 = 0 \Leftrightarrow x_n = -1, \pm 2$.

さらに $x_{n+1} - 1 = \dfrac{2x_n^3 - 2x_n^2 - 2x_n + 8}{3x_n^2 + 2x_n - 4} = \dfrac{2\{x_n^2(x_n - 1) + 2(4 - x_n)\}}{3x_n^2 + 2x_n - 4}$

より、$x_n \geqq 1$ ならば、$x_{n+1} - 1 \geqq 0$ であり、$x_0 = 1$ であるので、帰納的に考えて、

$$x_n \geqq 1 \quad \cdots (*)$$

となる。よって

$$\lim_{n \to \infty} x_n = 2 \quad \cdots (**)$$

と推定できる。

$$|x_{n+1} - 2| = \left| \frac{2x_n^3 + x_n^2 + 4}{3x_n^2 + 2x_n - 4} - 2 \right|$$
$$= \left| \frac{2x_n^3 - 5x_n^2 - 4x_n + 12}{3x_n^2 + 2x_n - 4} \right|$$
$$= \left| \frac{(x_n - 2)(2x_n^2 - x_n - 6)}{3x_n^2 + 2x_n - 4} \right| < \frac{2}{3} |x_n - 2| \leftarrow$$

$$\left[\begin{aligned} &\frac{2}{3}(3x_n^2 + 2x_n - 4) \\ &= 2x_n^2 + \frac{4}{3}x_n - \frac{8}{3} \\ &> 2x_n^2 - x_n - 6 \quad (\because x_n \geqq 1). \end{aligned} \right]$$

$\therefore \lim_{n \to \infty} |x_n - 2| = 0$. $\quad \therefore \lim_{n \to \infty} x_n = 2$ //

2.

(1) $f(x) = \dfrac{xe^{-2x} - e^{-\frac{1}{x^2}}}{(e^x - e^{-\frac{1}{x}})^2}$ より

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \frac{0 \cdot 1 - 0}{(1-0)^2} = 0. \qquad \lim_{x \to -0} f(x) = \frac{0 \cdot 1 - 0}{(1 - \infty)^2} = 0. \quad \cdots ①$$

連続となる条件は

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to -0} f(x) = a$$

であるので、① より $\qquad a = 0$ //

(2) x を正方向と負方向で 0 に近付ける。

① の計算より、$x \simeq +0$ で $f(x) \simeq x$ となるのに対し、

$x \simeq -0$ で $f(x) \simeq 0$ となるので、

$f(x)$ は $x = 0$ において微分可能ではない。

3.

(1) $x^k \log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = x^k\left(\log(x^2-1) - \log(x^2+1)\right)$

$= \log(x^2-1)^{x^k} - \log(x^2+1)^{x^k}$

$\frac{1+X}{2X}$

$X = \frac{1}{x^2}$ とすると $x \to \infty$ で $X \to +0$.

この時.

$x^k \log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = X^{-\frac{k}{2}} \log\left(\frac{1-X}{1+X}\right) = X^{-\frac{k}{2}} \cdot \log\left(1 - \frac{2X}{1+X}\right)$

$= \frac{-2\cdot X^{1-\frac{k}{2}}}{1+X} \log\left(1-\frac{2X}{1+X}\right)^{-\left(\frac{1+X}{2X}\right)}$

$\lim_{X\to+0} \log\left(1-\frac{2X}{1+X}\right)^{\frac{1+X}{2X}} = 1$ (収束) より.

$\lim_{x\to\infty} x^k \log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ が収束する $\Leftrightarrow$ $\lim_{X\to+0} \frac{-(1+X)}{2} \cdot X^{1-\frac{k}{2}}$ が収束する。

よって収束する条件は

$1 - \frac{k}{2} \geqq 0$.　　$k \leqq 2$

また、この時.

(i) $k > 2$　$\lim_{x\to\infty} x^k \log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \lim_{X\to+0} \frac{-2\cdot X^{1-\frac{k}{2}}}{1+X} \cdot \log\left(1-\frac{2X}{1+X}\right)^{-\left(\frac{1+X}{2X}\right)} = -\infty$ //

(ii) $k = 2$　$\lim_{x\to\infty} x^2 \log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \lim_{X\to+0} \frac{-2\cdot X^{0}}{1+X} \cdot \log\left(1-\frac{2X}{1+X}\right)^{-\frac{1+X}{2X}} = -2$ //

(iii) $k < 2$　$\lim_{x\to\infty} x^k \log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \lim_{X\to+0} \frac{-2\cdot X^{1-\frac{k}{2}}}{1+X} \cdot \log\left(1-\frac{2X}{1+X}\right)^{-\frac{1+X}{2X}} = 0$ //

となる。

(2) $\frac{(x\tan x - x^2)^3}{(\cos(x^3)-1)^2} = \frac{1}{(\sin(x^3))^2}(1+\cos(x^3))^2(x\tan x - x^2)^3$

$= \left(\frac{x^3}{\sin(x^3)}\right)^2 \times (1+\cos(x^3))^2 \times \left(\frac{\tan x}{x} - 1\right)^3$

$= \left(\frac{x^3}{\sin(x^3)}\right)^2 \times (1+\cos(x^3))^2 \times \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} - 1\right)^3$

$\longrightarrow 1 \times 2^2 \times 0 = 0 \quad (x\to\infty)$ //

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

2008 夏 (ウィロックス)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_1(x), \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_2(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + R_3(x)$$

より

$$\therefore \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{1-\sin^2 x} = 1 + \sin^2 x + \sin^4 x + R_3(x)$$

$$= 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + R_4(x) \qquad \left(\lim_{x\to\infty} \frac{R_k(x)}{x^5} \to 0\right)$$

$$\therefore \tan x = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + R_5(x).$$

$$\therefore (x\tan x - x^2)^3 = \left(\frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{15}x^6 + R_6(x)\right)^3 = \frac{1}{27}x^{12} + R_7(x).$$

$$(\cos(x^3) - 1)^2 = \left(-\frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{24}x^{12} + R_7(x)\right)^2 = \frac{1}{4}x^{12} + R_8(x) \qquad \left(\lim_{x\to 0}\frac{R_7(x)}{x^{12}} = \lim_{x\to 0}\frac{R_8(x)}{x^{12}} = 0.\right)$$

$$\therefore (\text{与式}) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{27} + \frac{R_7(x)}{x^{12}}}{\frac{1}{4} + \frac{R_8(x)}{x^{12}}} = \frac{4}{27} \;//$$

4.

$-x^2+2xy.$

(1) (i) $(x,y) \neq (0,0)$ のとき

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)+2x(x-y)}{x^2-xy+y^2} - \frac{(2x-y)(x-y)(x^2+y^2)}{(x^2-xy+y^2)^2} \qquad -2x^2+3xy-y^2$$

$$= \frac{(x^2-xy+y^2)(x^2+y^2) + 2x(x-y)(x^2-xy+y^2) - (2x-y)(x-y)(x^2+y^2)}{(x^2-xy+y^2)^2}$$

$$= \frac{(-x^2+2xy)(x^2+y^2) + 2x(x-y)(x^2-xy+y^2)}{(x^2-xy+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2-2xy+3y^2)}{(x^2-xy+y^2)^2} \;//$$

対称式であるので、同様にして

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y^2(y^2-2xy+3x^2)}{(x^2-xy+y^2)^2} \;//$$

また $(x,y)=(0,0)$ で $f_x = f_y = 0$ //

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$ より、$f(x)$ は D上 連続.

(1)より $f(x)$ は D上 (x,y) で 偏微分可能.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot(x^2-2x\cdot 0+3\cdot 0^2)}{(x^2-x\cdot 0+0^2)^2} = 1 \neq f_x(0,0)$$

cf.（ノート第8回．より）

① f は D 上連続。．

今回なら．（0.0）という点で連続なのかが焦点となっています．

② f は D 上 x.y に関して偏微分可能

$(x.y)=(0.0)$ では $f_x=f_y=0$ となります．

③ f_x．f_y は D 上連続．

やはり（0.0）という点が ~~焦点~~ 論点 となっています．

①～③を満たす時．f は D 上全微分可能である．