電磁気学 A　演習問題(1)　解答

第 1 問

角度θ_i,θ_{i+1}の線に挟まれた微小領域i内の電荷がPに作る電場の大きさは

$$E_i=\frac{k}{x^2+a^2}\cdot\frac{\Delta\theta_i}{2\pi}Q\quad(\Delta\theta_i=\theta_{i+1}-\theta_i).$$

対称性より,求める電場はx軸に平行であるとしてよいから

$$\vec{E}=\lim_{\Delta\theta_i\to0}\left(\sum_i\vec{E_i}\cdot\hat{x}\right)\hat{x}=\lim_{\Delta\theta_i\to0}\left(\sum_i\left(\frac{k}{x^2+a^2}\cdot\frac{\Delta\theta_i}{2\pi}Q\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\hat{x}$$

$$=\frac{kQx}{2\pi(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\lim_{\Delta\theta_i\to0}\sum_i\Delta\theta_i\right)\hat{x}=\frac{kQx}{2\pi(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot2\pi\hat{x}=\frac{kQx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{x}.$$

第 2 問

i番目のリング内の電荷は,$\Delta r_i=r_{i+1}-r_i$とすると

$$(\pi{r_{i+1}}^2-\pi{r_i}^2)\sigma=\pi\sigma((r_i+\Delta r_i)^2-{r_i}^2)=\pi\sigma(2r_i\Delta r_i+(\Delta r_i)^2)=2\pi\sigma r_i\Delta r_i+O((\Delta r_i)^2)$$

であるから,この電荷分布がPに作る電場は,前問より

$$\vec{E_i}=\frac{k\left(2\pi\sigma r_i\Delta r_i+O((\Delta r_i)^2)\right)x}{(x^2+{r_i}^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{x}.$$

従って,求める電場は

$$\vec{E}=\lim_{\Delta r_i\to0}\sum_i\vec{E_i}=\lim_{\Delta r_i\to0}\left(\sum_i\frac{k\left(2\pi\sigma r_i\Delta r_i+O((\Delta r_i)^2)\right)x}{(x^2+{r_i}^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{x}\right)=2\pi k\sigma x\left(\lim_{\Delta r_i\to0}\sum_i\frac{r_i\Delta r_i}{(x^2+{r_i}^2)^{\frac{3}{2}}}\right)\hat{x}.$$

ここで,$x\neq0$のとき

$$\lim_{\Delta r_i\to0}\sum_i\frac{r_i\Delta r_i}{(x^2+{r_i}^2)^{\frac{3}{2}}}=\int_0^a\frac{r}{(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}dr=\left[-(x^2+r^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_{r=0}^{r=a}=\frac{1}{|x|}-\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

であるから,

$$\vec{E}=2\pi k\sigma x\left(\frac{1}{|x|}-\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\hat{x}=2\pi k\sigma\left(\operatorname{sgn}x-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\hat{x}\ (\leftarrow x=0\ \text{でも成立}).$$

また

$$\lim_{a\to\infty}\vec{E}=\lim_{a\to\infty}2\pi k\sigma\left(\operatorname{sgn}x-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)\hat{x}=(\operatorname{sgn}x)\times2\pi k\sigma\hat{x}=(\operatorname{sgn}x)\times\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x}.$$

…間違いなどあったら,髙橋までお知らせください.その他質問も,できる限り答えます.

2010 年 1 月 17 日　　髙橋　一史