03

I. 解答 1.　Jordan 標準形

Aについて固有多項式 $\phi(\lambda)=0$ を解く

$$\phi(\lambda)=\begin{vmatrix}-5-\lambda & 9\\ -4 & 7-\lambda\end{vmatrix}=(-5-\lambda)(7-\lambda)+36$$

$$=\lambda^2-2\lambda+1=0 \longrightarrow (A-I_2)^2=0$$

$$(\lambda-1)^2=0 \qquad \therefore \lambda=1$$

固有多項式が重解を持つのでAをJordan標準形へ変形する。

$\vec{p_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ とする。　$\vec{p_2}$ を $\vec{p_2}=(A-\lambda I_2)p_1 \quad \cdots ①$ て定める。

$$=\begin{pmatrix}-6 & 9\\ -4 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}\neq 0$$

のように定める

また、$(A-I_2)p_2=(A-I_2)^2p_1=Op_1=0 \quad \cdots ②$

①より　$p_2=Ap_1-p_1$

$p_1+p_2=Ap_1$

②より　$Ap_2-p_2=0$

$p_2=Ap_2$

$$\therefore A(p_1\ p_2)=(Ap_1\ \ Ap_2)=(p_1+p_2\ \ p_2)$$

$$=(p_1\ p_2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$P=(p_1\ p_2)$ とすると、　$P^{-1}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-4 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

両辺をn乗して、　$P^{-1}A^nP=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}$

$$\therefore A^n=P\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\therefore A^n=\begin{pmatrix}1-6n & 9n\\ -4n & 6n+1\end{pmatrix}$$

解答2.

固有多項式 $\phi(\lambda)=0$ を解く.

(略) $=(\lambda-1)^2=0$

HCの定理より $(A-I_2)^2=O$

$$A(A-I_2) = A-I_2$$

$$A^n(A-I_2) = 1^n(A-I_2)$$

$$A^{n+1}-A^n = A-I_2$$

$$\therefore A^{n+1} = A^n + (A-I_2)$$

$A^n=a_n$ とおくと、

$$a_{n+1} = a_n + (\text{定数})$$

⇒ 等差数列の漸化式

$$\therefore a_n = n(A-I_2)+I_2$$

$$\therefore A^n = \begin{pmatrix} 1-6n & 9n \\ -4n & 6n+1 \end{pmatrix}$$

補足. チョット一般化. 数列の考え方.

HCの定理より $(A-\lambda I_2)^2=O$

$$A^2-\lambda A = \lambda(A-\lambda I_2)$$

両辺に $A^n$ をかけると、

$$A^{n+2}-\lambda A^{n+1} = \lambda(A^{n+1}-\lambda A^n)$$

$a_n = A^{n+1}-\lambda A^n$ とすると、 $\underline{a_{n+1} = \lambda a_n}$

等比数列の漸化式

$$\therefore a_n = \lambda^n a_0$$

$$A^{n+1}-\lambda A^n = \lambda^n(A-\lambda I_2)$$

両辺を $\lambda^{n+1}$ で割ると、

$$\frac{A^{n+1}}{\lambda^{n+1}} - \frac{A^n}{\lambda^n} = \frac{1}{\lambda}(A-\lambda I_2)$$

$b_n = \frac{A^n}{\lambda^n}$ とすると、

$$\underline{b_{n+1} = b_n + \frac{1}{\lambda}(A-\lambda I_2)}$$

等差数列の漸化式

$$\therefore b_n = \frac{n}{\lambda}(A-\lambda I_2)+b_0 = \frac{n}{\lambda}(A-\lambda I_2)+I_2$$

$$\therefore A^n = \lambda^n b_n = \lambda^{n-1}n(A-\lambda I_2)+\lambda^n I_2$$

$$= \lambda^{n-1}nA - \lambda^n n I_2 + \lambda^n I_2$$

$$= \lambda^{n-1}nA - (n-1)\lambda^n I_2$$

$\lambda=1$ $A=\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ とすると、 $A^n=\begin{pmatrix} -6n+1 & 9n \\ 4n & 6n+1 \end{pmatrix}$

Date . . . No.

解答3、

$(\lambda-1)^2=0$ までは解答2と同じ

$\lambda^n = g(\lambda)(\lambda-1)^2 + e\lambda + f \ldots ①$ とする

$g(\lambda)$ は $(n-2)$ 次式。 $e$ と $f$ は定数.

1回 $\lambda$ で微分すると、

$n\lambda^{n-1} = g'(\lambda)(\lambda-1)^2 + g(\lambda)2(\lambda-1) + e \ldots ②$

ここで、$\lambda=1$ より、

$① \ldots 1^n = e+f$

$② \ldots n1^{n-1} = e$ $\qquad \therefore e=n$

$f=1-n$

$\lambda=A$ として、

$A^n = g(A)\phi(A) + nA + (1-n)I_2$

$\phi(A) = (A-I_2)^2 = O$ なので、

$$A^n = nA + (1-n)I_2 = \begin{pmatrix} 1-6n & 9n \\ -4n & 6n+1 \end{pmatrix}$$

03

No. Date

III.

$$C=\begin{pmatrix}3&1&4&4\\-1&7&6&0\\0&3&3&7\\1&4&5&2\end{pmatrix}\xleftrightarrow{1r\leftrightarrow 4r}\begin{pmatrix}1&4&5&2\\-1&7&6&0\\0&3&3&7\\3&1&4&4\end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[4r-3\times(1r)]{2r+1r}\begin{pmatrix}1&4&5&2\\0&11&11&2\\0&3&3&7\\0&-11&-11&-2\end{pmatrix}\xleftrightarrow{4r+(2r)}\begin{pmatrix}1&4&5&2\\0&11&11&2\\0&3&3&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{1r+(2r)}\begin{pmatrix}1&15&16&4\\0&11&11&2\\0&3&3&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xleftrightarrow{1r-5\times(3r)}\begin{pmatrix}1&0&1&-31\\0&11&11&2\\0&3&3&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{2r-3\times(3r)}\begin{pmatrix}1&0&1&-31\\0&2&2&-12\\0&3&3&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xleftrightarrow{2r\div 2}\begin{pmatrix}1&0&1&-31\\0&1&1&-6\\0&3&3&7\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow{(3r)-3(2r)}\begin{pmatrix}1&0&1&-31\\0&1&1&-6\\0&0&0&-11\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xleftrightarrow{3r\div(-11)}\begin{pmatrix}1&0&1&-31\\0&1&1&-6\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[1r+31(3r)]{2r+6(3r)}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=C' とする.$$

$C'\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\vec{0}$ より、 $\begin{matrix}x+z=0\\y+z=0\\w=0\end{matrix}$ $z=t\ (t\in\mathbb{R})$ とすると、 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}t$

$\mathrm{ker}(C)$の基底は $\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\mathrm{Im}(C)$の基底は、 $\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\7\\3\\4\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}4\\0\\7\\2\end{pmatrix}$ である

Date . . No.

Ⅳ. (A). 自明な解とは $x=0$ $y=0$ $z=0$ のこと.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ のとき. $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0$ $\Leftrightarrow$ $A^{-1}$ は存在しない.

$\Leftrightarrow \det(A)=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc^2+ab^2+a^2c-a^2b-ac^2-b^2c$$
$$= a^2(c-b)+a(b^2-c^2)+bc^2-b^2c$$
$$= a^2(c-b)+a(b-c)(b+c)+bc(c-b)$$
$$= \{a^2-(b+c)a+bc\}(c-b)$$
$$= (a-b)(a-c)(c-b)=0$$

$a=b$ または、$b=c$ または $a=c$ が必要十分条件.

(B). $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $1r \leftrightarrow 2r$.

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $3r-2\times(1r)$. $1r-3\times(2r)$.

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$ $3r+5\times(2r)$.

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right)$ $1r\times 9$ $2r\times 9$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & -45 & -27 & 9 & 0 \\ 0 & 9 & 18 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right)$ $1r+5\times(3r)$ $2r-2\times(3r)$.

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 9 & 0 & 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 9 & 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 9 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right)$ $1r\times\frac{1}{9}$ $2r\times\frac{1}{9}$ $3r\times\frac{1}{9}$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{array}\right)$ $\therefore \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

# 数Ⅱ 03

Ⅳ. 解答1.

$s, t \in \mathbb{R}$ として、$\|\vec{b}-s\vec{a}_1-t\vec{a}_2\|^2$ が最小となるときの $s, t$ を求める。

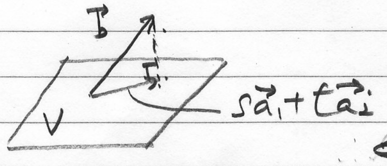
$$\|\vec{b}-s\vec{a}_1-t\vec{a}_2\|^2 = (-1-s)^2+(-s+t)^2+(1-s-t)^2$$
$$= (s+1)^2+(s-t)^2+(s+t-1)^2$$
$$= s^2+2s+1+s^2+t^2-2st+s^2+t^2+1+2st-2s-2t$$
$$= 3s^2+2t^2-2t+2$$
$$= 2s^2+2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+2$$
$$= 2s^2+2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

∴ $s=0$, $t=\frac{1}{2}$ のとき最小。

求めるベクトルは、$0\cdot\vec{a}_1+\frac{1}{2}\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

解答2.

$s, t \in \mathbb{R}$ として正射影ベクトルを $s\vec{a}_1+t\vec{a}_2$ とする。




左の図より、

$$\vec{b}-s\vec{a}_1-t\vec{a}_2 \perp V$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\vec{b}-s\vec{a}_1-t\vec{a}_2, \vec{a}_1)=0 & \cdots ① \\ (\vec{b}-s\vec{a}_1-t\vec{a}_2, \vec{a}_2)=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①… $(\vec{a}_1, \vec{b})-s\|\vec{a}_1\|^2-t(\vec{a}_1, \vec{a}_2)=0$

$0-3s-0t=0$ ∴ $s=0$

② $(\vec{a}_2, \vec{b})-s(\vec{a}_1, \vec{a}_2)-t\|\vec{a}_2\|^2=0$

$1-2t=0$ ∴ $t=\frac{1}{2}$

求めるベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

No. Date

解答3 最小自乗法

$A=(\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ とする また $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ とする

問題文を $\|A\vec{v}-\vec{b}\|^2$ が最小となる $\vec{v}$ をもとめる、へと変形する

∵ [ $A\vec{v}=x\vec{a}_1+y\vec{a}_2$ ← 部分空間 $V$ を表わしている。
ある $\vec{v}$ において $\|A\vec{v}-\vec{b}\|^2$ が最小となるとき、$A\vec{v}$ が $\vec{b}$ の $V$ への正射影になっている。]

$^\forall \vec{w}\in\mathbb{R}^2$ に対し、$(A\vec{v}-\vec{b}, A\vec{w})=0$

$$({}^tA(A\vec{v}-\vec{b}), \vec{w})=0$$

$\vec{w}$ は任意なので、

$${}^tA(A\vec{v}-\vec{b})=0$$

$${}^tAA\vec{v}={}^tA\vec{b}$$

$${}^tAA=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\\1&1\end{pmatrix}=(3\ 2)$$

$${}^tA\vec{b}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=(0\ 1)$$

$$\therefore (3\ 2)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=(0\ 1)$$

$$(3x\ \ 2y)=(0\ 1)$$

$$\therefore \begin{cases}3x=0\\2y=1\end{cases} \quad x=0,\ y=\frac{1}{2}$$

以上より正射影は $A\vec{v}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$