≫数学ＩＢ（辻 雄(つじ たけし)) 試験対策プリント≪

（シケタイ） 牧野 類、橋本 大樹、古市 祐介
（文責） 牧野 類

＞そういえば“たけし”と読むらしいです。。担当のツジオ先生は麻布出身で、東京大学大学院数理科学研究科助教授、数学者。専門は数論幾何。特に p-進 Hodge 理論（僕には何の事かさっぱりです；)。いろいろ数学的な伝説が残ってるとかどうとか。2009 年時点で 40 歳との噂。講義の時は楽しそうな顔で講義をしています。オシャレだった印象があります。
話が逸れました。本題に入ります。

○（予定では）シケプリは３部構成の予定です。

①授業の復習
②問題抜粋（演習プリント）
③問題抜粋（過去問）

＞③までは手が回るか不明ですが (②も出来るのかな？)、過去問くらいはあげてもらおうと思います。
…辻さんの１B の過去問は多分ありませんが；

＞ノートはゆうすけが改良してあげてくれました。が、僕とゆーすけは相談していません。…僕は、同じ内容を別々の切り口から説明した方が理解が深まるのでは？という考えから、完成するまで相談しない事にします。内容がかぶってても気にしないでください。まあゆーすけがやったし、僕の必要性はない気もしますが…；一応作ったんでねー…お蔵入りもいやなんで；

＞イメージ図などはペイントで描いたものをコピペしてるので、多少の歪みはご容赦下さい。

＞何か文句等々ありましたらシケタイに連絡ください。

＞この “＞”の部分は僕のつぶやきなので、無視してもらって構いません。(テストには出ません)

○テストについて

１B は１A と異なり、式の利用のほうに重点が置かれる為、証明などがでる可能性は低く、演習の方でもらった問題や極限などの計算演習を中心に行い、分からない所をノートなり参考書なりで確認するようにするといいと思います。数学演習の解説なども優秀な先生（牛腸さん等）が作っただけあって結構分かりやすいと思います。(…正直あまりシケタイの存在理由を見出せません；）なお、演習で使っている問題にツジオさんは（夏休み前時点で）目を通していない、との事なので、演習問題からそっくり一問でる、なんて事も考えにくいです。仮にそうだとしても演習問題の問題数多いんで…ね。。もちろん、決まった範囲からだそうと思うとどうしても似た問題が出てきてしまうんですが；

なお、公式などについては、最後の授業の後聞きにいった結果、授業で扱ったものは既知でよい、という様な事をおっしゃっていたと思います。(これも演習に重点が置かれるであろう根拠ですが)

①授業の要約、簡単に復習（or 新たに学習？）したい人のために

授業の復習です。

はじめに断わっておきますが、基本的に数学の苦手な人が読むのは構いませんが、結構書きたい事を書きたいままに書いたので、数学に自信がある、自分でできる人は極力自分でやる事をおすすめします。復習とか自分で出来る、って人も上の１ページで十分だと思うので、演習を始めると効率的だと思います。

それでも見ようかな、って人はノート片手に（そんないらないと思うけど）読み物的な感覚で眺めてけばいいと思います。なかなか量を減らす事が覚えられず；そこそこ長いけど堪忍。。分かりにくかったら言って下さい。

§１．関数の連続性

このセクションはこれからの為の準備、って感じです。

・関数とは？

関数とは、

集合 A(⊂ ℝ)に含まれる実数 x にある実数 f(x)（←x に依存する関数である事を(x)で示している）を対応させる規則 f を A 上定義された（１変数）関数と呼び、 f:A→ℝ で表し、A を f の定義域というのでした。

なんか言い回しが難しいですね、、

イメージ的には（分かりやすいかは不明ですが；)、

数字を入力すると何らかの答えを出す装置があるとして

- ・装置に入れれる数：x（集合 A の中の数）
- ・出てきた答え：f(x)
- ・装置の仕組みを表す指数（説明書？)、その一連の操作：f

という感じです。小学校の頃の教科書にもしかして出ているかも？

とは言っても関数には数えきれない程中学、高校と触れてきているので、まあこの辺は問題なかと思います。

（一応）ex.$f(x)=\sqrt{x}$　A＝｛x | x≥0｝

＞…個人的には数学の難しさは、“関数”というものの曖昧な解釈（“発想”も結局これに帰着するのでは？）と、テクニック・計算スピード的なもの（時間的にその場で考えて浮かんでは時間不足になる事も含む）にあると思っているので、ちゃんと勉強してから書きたかったのですが,,,、ごめんなさい。。力不足です；

＞そういえば、(一次) 変換も f と書くのでしたね…（英語的には当たり前ですけど、そういう意味ではないです。）

・関数の極限？

高校で軽く音をあげた人はもう一度丁寧にやっておきたい所だと思います。

とりあえず数学的に定義します。

c（∈I：区間）は端点でないとする。F を I/{c}（I の範囲でが、c を含まない）上定義された関数とする。（$f(x)=x^2$（0≤x≤5）など具体的な関数でイメージしてください。）x∈I、x≠c が c に近づく時、f(x)がある一定値 A に近づく時、$\lim_{x\to c} f(x)=A$と書く。この値を、x→c の時の極限という。

右方極限、左方極限も同様に定義する。

上記より、x→±∞の時の極限も同様に定義する。
とりあえず、ある点から今のまま（f(x)という流れ（f(x)という道、と考えても構いません）に沿ったまま）x＝c という値に向かっていった時、どのような値をとる予定（到着地点はどこになりそう）か、という感じですね、まあ関数の予測値と考えても問題ないと思います。（つまり、実際にその A という値をとる事もあるし、とらない時もある（←関数が切れている、定義されていない時、∞に飛ばす時など）、という事です。）

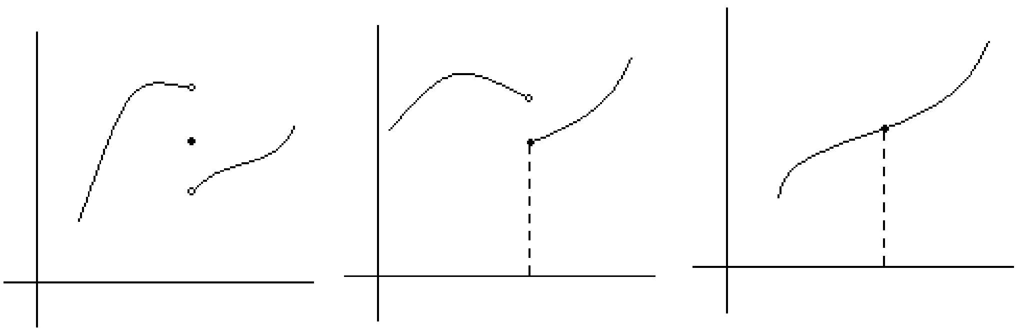
ex. $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = 0$　←実際にはとりえない値です。

$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0}(x+2) = 2$　←実際にとりうる値です。

＞忘れないうちに。極限の問題で、∞/∞や0/0などで収束・発散するという現象は、（聞いた事あるかもしれませんが）所謂“飛ばした時の飛ぶスピード”が関係してくるんですね。例えば（グラフを書けば一目瞭然です。。）$y=e^x$ と $y=x$ と $y=\log x$では、この並びの順で増え方が大きい（＝（∞に）飛ぶスピードが速い（早い？））ことは分かると思います。この速さ（早さ）の比や大小関係が極限という形に現れるんですね。。

・関数の連続性？

今さっき定義された$\lim_{x\to c} f(x)$を使って、関数が連続してるとはどういう事かを定義します。直観でいえば、“グラフがつながっている”という感じですよね？それを数学的に言うと、
c（∈I：区間）は端点（右端点）でなく、$\lim_{x\to c} f(x)(\lim_{x\to c+0} f(x)) = f(c)$の時、f(x)は x=c で連続（右連続）という。
みたいな感じです。左連続も同様に定義します。



連続でない　　　　右連続　　　　連続

図なら上のようなイメージになります。別に定義を上の様に書ける必要性はないように思えるので、図のイメージだけもっておけば大丈夫だと思います。
＞そーいえば高校で“連続＝つながっている、微分可能＝なめらかである”と教わった記憶があります。…さらにって感じですが、チャートあたりに“微分可能⇒連続”の証明が載っていた気がします。（確か下の様な証明だったハズ）この機会に高校の参考書を開いてみるのもなかなかアリかもしれないですね。。

$$\lim_{h\to 0}\{f(x+h)-f(x)\} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\times h = f'(x)\times 0 = 0$$

§２．微分係数、導関数

このセクションから少しずつテイラーの定理に近づいていきます。

・微分係数？

$x\in I$、$x\neq c$ に関して、$F=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$を考える。

（xy 平面でいえば、F は二点（x、f(x))、(c、f(c)）を通る直線となります）

C≠端点で、$\lim_{x\to c}F$ が収束する時、x＝c で微分可能であるといいます。極限値を x＝c での微分係数といい、f'(c)と書きます。

なお、右（左）微分係数も同様に定義され、$f'_{+}(c)$（$f'_{-}(c)$）と書く。

…という事です。

まあ、関数の２点間の関数を直線に近似し、その幅を≒0 にする事で、ある点 c に接している直線を考えよう、という感じ…ですかね？←高校の教科書でも見ましたね？確か

“（１点で）接する”という事を“近づいた２点が（ほぼ）重なった”と考えれば、腑に落ちない感じも薄れるのではないでしょうか・・・？改めて考えるとなかなか厄介かもしれないです。。図などをかいて自分なりに納得しておいてください。

＞この“近似”のイメージがこの後に出てくるランダウの記号やテイラー展開の近似（次元は上がりますが；）につながっているのでしょうか・・・？

＞それにしても、F を直線ではなく（x と c の間でカットした）線分と考えれば、カットした２点間を狭くしていく感じがまさに“微”に “分ける”感じですよね？名前の付き方も納得できる気分になります。

・一次近似としての微分？

まず一次近似というものを数学的に見てみます。

f(x)が x=c で微分可能であるとする。

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}-f'(c)=\frac{f(x)-\{f(c)+f'(c)(x-c)\}}{x-c}$$

＞（右辺）＝（左辺）→0(x→c)ですね。

となる事から

$\varepsilon(x)=f(x)-\{f(c)+f'(c)(x-c)\}$

とおけば

$$\lim_{x\to c}\frac{\varepsilon(x)}{x-c}=0$$

＞上の式を書き変えただけです。この ε(x)は（x→c で）x－c より速く収束するみたいですね。

となる。

これを　$\varepsilon(x)=o(x-c)\quad(x\to c)$　で表す。―ランダウの記号（微少量・・・みたいな意味）

この記号を使うと、　$f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+o(x-c)$　とかける。

まあ変数をより次元の下がった関数で見る事ができるよ、という位でしょう。

（微分して同じ形になるもの（e^xとか）はありがたみを感じにくいかもしれませんが、、、 “近似”した値が出る事はわかります。）

さらにこの作業から同様の手順で（全く同じといくかは限りませんが；）二次、三次と近似していく

と、より精度のよい近似ができそうだという事もうかがえます。(Taylor 展開参照)
近似の例はあまり浮かばないので、
　$f(x)=e^x$（微分形にもとの関数がのこる）、$f(x)=5x^3+4x+2$（次数が下がる）
などで（例が適当ですいません；）考えてみて下さい。
ここで、この近似に対応した命題をのせておきます。。別に興味のない人（or 授業ノートで目を通した人）は飛ばしても一応問題はないと思います。

命題 2.1
$f(x)$が $x=c$ で微分可能⇔$f(x)=f(c)+A(x-c)+o(x-c)$　$(x\to c)$となる定数 A が存在し、$A=f'(c)$となる。
(証)　(⇒については一次近似の紹介で示してあります。)

$\varepsilon(x)=f(x)-\{f(c)+A(x-c)\}$とおけば、$\frac{\varepsilon(x)}{x-c}\to 0(x\to c)$。(上記の近似と同じ様に考えて下さい。。)

$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\frac{A(x-c)+\varepsilon(x)}{x-c}=A+\frac{\varepsilon(x)}{x-c}\to A+0=A(x\to c)$
∴$x=c$ で微分可能で、$f'(c)=A$ である。□

・導関数？
f が I の各点で微分可能である（端点では右（左）微分）時、f は I 上微分可能という。
この時、I の各点 x に対し、x での微分係数 $f'(x)$を対応させる関数を f の導関数という。
堅苦しい書き方ですが、、なんとなく分かりますよね？高校の時とかやってきましたしー

――とりあえず　あらゆる点で全ての（微分できる）方向に微分出来る時、I 上微分可能、つまり“あらゆる点で・・”　なんて言い方をしないで簡潔に表現できる言い方をした訳です。
そして、あらゆる点＝x と表記すれば(というか x の関数としている事がそもそもあらゆる点を“座標”によって位置付ける事なんですが…この辺は後述)、微分した関数もやはり x の関数(定数も含む…c(定数)＝0×x+c という事です) でかけるはず。その関数を f'（導関数）とよぶだけですね。
＞デカルトの話に戻ります。記憶が曖昧で悪いんですが、確か虫が窓から入ってきた時に、その虫（ハエ）の位置を表そうとして（どうしてそうしようと思ったかは突っ込まないでください。彼は天才なんです。。）座標を思いついたそうです。そうしてわざわざ目盛をつけたのは、…あらゆる点を x という変数を使い数学的に表すためですよね、おそらく。彼の哲学から考えれば別にやりかねない事ではあるんですが。。(「方法序説」に書いてあるそうです。) あ、デカルトについては北川さんあたりに聞いてください。
＞ごめんなさい。これは完全に余談ですが、最近読んだ西尾維新の本の後書きには“天才”という言葉について使うのは云々とコメントがあった気がします。が、、まあ気にしないでください。

また、n 回微分ができる時、n 回微分して得られる関数を f の n 次関数といい、$f^{(n)}(x)$と表します。
連続かどうか、微分可能かどうかは実際に問題で見ていくとか図を書いてみる方がわかりやすいと思うので、この辺にしときます。。

§３．初等関数の微分（未完成）

そろそろ、逆三角関数など、大学らしい内容も含まれてきます。

・微分可能？関数の微分？

f(x)g(x)=・・・などの関数の掛け算・割り算に関するものは高校の時にやったと思います。チャートなりオリスタなり授業ノートなり（第２回 §３）を参照して下さい。

・逆関数、逆関数の微分？

I を区間、f をI 上に定義された連続関数とする。(a, b∈I)

a＜b⇒f (a)＜f (b)を満たす時、f (x) は狭義単調増加関数である。(f (a)≦f (b)の時単調増加という)

a＜b⇒f (a)＞f (b)を満たす時、f (x) は狭義単調減少関数である。(f (a)≧f (b)の時単調減少という)

簡単にいえば、y=f(x)として、

X の増加（減少）する向き（x の値の変化）と、y が増加・減少する向き（y の値の変化）の関係を見ているだけですねー。。

・逆関数？

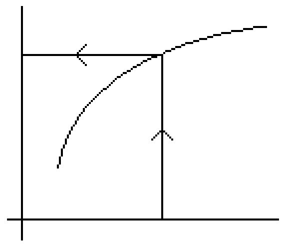
簡単にいえば、y＝f(x)は x の変化に対しての y の反応を見ていた（そのような見方をしていた）訳ですが、これを y の変化に対しての x の反応を見る、というように視点（因果）を逆にして考えてみよう、という事です。(簡単の為、xy 座標で話をします。)

しかし、ただ y=x のグラフで折り返すだけで、無条件に関係をひっくり返して、という事ができるのでしょうか？条件があるのかどうかを考えてみます。

関数は x と y の対応関係から大きく３種類に分けて考える事が出来ます。

①１対１対応（y＝x など）　／②多対１対応（$y＝x^2$など）　／③１対多対応（x＝k など）

ここで、逆関数が存在するとは、x→y の対応 (x の変化に対しての y の反応) だけでなく、y→x の対応も同様に成り立つ、という事ですから、ここから考えても①の関数のときにしか成り立たないことが分かると思います。その図でいえば、横軸が x でも y でも辻褄があう、という事です。。



一応授業での数学的な紹介もしておきます。(命題 3.1)

f(x) は狭義単調増加関数である（a,b ∈ Iで、a<b⇒f(a)<f(b)を満たす）と仮定した時、f の取り得る値全体の集合をJとすると、仮定よりJも区間となる。

（中間値の定理より証明可能…らしいです。）

集合Jの最大値を$f(x_1)$、最小値を$f(x_2)$とする。（それぞれの時のxの値を$x_1(=a)$、$x_2(=b)$とした）この時、y=f(x)は連続な関数であり、中間値の定理より$f(x_1) \leq y \leq f(x_2)$の範囲の全ての値をとる。よってJも区間となる。

b が存在することはJの定義より明らか。

ここで、a = f(b1) = f(b2) となったとする。この時、

b1 < b2 ⇒ f(b1) < f(b2)

b1 > b2 ⇒ f(b1) > f(b2)　　　　∴b1 = b2

$a \in J$ に$a = f(b)$ となる$b \in I$を対応させる関数をf の逆関数といい、f^{-1}と表す。
$y = f(x)$ のグラフを$y = x$ について折り返すと、$y=f^{-1}(x)$のグラフになる。

定理３．１．
$b = f(a)$の時、
1. $f(x)$が$a\in I$で連続⇒$f^{-1}(x)$ はbで連続である。
2. $f(x)$が $a\in I$ で微分可能かつ $f'(a)\neq 0$⇒$f^{-1}(x)$は b で微分可能である。

・逆三角関数？
（・**逆関数**より）逆関数は１対１対応（狭義単調増加／減少関数）でなければいけなかったのでしたね。ところで、三角関数はグラフを見ても分かる様に何度も同じ y の値をとる x が出てきます。範囲を決めない状態では逆関数を定義できません。
そこで点 O の周りで狭義単調関数となるようにとってやると

$\sin x \to I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	つまり$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$の範囲であれば逆関数$\sin^{-1} x(\mathrm{Arcsin}\, x)$が定義でき、定義域は $J=[-1,1]$となる。
$\cos x \to I = [0, \pi]$	つまり$0 \le x \le \pi$の範囲であれば逆関数$\cos^{-1} x(\mathrm{Arccos}\, x)$が定義でき、定義域は$J=[-1,1]$となる。
$\tan x \to I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	つまり$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$の範囲であれば逆関数$\tan^{-1} x(\mathrm{Arc}\tan x)$が定義でき、定義域は $J=\mathbb{R}$となる。

なお、逆三角関数の微分（導関数）については
$\frac{dy}{dx} = 1/\frac{dx}{dy}$から求める事が出来ます。（$\sin x$、$\cos x$、$\tan x$の関係が分かっているため）
また、三角関数は逆三角関数により定義されていることも確認しておきましょう。
（授業ノート参照（§３　三角関数の定義について)）

§4. 連続関数の性質

このセクションでは実数の連続性に関わる性質（定理？）を扱っています。

・上限・下限？

①有界とは？

いままで最大値 max、最小値 min に関しては定義されていた、というか知っていました。“～以上”“～以下”というやつですね。では“～より大きい”“～未満”についてはどうでしょうか？不等式では示せるとはいえ、今までその値を出す機会で具体的に出てきたのはガウス記号（厳密にいえばこれも違いますが；）くらいなものだと思います。そこで今回導入するのが 有界 という訳です。

含まれない数（つまり x＞c という範囲（集合）を考えた時の c の事）を定義するがために授業の定義ではややこしい集合（A＊）が導入されくどい説明になっていますが、要は

上に行くのに制限がある（＝x≦d）　：上に有界　　d の事を上界

下に行くのに制限がある（＝x≧c）　：下に有界　　c の事を下界

どちらにも制限がある（＝c≦x≦d）　：有界

というだけの話。この x の集合を A とすると、この x の範囲を最小にしようとした時の

d’　→A の上限という。　→supA で表す。（supA＝d’）

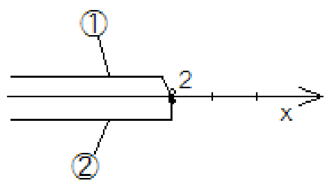
c’　→A の下限という。　→infA で表す。（infA=c’）

言いかえれば上限＝最小上界、下限＝最大下界という事なんでしょう。。（ “最小上界”“最大下界”なんて言葉が存在するのかは知りませんが；）

そして c’、d’（supA、infA）が A に含まれる時、これらが最大値、最小値になる訳です。

＞上の c、d にアポロストロフィを付けたのは c、d が変動しなくなる（ひとつの値に定まる）ので区別するため。

＞最大値、最小値と上限、下限の関係がよく分からなかった人は「x＜c ならば x≦c」という話で引っかかっているんだと思います。例えば A という集合を①「2 より小さい実数（x＜2）」とした時と②「2 以下の実数（x≦2）」とした時、共に supA =2 となる、という事です。②の場合なら確かに上限と最大値が一致しますね。



この位だと思います。数直線などを描いてみながら納得してみてください。

・実数の連続性？

★ $\begin{cases} \text{上に有界な空でない } \mathbb{R} \text{（実数）の部分集合は必ず上限を持つ。} \\ \text{下に有界な空でない } \mathbb{R} \text{ の部分集合は必ず下限を持つ。} \end{cases}$

（この二つは実数の定義の一つでもあります。）

これがなぜ実数の連続性を示しているかを考えてみます。

例えば（というか授業でも扱っていましたが）A={x | 有理数、x^2≦2}（x^2≦2 の範囲の有理数 x の集合）を有理数内で考えてみます。（実数の部分を有理数に置き換えたと考えて下さい。）

この時、正∞方向へ行ける制限（つまり x≦c となる最小の c。…x^2≦2 という不等式を変形すると考えて下さい。）を考えてみると、$\sqrt{2}$となりますが、これは有理数でないので、上限がない事になりますね。

同様にして下限もなく、有理数、整数など不連続なものにはない連続性という性質を実数は持っているのですね。。

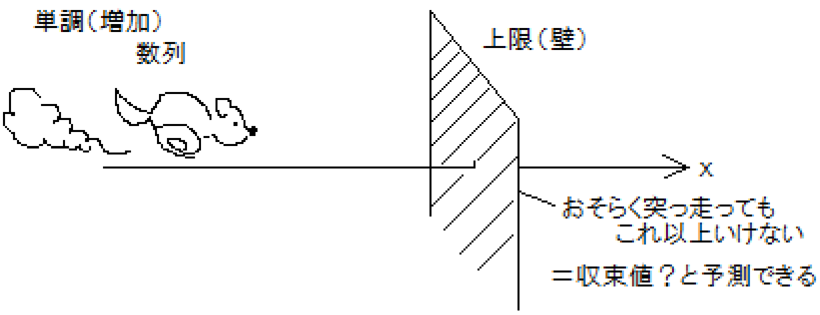
＞有理数が連続でないのか、とか考えてくと頭がパンクする可能性があるので、まあここでは“有理数は、実数のうち（ルートなどで表される）無理数の部分を表す事が出来ない。から有理数はぎっしり詰まった数ではない、数字の間に隙間がある！”くらいに考えればいいと思います。それも意味不な方は「そうなんだー」位に思うべし。というか僕も連続についてはよく分かりません（感覚的には分かっても数学的に示すとかはちょっと…ね；）

ここからはある程度定理の数学的紹介は省きます。第３回のノートを片手に見て下さい。

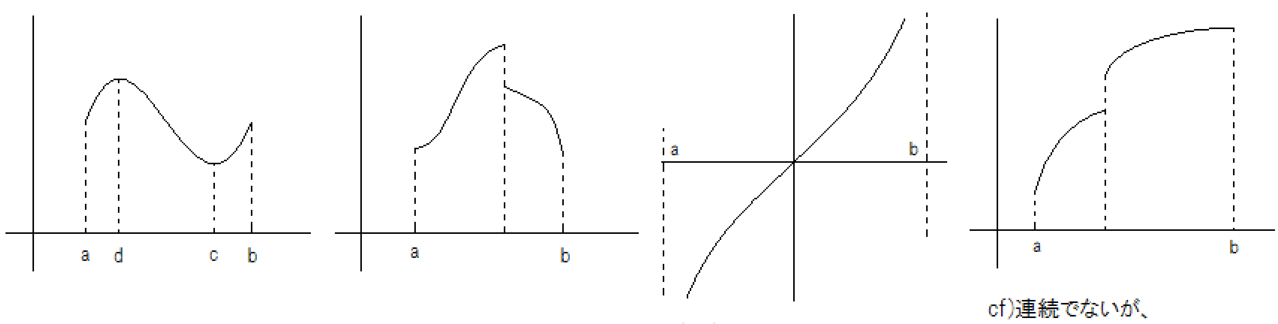
定理４．１は、単調数列が有限（増えていく方向のどこかで動ける範囲が打ち切られる）ならその数列は収束するという事です。まあ証明がややこしいですが、要は（単調増加数列でいえば）打ち止めになってる所以上はいけないのだから、その値以前で（数列の増加の具合が少ないせいで）値が打ち止めになっているだろう、という事です。（別に打ち止めの値（上界）＝収束値とは限りません。）詳しい照明はノートを参照してください。下のイラストは単調増加関数の時のイメージ図です。(笑)

＞そういえばクイズの問題で、“ある木は最初の一年に 1m 成長し、その次の年からは前年成長分の半分だけ成長する。では、この木が 2m に達するのは何年後か？”ってのがあった気がします。もちろんいつまで経っても 2m に達する事はないのですが(笑)。これも上の定理の一種の例になるのかもしれませんね。。

＞cf)コーシーの収束判定条件：数列a_n，$n \in \mathbb{N}$ が収束する $\Leftrightarrow \lim_{m,n\to\infty}|a_n - a_m| = 0$



定理４．２は連続の関数であれば最大値、最小値が存在する事をいっています。開区間（a＜x＜b）であったり、連続でない時、この定理は成立するとは言い切れません。

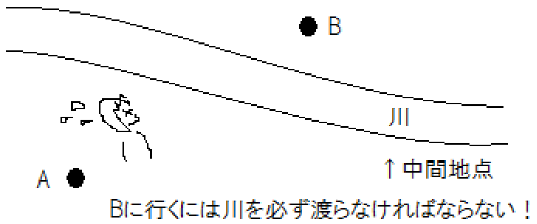


[a,b]上定義された連続関数　連続でない関数　(a,b)上定義された連続関数　cf)連続でないが、c,dがある？関数

＞(a,b)上定義された連続関数の例としては y=tan x などがあります。

補題４．３は僕のノートが間違っているのかよく分かりませんが、集合 A が意味不な状態になった板書になっていました。時期的に祐介がノート改良計画に入った時期なんで確認できませんが、まあ“そりゃそうだろ、証明するまでもないよ”と思える人は眺める程度でいいと思います。意味わからん人はまた聞いて下さい。そんなにややこしい事は言ってません。…証明は相変わらず遠回りな書き方になってますが；
本題の４．２の証明も軽くみとくだけでいいと思います。自分でやれ、というには少々無茶ですが、使っている事は上限の性質と集合、背理法なので、読めばなんとなく分かる気がするのでは？と。

定理４．４は、かの有名な中間値の定理です。(連続な関数なら）二点を結ぶには間の値を一度は通らないとおかしい、という感じです。例えはおかしいかもしれませんが、川の反対岸（A という値→B という値）に渡るには川（中間地点）を渡らなければならない。当たり前ですよね。(屁理屈はナシで。。)



まあ、例えは意味不でも、高校でやったし分かると思いまーす。

§5. ロルの定理、テイラーの定理

このセクションでは大きな指針（？）の一つであったテイラーの定理がついに登場します。
テスト的にも数学的にも大事になる所だと思います。僕から説明する事はあまりないので、ノート等を読んだら、早速問題を解く方に入り、その中で考えていくのがいいと思います。
この範囲は授業の第３～６回にあたります。

とりあえず、この前でてきたランダウの記号（§２）を思いだして下さい。
あの時に一次近似というものを考えました。
感覚としてはその時と同じです。ある値から見た時の関数の近似、という事です。もちろんそれよりも精度はぐんと上がりますが…
（テイラー展開の時は x＝0 の時（マクローリン展開？）を考える事が圧倒的に多い気がしますが；）
具体的な証明はノートを見た方がはやいと思うので、軽く見といてくださーい。
（証明の一部は演習問題にもあったと思います。積分の問題です。。）

テイラー展開のメリットを少し。まず、$e^x, \sqrt{1+x}, \log(1-x), \sin x$といった関数が（x－a）^{k} の形で表せて、その結果 x の多項式で表す事が出来る、という事がすごい事なんですね。
また、（演習をやった方は分かると思いますが）ある程度複雑な関数であっても、このテイラー展開を駆使する事で、x の多項式で表せたり、評価（不等式、極限）する事が出来るのも大きなメリットの一つですねー。

なお、具体的な使い方は配布されたプリント（Taylor 展開の計算なんたらって名前のやつ）や牛腸さんの HP に書いてあるので、それを参考にしてください。
大雑把には①直接（導関数から）求める ②和、差をとる（$\sinh x$など） ③代入する（$\frac{1}{1+x^2}$など） ④（項別）積分する（$\tan^{-1} x$など）の方法があります。まあ今だに使い慣れないけど；

僕からの説明は以上です。後は付帯する定理の略説明です。

定理５．１はいわゆる “ロルの定理” です。関数が連続であるとして、同じ値をとる二点（仮にその二点を a、b とするなら f(a)=f(b)ということ）を結ぶ事を考えたとき、直線でなければ必ず山（関数の増加・減少の変換点＝（f’(x)=0)）ができる、という事です。
授業の証明では最大値の証明と最小値の証明は同じ事をやるだけなので、最小値（ノートで言えば c（正確に言えば f(c)）の事）について “そこ、谷（山）になってますよ” と説明してる訳です。
細かい事を言えば、c、d という値が端点かどうかで場合分けしてます。（直線になるか、でこぼこが出来るか、ですね）

定理５．５ではコーシーの平均値の定理です。

$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$という形が覚えにくい人は、（もちろん a＜c＜b、g'(c)≠0 などの条件はありますが）

平均値の定理の形$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$＝$f'(c)$（←これって変化率を傾きで表してるんですよね？）を元に

$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times \frac{b-a}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

と覚えればいいと思います。この形なら、変化率→傾きという考えを応用しただけなので分かりやすいと思います。

＞変化率→傾きと考えたのは、高校の時の説明で、線分（直線）AB（A=(a,f(a)),B=(b,f(b))）の傾きと、接線の傾きを考えた図があったのをふと思ったからです。なお、コーシーの平均値の証明はよく知りません。。

定理５．６はロピタルの定理です。
コーシーの平均値の定理を関数に関して当てはめれば、うまくいきそうですネ。。
（b=x として極限をとってくれれば分かります。）
…意味合い的にはランダウの方が近いんですが；
（つまり一次近似（ランダウの記号）を使い、

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(c)(x-c)+o(x-c)}{g'(c)(x-c)+o(x-c)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(c)+\frac{o(x-c)}{(x-c)}}{g'(c)+\frac{o(x-c)}{(x-c)}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

という事です。。）
次数をさげて計算出来るので、是非とも習得したい定理です。。

最後に…

べき級数というのは $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の形の級数の事で、x^nの和で表された関数、と考えて下さい。

また、演習で問われてたので、“収束半径”という概念を導入しておきます。

簡潔に言うと、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$が収束する時の sup|x|です。（任意の x で収束するなら∞）

収束する範囲で、これを微分した関数（べき級数）の収束範囲も同じになる、などいくつか特性があるみたいですが、まだいらないと思います。収束半径ならぬ収束円、というものも存在するみたいです。（(－R,R）の範囲の円、らしーよ？この中では何度も項別積分／微分できるから重要になってくるかも…）これも余談。。

一応、演習問題の冊子にも説明はついてます。僕は触れる程度の簡単な説明しかしていないので、そちらを一読しとくと理解が深まると思います。

§６．多変数関数

この章では多変数の導入、及び多変数の極限値というものについて考えます。

・２変数関数？（多変数関数の導入）

簡単に言っちゃえば別に対した事はなくて、表現に関して言えば

今まで一変数関数（＝y は x の関数だ、という事を表す）を $y=f(x)$と書いていたことを考えれば

二変数関数（＝y はx_1とx_2の関数だ、という事を表す）を $y=f(x_1,x_2)$とすれば終わりです。

さらに、例えば xyz 空間で球について考えてみて下さい。z を他の二変数（＝x、y）の関数だと考えれば、球の半径を r とすれば $z=f(x,y)=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$と書けるのはすぐに分かると思います。

…単にそんな事くらいの理解でいいと思います。今まで何気にで出来ていた「xyz 座標」ってやつです。

ノートの定義にしたがえば（この球の例でいくならば）

$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq r^2\}$, $f(x,y)=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$　（D は$\mathbb{R}^2$の部分集合）

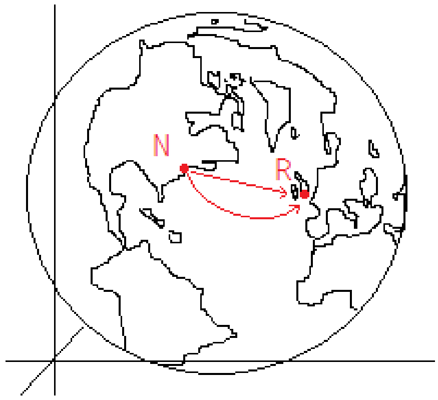
…となるみたいですね。。(数学者になる訳でないなら、テスト前にこの意味が分かる必要はあっても、こーゆー風に書ける必要はないと思います。)

さらに、このような関数を図としてグラフにおこす事を考えると、面になる（というか布や紙で模型をつくるイメージ）事はわかると思います。(三次元、という事ですね。)

多変数関数についても同様の拡大をしていけば分かりますね。想像には難いですが；

イメージできた人、あなたは宇宙人です。…すいません、口が過ぎました。

・多変数関数の極限？連続とは？



極限というものを一変数関数のように短絡的には式化できません。

簡単のため、こんな事を考えて下さい。

あなたは今、ニューヨークにいます。そこからロンドンへの行き方を考えてみて下さい。

空路となれば気流などを考えたルートになるでしょう。

海路となれば海域などを考慮したルートになるでしょう。

船は極力使わず陸をわたっていく、というならばそれは大陸を大きく回る“大冒険”なルートになるでしょう。

一口にある地点から他の地点に向かう、といってもそのルートは“地球”故に多々あります。

ここで、この例を浮かべながら多変数関数（二変数関数）について考えてみます。R という点への近付き方は、例えば N という点からの近付き方だけを考えても“(平／球) 面”という性質故に様々な可能性が出てきてしまいます。(地球＝二変数関数、二地点＝二点、と考えて下さい。)

では、多変数の極限 $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ はどのように考えればいいのでしょうか？

一口に言えば、x、y 一方に特化していないモノの極限がとれればいい訳です。そこで二点間 (変数(x,y)と近付ける目標点(a,b)) の距離 r を考えれば、割と使い勝手もよく（？）上の条件も満たしている事が分かります。そのような近付かせ方も極限を考える一手段となります。

ただ、これもあくまで一手段である、という理由は、収束の速さが向きによって違うために、近付け方によって収束する値が変わっていくものがある事を頭の片隅に置いておいて欲しかった為です。

なお、この極限値 $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ が $f(a,b)$となる時、関数 f が(a,b)で連続と言います。二つの関数が連続ならば、基本的にその２つの間の四則演算により表された関数は閉じています（＝連続)。

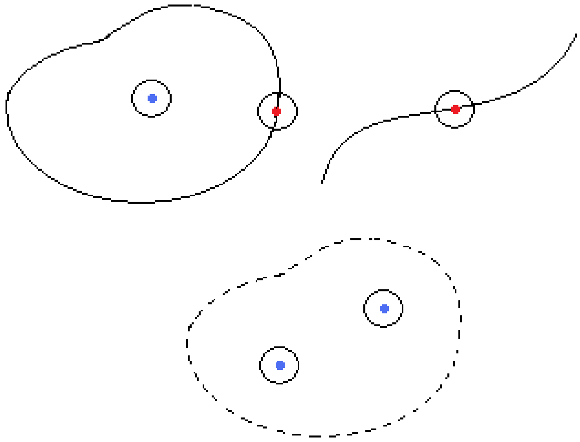
§7. 偏微分

二（多）変数関数を特定の一つの変数について考えるとは？そのメリットは？

例えば “関数を描く／思い浮かべる” 事を考えて下さい。一変数関数の時、f'(x)というのは、f(x)の x=a の時の微分であり、その情報（増減、極大・極小なのか）を集めていく事により概形を得る事が出来るのでした。二変数関数ではどうなのでしょうか？概形を得るには？

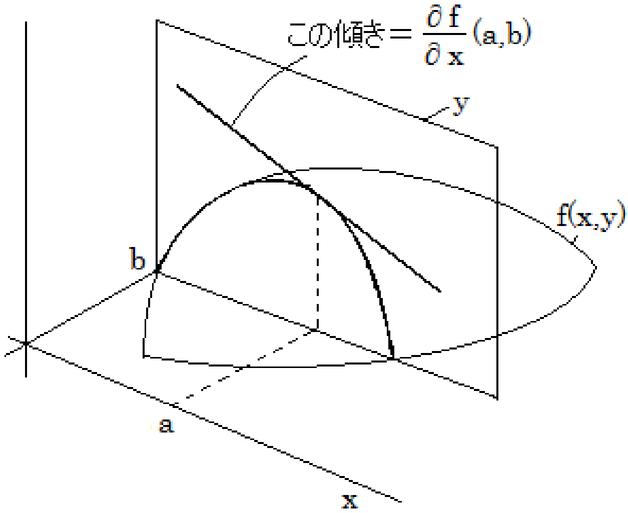
定義７．１は偏微分の準備ですね。境界点と内点の定義により、全ての点が内点である集合（下の図）＝開集合を定義するものです。

また、なぜ円の中で…という書き方をしているかというと、「円の中にある＝その点の周りでは様々な方向に微小変化させる事ができる」という事です。つまり一変数関数でいう微分が可能になる訳ですねー。



そして定理７．２では偏微分の導入を行っています。

大体はよめば分かると思うので、解説はカットします。考え方（イメージ）としては右図のような感じのものを思い浮かべればいいと思います。(先生も後で扱っていますが…個人的にはこの図から入って定理をみた方が式の意味が分かりやすいと思います。)



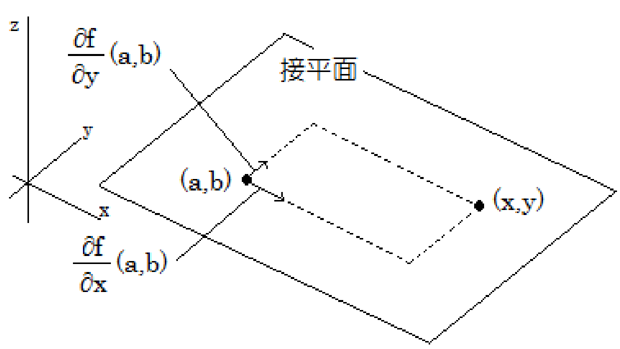
この図が表しているのは、x についての偏微分です。ある点(a,b)に関して x で偏微分するとは（名は体を表すとはこの事でしょうか？）x に偏った微分をするんですね。大雑把に言えば、y は定数部分として扱い、x においてのみ微分する（一変数関数同様、関数を x の関数として微分する）という事です。演習問題の簡単な問題などを見ていけば分かると思います。

>y を定数として扱うといいましたが、実際には x と y は独立した変数であるから$\frac{\partial y}{\partial x}=0$ だ、ということなのでしょう。（x から見たら定数も y も区別がつかない、と考えてもいいです）話忘れていましたが、“偏った”と言ったのは、偏微分は“ある変数（例えば x）の立場から関数を見る”というイメージが個人的にはあったからです。

その後に説明されている z=f(a,b)の(a,b)における接平面（と通常なる）に関する

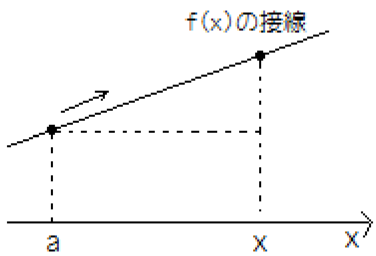
$$z=f(a,b)+\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

という式は、



点(a,b)から平面を眺めた時に、平面上の点(x,y)はどこにあるかを示したものです。

分かりにくいと思う人は右上の図とともに
平面上での一変数関数 f(x)の接線の式
 y=f(a)+f'(a)(x－a)
という式を思い浮かべながら考えて下さい。。

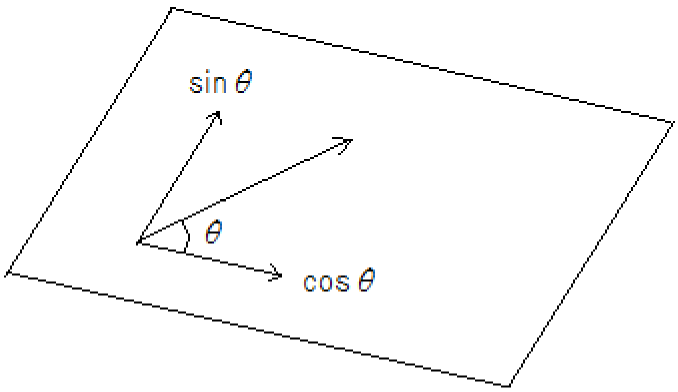


（偏）微分係数が（接点での）それぞれの方向の変化率になっていると考えればいいのですね！
＞定理７．２の所の図でいう“傾き”ってやつですね。。
なお、上の接平面の式は下のベクトル方程式（っていうんだっけ？）から導かれています。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ f(a,b) \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix} (s,t \in \mathbb{R})$$

ここで、$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \end{pmatrix}$は平面 y=b 上での(a,b)での接線の方向ベクトル、$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix}$は平面 x=a 上での(a,b)での接線の方向ベクトルです。(このページの右上の図を見ながら考えればわかると思います。)

この式から考えれば、別にこの２つのベクトルに並行なものでなくても、任意の方向で偏微分できるはず…といって考えた結果が、ノートに示されている θ を組み込んだ式です。



なお接面の式もこの θ の式も、実際のものと一致しない事もあります。

§8．全微分

§9．二変数関数の極大、極小

§10．リーマン積分（一部範囲外）

については
じきにあげる予定です。。

ミクプリ追加①. … 必要最小限(?)だけまとめておきます(§8以降)

全微分 → 要は全方向で、ということ。

条件 $\begin{cases} 1.\ f(x,y) \text{ が連続.} \\ 2.\ f_x,\ f_y \text{ が存在する.(偏微分可能)} \\ 3.\ f_x,\ f_y \text{ が連続.} \end{cases}$

※ $f(x) = \begin{cases} A & ((x,y)=◎) \\ B & (\text{それ以外}) \end{cases}$ となっている時は、◎のハニイに注目して下さい。

つまり、BとAがつながっているかどうか に注意して下さい。

偏微分係数も然りです。 カユ間でも出てきているので、
余力のある人はみて下さい。

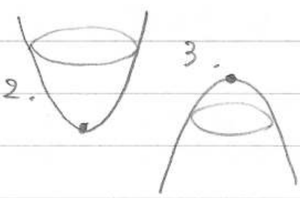
2変数関数の極大、極小

1変数関数とちがい、形があまりよく掴めない。
↓
判定法を使う!

$A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $B = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $C = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ として

$D = AC - B^2$ とすると.

1. $D = 0$ → 判定できない.
2. $D > 0$, $A > 0$ → 極小.
3. $D > 0$, $A < 0$ → 極大.
4. $D < 0$ → 鞍点.



この"D"というのは形からもなんとなく分かる通り、
関数の2次近似によるものから出ているものです。
詳しく知りたければ、多変数関数の微分第5回~9回(牛膓さんのHPで見れます)
を参照して下さい。

演プリ追加②

収束・発散

これについては収束判定法を活用して下さい。
あまり手はないので，時間を使って確かめるのがよいかと.
何かきれいな形ではさめたり（頭うち）発散したりします。

面積比較
$\left(y=\frac{1}{x} \right.$ と $\sum \frac{1}{n}$ など$\left. \right)$

数列
(与式) $= \sum a_{n+1}$
↓
収束判定.

Taylor展開（→ロピタルの定理）.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + x^4 + \cdots}{\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^5 + \cdots} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3} + \frac{R_1(x)}{x^3}}{\frac{1}{2} + \frac{R_2(x)}{x^3}} = \frac{2}{3}$$

$$\left(\frac{R(x)}{x^3} \to 0 \quad (x \to 0) \right)$$

差分
(与式) $= \sum \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$.

大小関係
$e^x - 1 > x$.

などを活用して下さい。

リーマン積分

"積分"を数学的に（定式化して）定義したという事です.
今まで当たり前にしていた積分計算を定義しなおしただけです。
こまい所がテストに出ない事を祈りましょう（笑）. 説明は特に必要ないと思います。

有理関数の積分（範囲外）

要は，有理関数の積分は理論上可能，といいたいみたい。高校の延長，ですね〜。。

∵（有理関数）＝（多項式）＋（分数関数（?））
→ 多項式（ex. x^3+3x^2-5x+3）は計算できる.
→ 分数関数は部分分数に分解できる
→ それぞれの項は「単独に計算」or「漸化式で計算」できる.

さいごに…

時間とパソコンの関係で手書きが多いです。ゴメンナサイ。。何かあれば連絡して下さい。