電磁気学 A　演習問題(2)　解答

第 1 問

角度θ_i, θ_{i+1}の線に挟まれた微小領域i内の電荷の電位への寄与は

$$\phi_i = \frac{k}{\sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \frac{\Delta\theta_i}{2\pi} Q \quad (\Delta\theta_i = \theta_{i+1} - \theta_i)$$

$$\therefore \phi = \lim_{\Delta\theta_i \to 0} \sum_i \phi_i = \frac{kQ}{2\pi\sqrt{x^2 + a^2}} \times \lim_{\Delta\theta_i \to 0} \sum_i \Delta\theta_i = \frac{kQ}{2\pi\sqrt{x^2 + a^2}} \cdot 2\pi = \frac{kQ}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$$

★実際

$$-\vec{\nabla}\phi = -\vec{\nabla}\frac{kQ}{\sqrt{x^2 + a^2}} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{kQ}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right)\hat{x} = \frac{kQx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{x}$$

となり,演習問題 1 の第 1 問で求めた電場と一致します.

第 2 問

i番目のリング内の電荷は,$\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$とすると

$$(\pi {r_{i+1}}^2 - \pi {r_i}^2)\sigma = \pi\sigma((r_i + \Delta r_i)^2 - {r_i}^2) = \pi\sigma(2r_i\Delta r_i + (\Delta r_i)^2) = 2\pi\sigma r_i \Delta r_i + O((\Delta r_i)^2)$$

であるから,この電荷分布の電位への寄与は,前問より

$$\phi_i = \frac{k}{\sqrt{x^2 + {r_i}^2}}\left(2\pi\sigma r_i \Delta r_i + O((\Delta r_i)^2)\right).$$

従って,求める電場は

$$\phi = \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_i \phi_i = k \times \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_i \frac{2\pi\sigma r_i \Delta r_i + O((\Delta r_i)^2)}{\sqrt{x^2 + {r_i}^2}} = 2\pi k\sigma \times \lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_i \frac{r_i \Delta r_i}{\sqrt{x^2 + {r_i}^2}}.$$

ここで

$$\lim_{\Delta r_i \to 0} \sum_i \frac{r_i \Delta r_i}{(x^2 + {r_i}^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^a \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}} dr = \left[\sqrt{x^2 + r^2}\right]_{r=0}^{r=a} = \sqrt{x^2 + a^2} - |x|$$

であるから

$$\phi = 2\pi k\sigma\left(\sqrt{x^2 + a^2} - |x|\right).$$

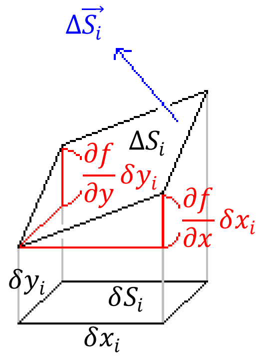
★実際,$x \neq 0$のとき

$$-\vec{\nabla}\phi = -2\pi k\sigma\vec{\nabla}\left(\sqrt{x^2 + a^2} - |x|\right) = 2\pi k\sigma\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(|x| - \sqrt{x^2 + a^2}\right)\right)\hat{x} = 2\pi k\sigma\left(\operatorname{sgn} x - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right)\hat{x}$$

となり,演習問題 1 の第 2 問で求めた電場と一致します.

第 3 問

面S_0を軸,y軸に沿って微小長方形$\delta S_i(=\delta x_i\times\delta y_i)$に分割する.このとき,微小曲面$z=f(x,y)$ $\big((x,y)\in\delta S_i\big)$を平行四辺形と見なすと,その面積ベクトル$\Delta\vec{S_i}$は



$$\Delta\vec{S_i}=\left(\hat{x}+\frac{\partial f}{\partial x}\hat{z}\right)\delta x_i\times\left(\hat{y}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{z}\right)\delta y_i=\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x}-\frac{\partial f}{\partial y}\hat{y}+\hat{z}\right)\delta S_i$$

$$\therefore\int_S\vec{V}(\vec{r})\cdot d\vec{S}=\lim_{\delta S_i\to 0}\sum_i\vec{V}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{S_i}$$

$$=\lim_{\delta S_i\to 0}\sum_i\left(V_0\hat{z}\cdot\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\hat{x}-\frac{\partial f}{\partial y}\hat{y}+\hat{z}\right)\delta S_i\right)$$

$$=V_0\times\lim_{\delta S_i\to 0}\sum_i\delta S_i=V_0S_0.$$

★ΔS_iは 2 つのベクトル$\left(\hat{x}+\frac{\partial f}{\partial x}\hat{z}\right)\delta x_i$と$\left(\hat{y}+\frac{\partial f}{\partial y}\hat{z}\right)\delta y_i$で張られる平行四辺形なので,その面積ベクトルはこれらの外積となります.掛ける順番に気をつけましょう(問題文にちゃんと指示がありました).

あるいは

$$\vec{V}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{S_i}=V_0(\hat{z}\cdot\vec{n_i}\Delta S_i)$$

として,$\hat{z}\cdot\vec{n_i}\Delta S_i$は$\Delta S_i$の$xy$平面への正射影$\delta S_i$に等しい,としてもよいでしょう.

第 4 問 (問題の訂正:$\vec{V}(\vec{r})=(\rho)\hat{\rho}\ \to\ \vec{V}(\vec{r})=V(\rho)\hat{\rho}$)

円筒面Sを微小平面ΔS_iに分割し,代表点を$\vec{r_i}(=x_i\hat{x}+y_i\hat{y}+z_i\hat{z})$とする.このとき,$\vec{\rho_i}=x_i\hat{x}+y_i\hat{y}$とおくと,その大きさ$\rho_i$は円筒の半径$R$に等しいから

$$\vec{V}(\vec{r_i})=V(R)\hat{\rho_i}$$

が成り立つ.また,法線ベクトルは

$$\vec{n_i}=\hat{\rho_i}$$

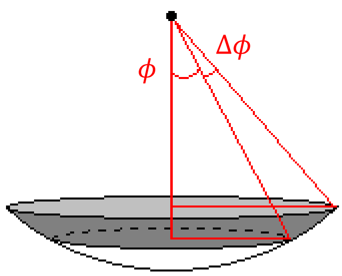
であるから

$$\int_S\vec{V}(\vec{r})\cdot d\vec{S}=\lim_{\Delta S_i\to 0}\sum_i\vec{V}(\vec{r})\cdot\vec{n_i}\Delta S_i=\lim_{\Delta S_i\to 0}\sum_i V(R)\hat{\rho_i}\cdot\hat{\rho_i}\Delta S_i=V(R)\times\lim_{\Delta S_i\to 0}\sum_i\Delta S_i$$

$$=2\pi RLV(R).$$

第 5 問

求める立体角$\Omega(S)$は,半頂角θの円錐が単位球面から切り取る面積$\omega(\theta)$に等しい.そこで,円錐の半頂角ϕを微小な角度$\Delta\phi$だけ増加させたときのωの増分$\Delta\omega$を考える.$\Delta\omega$は,半径が$\sin\phi,\sin(\phi+\Delta\phi)$の 2 円を底面とする,側面の厚さが$\Delta\phi$の円錐台の側面積に等しいから



$$\Delta\omega = \pi(\sin\phi + \sin(\phi + \Delta\phi))\Delta\phi.$$

ここで,Taylor の定理より

$$\sin(\phi + \Delta\phi) = \sin\phi + O(\Delta\phi)$$

が成り立つから

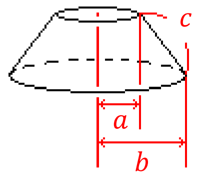
$$\Delta\omega = \pi\big(2\sin\phi + O(\Delta\phi)\big)\Delta\phi = 2\pi\sin\phi\,\Delta\phi + O((\Delta\phi)^2)$$

$$\therefore \Omega(S) = \omega(\theta) = \lim_{\Delta\phi\to 0}\sum_i \Delta\omega = \lim_{\Delta\phi\to 0}\sum_i \big(2\pi\sin\phi\,\Delta\phi + O((\Delta\phi)^2)\big) = 2\pi\int_0^\theta \sin\phi\, d\phi$$
$$= 2\pi(1-\cos\theta).$$

★解答の中で次の公式を使いました．確認してみてください:

右図のような円錐台の側面積は

$$\pi(a+b)c.$$



第 6 問

1. Sを微小平面ΔS_iに分割し,代表点を$\vec{r_i}$ $(r_i = |\vec{r_i}| = r)$とする.このとき,法線ベクトルは

$$\vec{n_i} = \hat{r_i}$$

であるから

$$\int_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{S} = \lim_{\Delta S_i\to 0}\sum_i \vec{E}(\vec{r_i})\cdot\vec{n_i}\Delta S_i = \lim_{\Delta S_i\to 0}\sum_i E(r)\hat{r_i}\cdot\hat{r_i}\Delta S_i = E(r)\times\lim_{\Delta S_i\to 0}\sum_i \Delta S_i$$
$$= 4\pi r^2\,E(r).$$

2. <u>$r > a$の場合</u>

Sは電荷Qを持つ半径aの球全体を含むから,求める電荷は

$$Q.$$

<u>$r < a$の場合</u>

電荷分布は一様だから,全電荷Qを体積比で比例配分すればよい.従って,求める電荷は

$$\left(\frac{r}{a}\right)^3 Q.$$

3. <u>$r > a$の場合</u>

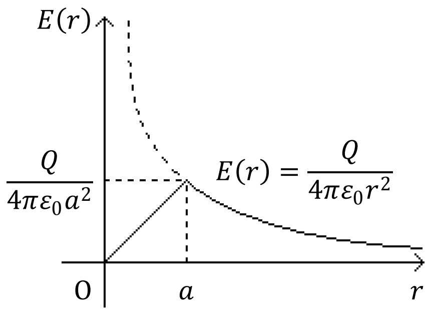
Gauss の法則より

$$4\pi r^2\,E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \therefore E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

<u>$r > a$の場合</u>

Gauss の法則より

$$4\pi r^2\,E(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^3\frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \therefore E(r) = \frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 a^3}.$$



第 7 問

円柱の軸の正方向を決め,これをz軸とするような円柱座標をとる.点$\mathrm{P}(r,\theta,z)$における電場は,対称性よりrのみの関数である.さらに,その方向はr方向である.

さて,この円柱と軸を共有する,軸方向の長さがl,半径rの円柱の外向き表面をSとする.Gauss の法則より

$$\int_S \vec{E}(r)\cdot d\vec{S}=\frac{Q}{\varepsilon_0}$$

が成り立つ.ここで,QはSの内部の電荷であって

$$Q=\begin{cases}\pi r^2 l\nu & (r<R)\\ \pi R^2 l\nu & (r>R)\end{cases}$$

である.

Sをその上面S_1,下面S_2,側面S_3に分けると,S_1,S_2の法線ベクトルはz方向で電場と垂直であり,面積分の値は 0 となる.従って

$$\int_S \vec{E}(r)\cdot d\vec{S}=\int_{S_3}\vec{E}(r)\cdot d\vec{S}=\lim_{\Delta S_i\to 0}\sum_i \vec{E}(r)\cdot\overrightarrow{n_i}\,\Delta S_i=\lim_{\Delta S_i\to 0}\sum_i (E(r)\hat{r})\cdot\hat{r}\Delta S_i$$

$$=E(r)\lim_{\Delta S_i\to 0}\sum_i \Delta S_i=2\pi r l E(r)$$

$$\therefore \vec{E}(r)=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}\hat{r}=\begin{cases}\dfrac{\nu}{2\varepsilon_0}\vec{r} & (r<R)\\[2ex] \left(\dfrac{R}{r}\right)^2\dfrac{\nu}{2\varepsilon_0}\vec{r} & (r>R).\end{cases}$$

…間違いなどあったら,髙橋までお知らせください.その他質問も,できる限り答えます.

2010 年 1 月 17 日　　髙橋　一史