電磁気学 ①

§1. 電磁気学の何たるか.

電磁気学は"場"の理論であって、この"場"と電荷との相互作用を記述することにより力学における力を導出することが目的になる.
"場"の性質はマクスウェル方程式という4つの微分方程式で書き表されるので、学ぶにあたっては、

1. 高校レベルの知識からマクスウェル方程式を導く.
2. マクスウェル方程式のいじり方を覚える.
3. 以上に必要な数学知識(ベクトル解析)を身につける.

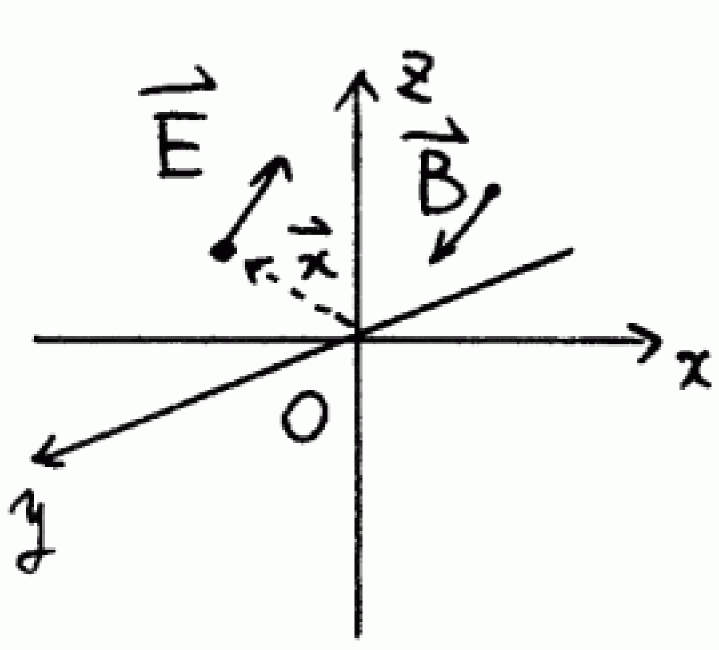
ことに主眼をおく.

§2. 場の概念

"場"とは、空間の各点に対応する属性である. "属性"というあいまいな言い方をしたが、これは例えばスカラーであったりベクトルであったりする.

・2-1 例(電場、磁場)

電磁場はベクトル場である. つまり、空間の点1つ1つが電場ベクトル、磁場ベクトルをもっていると考える.



空間上の1点を指定すれば電磁場ベクトルが定まる.

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t) \underset{略記}{=} \vec{E}(\vec{x}, t)$$
$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{x}, t)$$

・2-2 例(水流)

排水口に流れ込む水の流れは、ベクトル場で表せる. つまり、水の中の1点を指定すればその点での水の速度ベクトル$\vec{v}$が対応する.

・2-3 電場、磁場の定義.

速度vでうごく電荷eは、電場$E(\vec{x}, t)$、磁場$\vec{B}(\vec{x}, t)$から、

$$\mathbb{F} = e(\vec{E} + v \times \vec{B})$$ を受ける.

§3. ベクトル場の数学.

※この章の内容は、先を勉強していて分からない部分が出たときに見れば良いと思います.

基本的に、前章の水流のベクトル場のように"流れ"をイメージしながら考えると分かりやすいことが多いのでオススメ.

汎プリという性質上、数学的厳密さは無視するので注意.

○3-1 ベクトル場の表現.

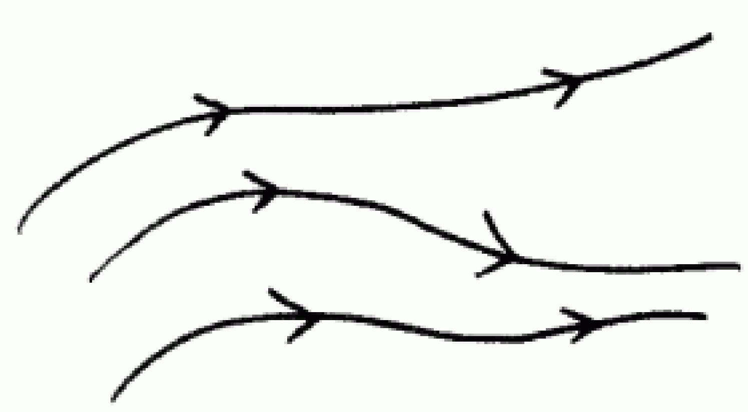
これ以降、ベクトル場のイメージとして矢印を用いるときには、高校で使った電気力線の定義に従う. つまり

○矢印の方向はベクトルの方向を表す.

○矢印の密度はベクトルの強さを表す.

○3-2 ベクトル場の分類.

1. 連続なベクトル場



他のところから来たベクトルの流れがそのまま続いている. この流れは以下の性質をもつ.

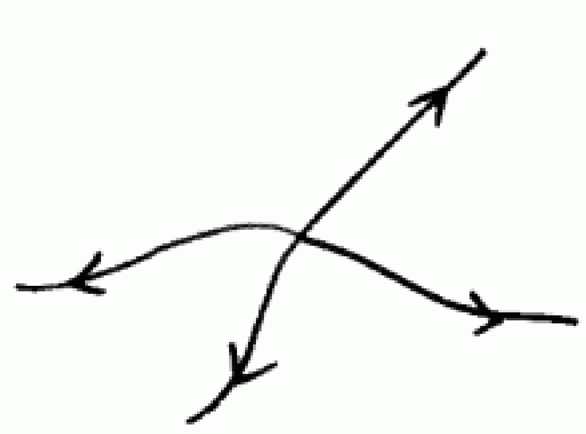
○枝分かれしない.

分岐点で一意のベクトルを定義できないため.

○折れ曲がらない

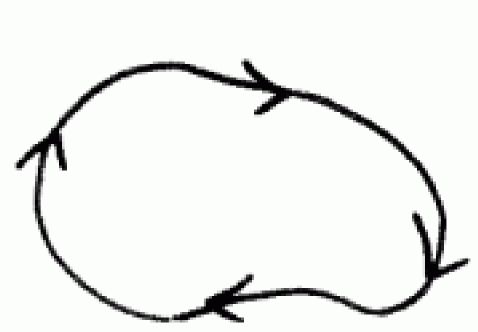
同上.

2. ベクトル場のわき出し.



ある点からベクトルの流れが発生している. あるいは点でなくてもある領域から発生していることも.

3. ベクトル場の回転.

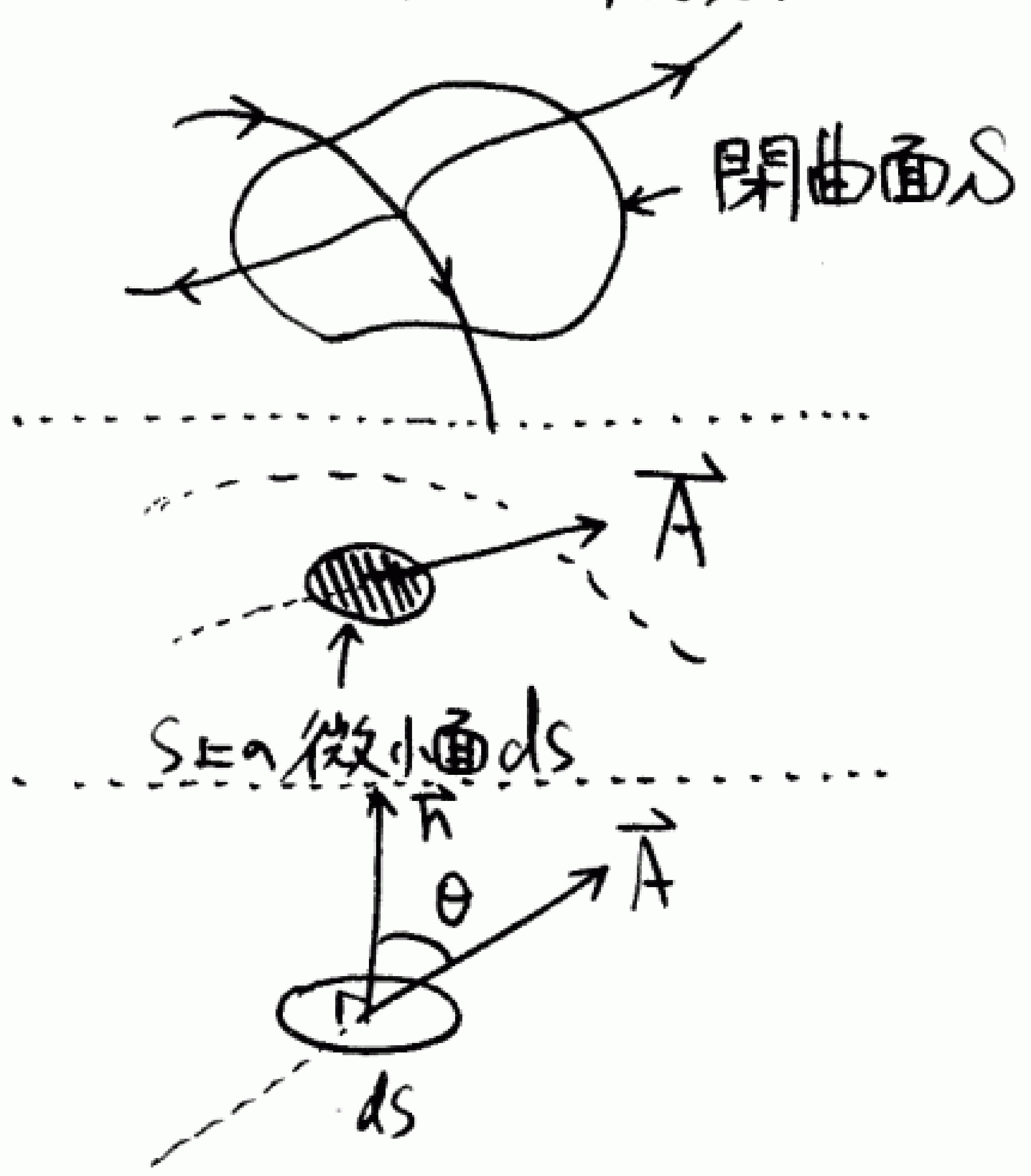


始点と終点のない回転が起きている

ベクトル場は以上3つの組み合わせで表現可能である.

・3-3 ベクトル場に関する積分

・3-3-1 面積分



ある領域をとり囲む曲面Sを考える。面積分はこの領域内でのわき出しを計る操作である。

そのためにSを微小面dSに分割し、"dSを貫くベクトル"を算出して足し合わせることにする。外に出るベクトルは正、内に入るベクトルは負として足し合わせれば、わき出し量がわかる。

dS上のベクトル$\vec{A}$が傾いているとき、"dSを貫くベクトル"は$\vec{A}$のうちdSに垂直な成分のみ。すなわち

$$\vec{A}\cdot\vec{n} = \vec{A}\cos\theta$$

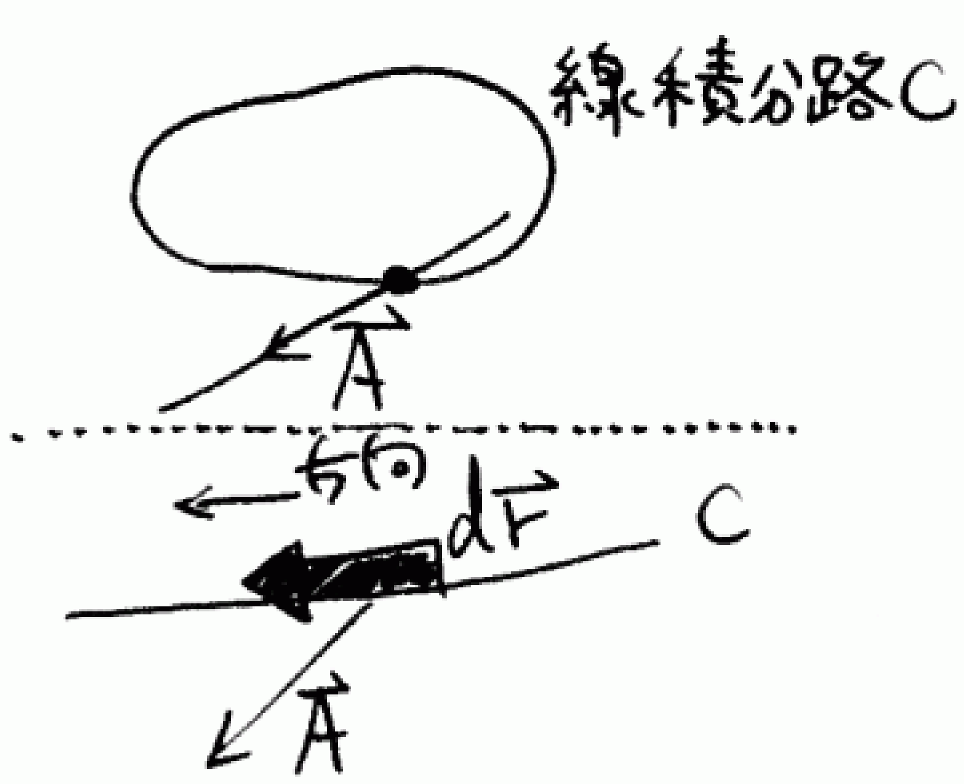
と表す。但し$\vec{n}$はdSに垂直な単位ベクトル。

以上から、S内からわき出るベクトルの総量は

$$\oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS \qquad \left(\oint_S dS \text{はS上の各微小面dSを足すということ}\right)$$

と書けることが分かった。

・3-3-2 線積分



ある閉じた曲線Cを考える。線積分は、この経路上でのベクトル場の回転を計る操作である。(普通時計回りで考える)

そのために、積分路上で$\vec{A}$の積分路の方向に平行な成分を足していくことにする。

この成分は

$$\vec{A}\cdot d\vec{r}$$

と書ける。($d\vec{r}$は積分路上の微少な方向ベクトル)

以上から、Cにそったベクトルの回転は、

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

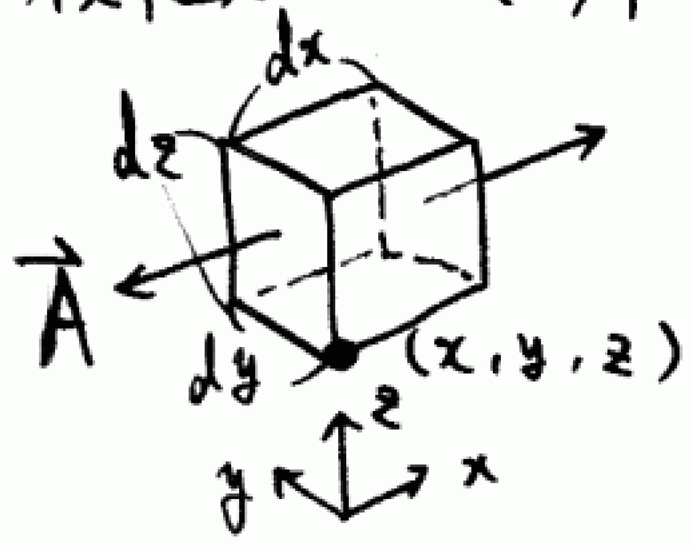
と書けることが分かった。

Q. ∮の丸は何? A. 閉じた領域上の積分ってこと。

◦3-4 ベクトル場に関する微分

・3-4-1 ダイバージェンス

微小な直方体内部でのわき出しを考える．領域が微小なので，側面上でベクトルの大きさは一定とみる．



とりあえず x 軸方向のわき出しを考える．

手前の面からのわき出しは

$$-\vec{A}(x, y, z)\cdot(1, 0, 0)\ dy\ dz$$

（$\vec{A}$ のうち x 軸成分を抜き出すために $(1, 0, 0)$ と内積をとって，しかも図のように $A_x < 0$ のときわき出しだから -1 をかけた）

奥の面からのわき出しは，

$$\vec{A}(x+dx, y, z)\cdot(1, 0, 0)\ dy\ dz$$

よって x 方向のわき出しの総和は，(手前＋奥)より，

$$\{\vec{A}(x+dx, y, z) - \vec{A}(x, y, z)\}\cdot(1, 0, 0)\ dy\ dz$$

$$= \frac{A_x(x+dx, y, z) - A_x(x, y, z)}{dx}\ dx\ dy\ dz$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x}\ dx\ dy\ dz$$

y, z 方向のわき出しも同様で，結局全わき出し~~量~~は，

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dx\ dy\ dz$$

と表せる．ここで，ナブラ演算子 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ を用いると，形式的に

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = \nabla\cdot\vec{A}$$

と書ける．ここで，$\nabla\cdot\vec{A} = \underbrace{\mathrm{div}}_{\text{ダイバージェンス}}\ A$ と定義する．これを用いると，

微小直方体からのわき出しは，

$$\mathrm{div}\ A\cdot dx\ dy\ dz = \mathrm{div}\ A\cdot \underbrace{dV}_{\text{微小体積}}$$

となって，$\mathrm{div}\ A$ は"わき出し密度"を表しているといえる．

Q．意味分かんないんだけど？　A．最後の3行だけ見れば良いとおもうよ．

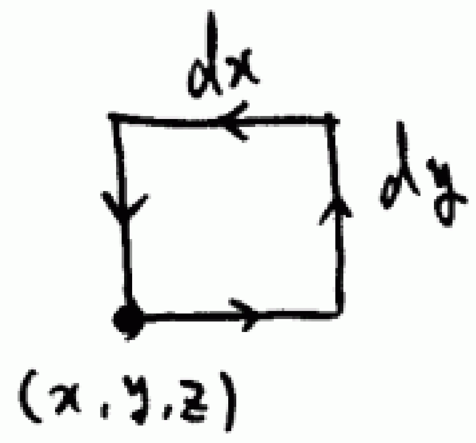
Q．A_x って？　A．$\vec{A}$ の x 方向成分．

Q．$(A_x(x+dx, y, z) - A_x(x, y, z))/dx = \frac{\partial A_x}{\partial x}$ って？　A．y, z がうごいてないから偏微分．

3-4-2 ローテーション

まずベクトルの回転を表示する方法を考える。回転経路が微小なら"回転面に垂直な方向"が定まるので、回転を"回転面に垂直な方向を向き、回転の強さを大きさとするベクトル"で表すことにする。(垂直な方向は2つあるので"右ねじが進む向き"の方をとる)

まず xy平面上の長方形にそった回転を考える。回転ベクトルはz軸正の向き。



以降でその大きさを求める。回転の強さとは、経路にそってうごいたとき ベクトル場が"同じ方向に押してくれる量"の総和である。

"同じ方向に押してくれる量" = ベクトル場の進行方向に平行な成分 × 進んだキョリ

を考慮して、

$$
\begin{aligned}
\text{xy平面上の回転の強さ} &= (1,0,0)\cdot\vec{A}\left(x+\tfrac{dx}{2}, y, z\right)dx \quad (\rightarrow)\\
&+ (0,1,0)\cdot\vec{A}\left(x+dx, y+\tfrac{dy}{2}, z\right)dy \quad (\uparrow)\\
&+ (-1,0,0)\cdot\vec{A}\left(x+\tfrac{dx}{2}, y+dx, z\right)dx \quad (\leftarrow)\\
&+ (0,-1,0)\cdot\vec{A}\left(x, y+\tfrac{dy}{2}, z\right)dy \quad (\downarrow)\\
&= \left\{\frac{A_x\left(x+\frac{dx}{2}, y, z\right)-A_x\left(x+\frac{dx}{2}, y+dx, z\right)}{dy} + \frac{A_y\left(x+dx, y+\frac{dy}{2}, z\right)-A_y(x,\dots)}{dx}\right\} \times dy\,dx\\
&= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)dx\,dy.
\end{aligned}
$$

よって"回転密度"は $\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}$ となり、他の成分も含めて書くと、

$$
\begin{aligned}
\text{回転密度} &= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\ \frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\ \frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\\
&= \nabla \times \vec{A}\\
&= \mathrm{rot}\,\vec{A} \quad (\text{ローテーション})
\end{aligned}
$$

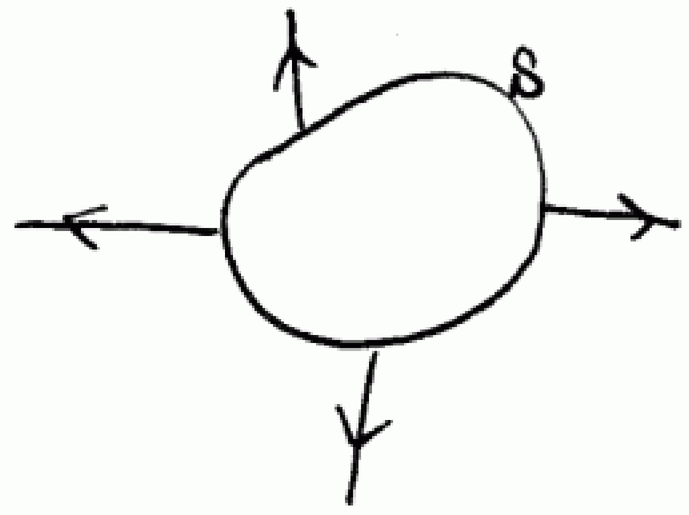
つまりある点、のまわりの回転密度ベクトルは $\mathrm{rot}\,\vec{A}$ で表される。

Q. $\vec{A}(x+\frac{dx}{2}, y, z)$ の $x+\frac{dx}{2}$ って何だよ

A. 微小な直方形なので、$(x,y,z)\rightarrow(x+dx, y, z)$ とうごく間に $\vec{A}$ は直線的に変化するとみることができる。この間をうごくときの作用は $\vec{A}$ の平均値 $= \vec{A}(x+\frac{dx}{2}, y, z)$ を用いて表せる。

○3-5 ベクトルの微分⟷積分の関係

・3-5-1 ガウスの定理

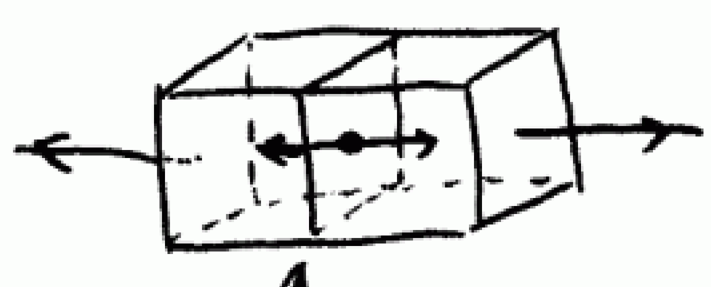


閉じた曲面内からのわき出しは

$$\oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS$$

と書けるのは前述のとおり。ここで、閉じた領域内を微小な直方体に分割する。わき出しの総量は各直方体からのわき出しの和として与えられて、

$$\int_V \mathrm{div}\,\vec{A}\,d^3x$$

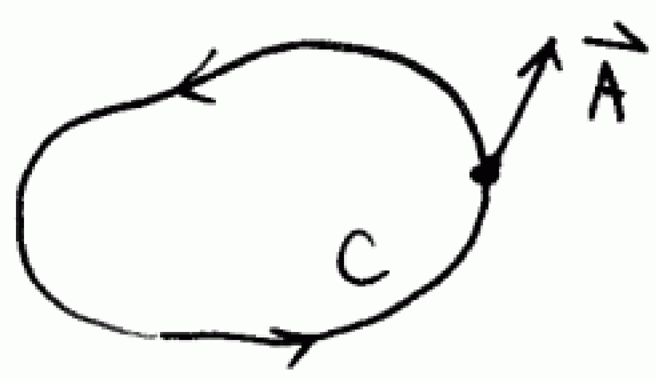


内部はうち消し合う。

よって、

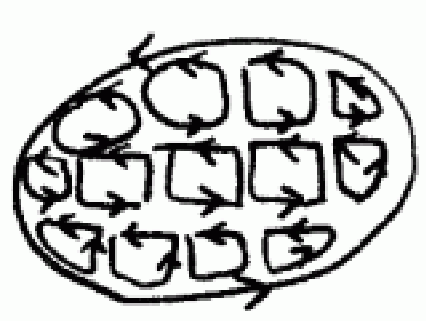
$$\oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}\,dS = \int_V \mathrm{div}\,\vec{A}\,d^3x \quad (\text{ガウスの定理})$$

・3-5-2 ストークスの定理



閉じた曲線における回転は

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$$



ここで、曲線を適当な曲面でつないでその曲面を小さく分割する。各微小面における回転の大きさの和が全体の回転の大きさの和になる。よって全体の回転は、

$$\int_S \mathrm{rot}\,A\cdot d\vec{S}$$

接しているところはうち消し合う。

但し $\vec{S}$ は微小面に垂直なベクトルで大きさは微小面の面積である。以上より、

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_S \mathrm{rot}\,A\cdot d\vec{S} \quad (\text{ストークスの定理})$$

以上2つの定理を用いると、積分形の物理法則を微分系で表せることになる。つまり、観測しやすいスケールの現象論を"空間の一点の性質"というより本質的な形に還元できるのである。

Q. 証明になってるーじゃん。証明しなくていいの？　A. 知らん。出らんよ。多分。

○3-6 ベクトル解析の公式

$\vec{A}$は任意の連続なベクトル関数とする. ϕとスカラー関数とする.

注) 証明はしません. やりたければ勝手に計算して下さい

- $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\ \vec{A}) = 0$
- $\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\phi) = \Delta\phi$

  但し Δはラプラシアンであり,

  $$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

  と定義する.
- $\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\ \vec{A}) = \mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\ \vec{A}) - \Delta \cdot \vec{A}$
- $\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\phi) = 0$

§4. 静電場の法則 と 静磁場の法則

◦4-1 ガウスの法則

「任意の閉曲面からわき出す電場はその中にある電荷に比例する」

即ち、

$$\oint_S \vec{E}(x)\cdot\vec{n}(x)\,dS \underset{(\text{ガウスの定理})}{=} \int_V \mathrm{div}\,\vec{E}\,dV = e_{in}/\varepsilon_0$$

e_{in} は内部の電荷の総和で、点電荷がたくさんあるとき、

$$e_{in} = \sum_i e_i$$

電荷が空間内に連続分布しているとき、電荷密度を $\rho(x)$ として、

$$e_{in} = \int_V \rho(x)\,dV$$

連続分布のときには特に、

$$\int_V \mathrm{div}\,\vec{E}\,dV = \int_V \rho(x)/\varepsilon_0\,dV$$

があらゆる V のとりかたで成立するから、

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho(x)/\varepsilon_0$$

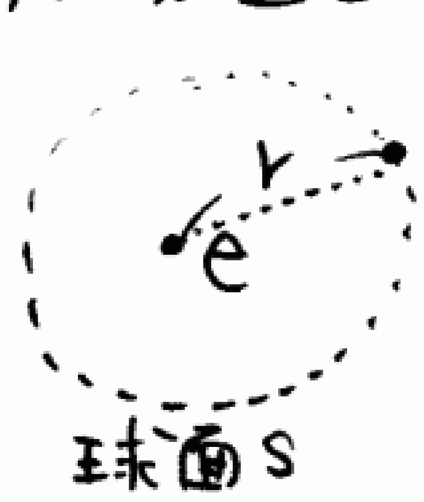
◦4-2 静磁場のわき出し

静磁場では電荷に相当する磁場わき出し源（磁気モノポール）がたぶん存在しないので、

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

◦4-3. クーロンの法則

ガウスの法則は特殊な場合しか電場を決定することができない。ここでは最も簡単な場合として、空間上に点電荷が1つある場合を考えよう。



点電荷 e から r 離れた点での電場を考える。

"空間は一様である" という要請から、2つの事が分かる。

1. e を中心，半径 r の球面上では電場の強さが等しい。
2. 電場は電荷の方を向いているかその反対向きである。

従って球面 S 上における電場の強さを $E(r)$，S 上の微小面積を dS として、ガウスの法則を適用すると、

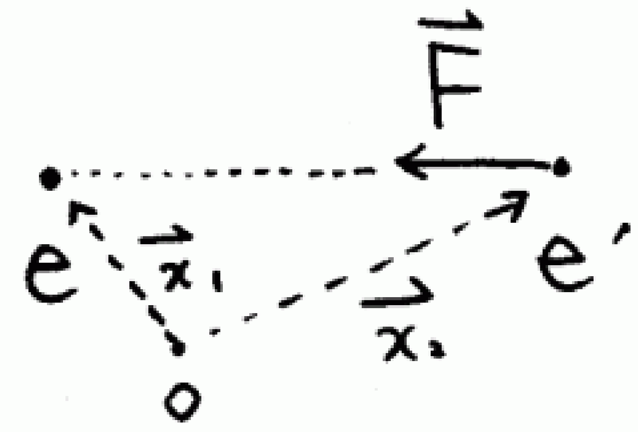
$$\oint_S \vec{E}(x)\cdot\vec{n}(x)\,dS = \oint_S E(r)\,dS$$ （$\vec{E}(x)$と$\vec{n}(x)$は常に平行だから）

$$= E(r)\oint_S dS$$ （微小面積dSを球面全体で足す→表面積）

$$= E(r)\,4\pi r^2 = e/\varepsilon_0$$

故に $E(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{e}{r^2}$.

以下のように、点電荷eとe'があり、それぞれの位置を$\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$とすると、



e'の位置において電場の強さは

$$|\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^2}$$

従って電磁場と電荷の相互作用 $\vec{F} = e(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$ から、

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{e'e}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|^2}$$

ここで、$\vec{F}$の方向は $\vec{x}_2-\vec{x}_1$ に平行だから、$\vec{F}$をベクトル表示するために、$\vec{x}_2-\vec{x}_1$ の方向を向いた単位ベクトル $\dfrac{\vec{x}_2-\vec{x}_1}{|\vec{x}_2-\vec{x}_1|}$ をかけてやる。

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{x}_2-\vec{x}_1}{|\vec{x}_2-\vec{x}_1|^3}\cdot ee'$$ （クーロンの法則）

以上のように、球対称性を利用することでガウスの法則から電場を決定できたが、対称性のない電荷分布に対しては無力である。その場合、分布している点電荷がつくる電場を足してやることにより電場が求まる。（重ね合わせの原理）

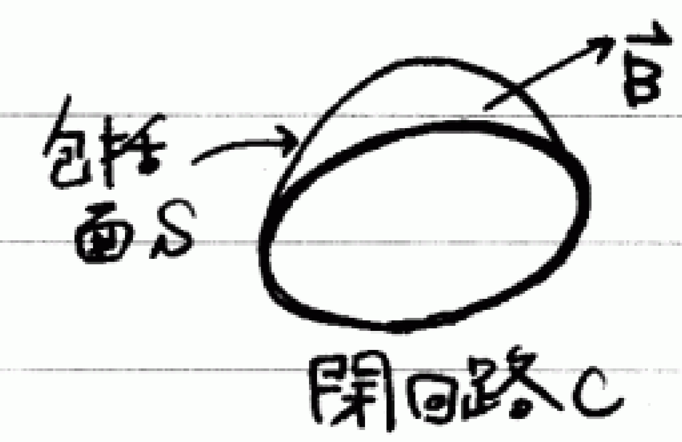
電磁気学②

§5 電磁誘導の法則

◦5-1 ファラデーの法則

「閉じた導線回路内部を貫く磁束が変化すると起電力が生じる」

但し磁束Nの大きさとは、閉回路Cを端とする任意の包括面Sを
通る磁束の大きさで、



$$N = \int_S \vec{B}(\vec{x},t)\cdot\vec{n}\,dS$$

（$\vec{n}$は微小面Sに垂直な単位ベクトル）

と表される。これを用いてファラデーの法則を表示すると、起電力ϕは、

$$\phi = -\frac{dN}{dt}$$

となる。起電力ϕは、"1Cの電荷が経路にそって動いたとき得るエネルギー"
だったことを思い出して、

$$e\phi = \oint_C e\vec{E}(\vec{x},t)\,d\vec{x}$$

とかける。以上の式から、

$$\oint_C \vec{E}(\vec{x},t)\,d\vec{x} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}(\vec{x},t)\cdot\vec{n}\,dS$$

$$= -\int_S \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{x},t)\cdot\vec{n}\,dS$$

この式では、磁束の変化（右辺）が電場をつくり（左辺）、起電力を生じる
とみていることになる。つまり電磁場だけの性質である。これを微分形
にして空間の1点の性質に書き直そう。左辺にストークスの定理を用いて、

$$\oint_C \vec{E}(\vec{x},t)\,d\vec{x} = \int_S \mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{x},t)\cdot\vec{n}\,dS.$$

従ってこの結果を代入して、

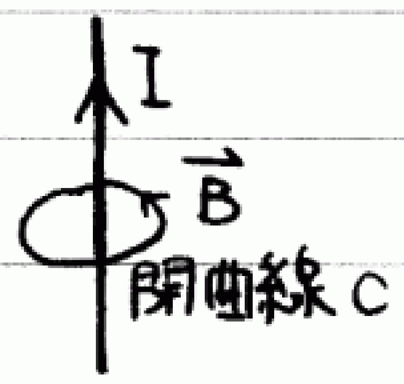
$$\int_S \left(\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{x},t) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{x},t)\right)\cdot\vec{n}\,dS = 0$$

故に、
$$\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{x},t) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{x},t) = 0$$

「磁束密度の変化が電場の回転密度を発生させる」

○5-2 アンペールの法則.

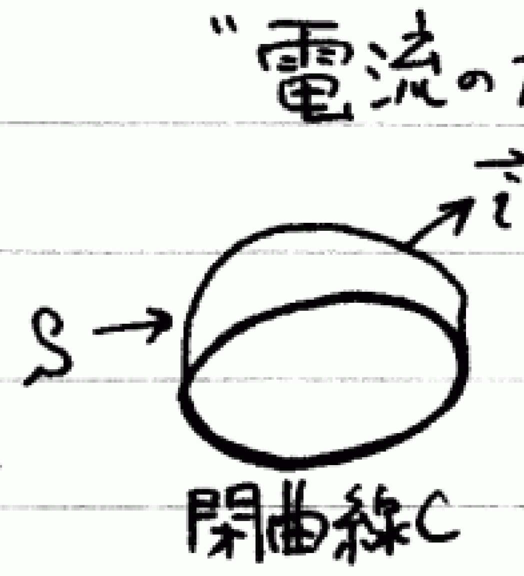
「一定電流のまわりにループ状の磁場が発生する」



$$\oint_C \vec{B}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = \mu_0 I$$

これを微分形式で記述しよう.

"電流の大きさ"を、"閉曲線Cを貫く電流密度の総和"と読みかえる.



空間上の1点での電流を表すベクトル $\vec{i}$ を導入する.
Cを貫く電流は、Cを端とする閉曲面 S 上において $\vec{i}$ を足したもので.

$$I = \int_S \vec{i}\cdot\vec{n}\,dS$$

以上から、

$$\oint_C \vec{B}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = \mu_0\int_S \vec{i}\cdot\vec{n}\,dS \qquad (※)$$

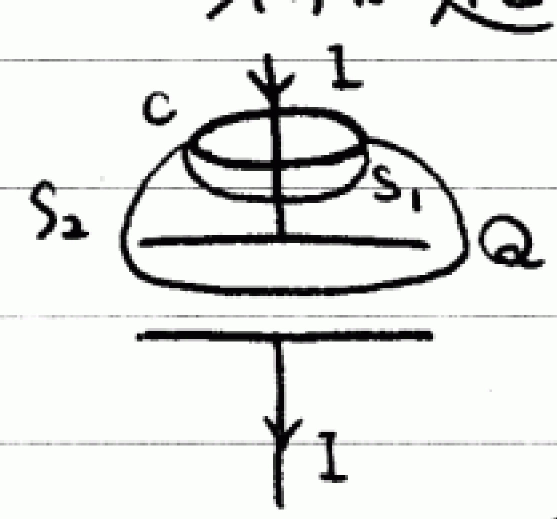
ストークスの定理を用いて.

$$\int_S \left(\mathrm{rot}\,\vec{B}(\vec{x}) - \mu_0\vec{i}\right)\cdot\vec{n}\,dS = 0$$

故に $\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\vec{B}(\vec{x}) = \vec{i}$

○5-3 アンペールの法則の不備.

アンペールの法則は一定電流に対してしか適用できない.
ここではコンデンサーに対しアンペールの法則を適用し、
何が起きるか試そう.



コンデンサーの充電中、Iの電流が流れているとする.
この導線のまわりの閉回路C上には、$\oint_C \vec{B}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = \mu_0 I$ で
表される磁場が発生している. さて、これを(※)式を用いて
表現すると、導線と交わる曲面 S_1 で考えたとき.

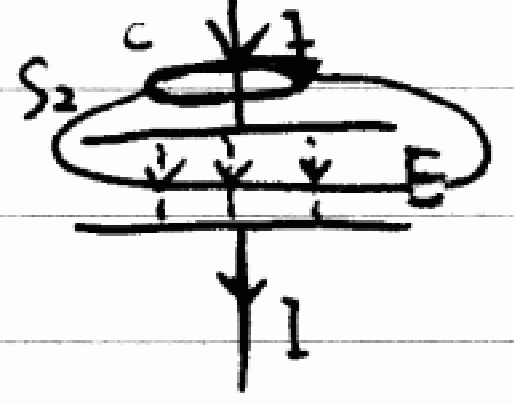
$$\oint_C \vec{B}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = \mu_0\int_{S_1} \vec{i}\cdot\vec{n}\,dS = \mu_0 I$$

となって正しい. 一方. 極板の間を通る曲面 S_2 では、

$$\oint_C \vec{B}(\vec{x})\cdot d\vec{x} = \mu_0\int_{S_2} \vec{i}\cdot\vec{n}\,dS = 0$$

となって矛盾してしまう.

従ってこの場合アンペールの法則では不十分である。このパラドックスを解決するために、「電流だけでなく、S_2を貫く電場の変化も磁場を誘導する」とすればよい。



※ファラデーの法則「磁場の変化で電場が発生」と同様である。

電場の変化が電流と同じはたらきとすることから、電場の変化

$$\int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot \vec{n}\, dS$$

を変位電流と呼ぶ。次章で変位電流を考慮した磁場の誘導を考えよう。

5-4 アンペール・マクスウェルの法則

5-2 アンペールの法則に変位電流の項をつけ加えることにより、

$$\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{i}(\vec{x},t) + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}(\vec{x},t)}{\partial t}$$

これはあらゆる電磁場で成立する。

§6 マクスウェル方程式

今までの法則で電磁場の法則は全て記述できる。

$$\begin{cases} \mathrm{div}\,\vec{E}(\vec{x},t) = \rho(\vec{x},t)/\varepsilon_0 & (\text{ガウスの法則}) \\ \mathrm{div}\,\vec{B}(\vec{x},t) = 0 & (\text{磁場に関するガウスの法則}) \\ \mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{x},t) + \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}(\vec{x},t) = 0 & (\text{ファラデーの法則}) \\ \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\vec{B}(\vec{x},t) = \vec{i}(\vec{x},t) + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}(\vec{x},t)}{\partial t} & (\text{アンペール・マクスウェルの法則}) \end{cases}$$

ε_0とかμ_0がうっとうしいので、

磁場の強さ $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}$

電束密度 $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$

と定義することにより、上の4式をまとめると、

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{i} \\ \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \end{cases}$$

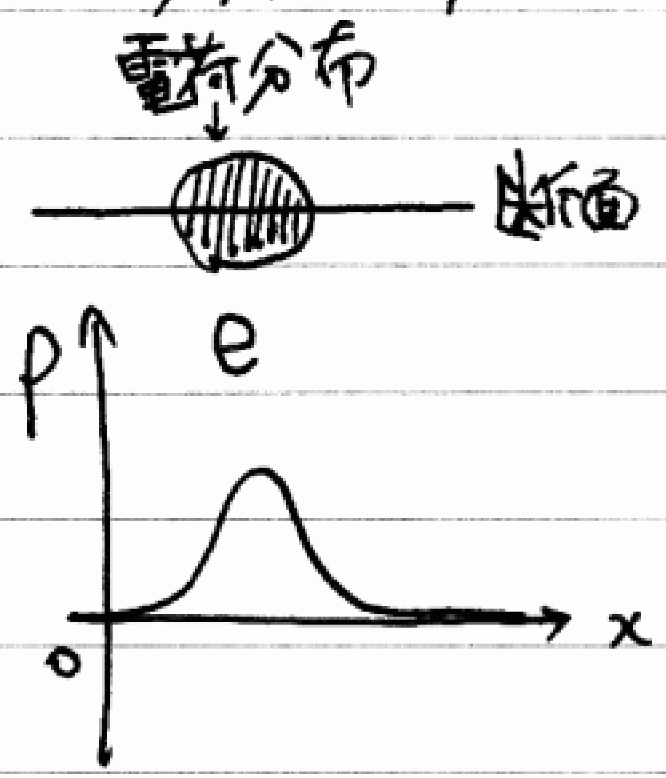
となる。この4つの方程式をマクスウェル方程式とよび、電磁場はこの方程式により完全に記述される。

電磁気学 ③

§7 点電荷と電磁場.

マクスウェル方程式において電荷は、"空間上に電荷密度 $\rho(\vec{x},t)$ がどのように分布しているか" によって表現されている. 従って点電荷を表現するためには、点電荷の電荷密度を求める必要がある.

さて、ある場所に合計 e の電荷が広がって分布していると考えよう. この電荷密度を位置の関数として $\rho(\vec{x})$ と書く.

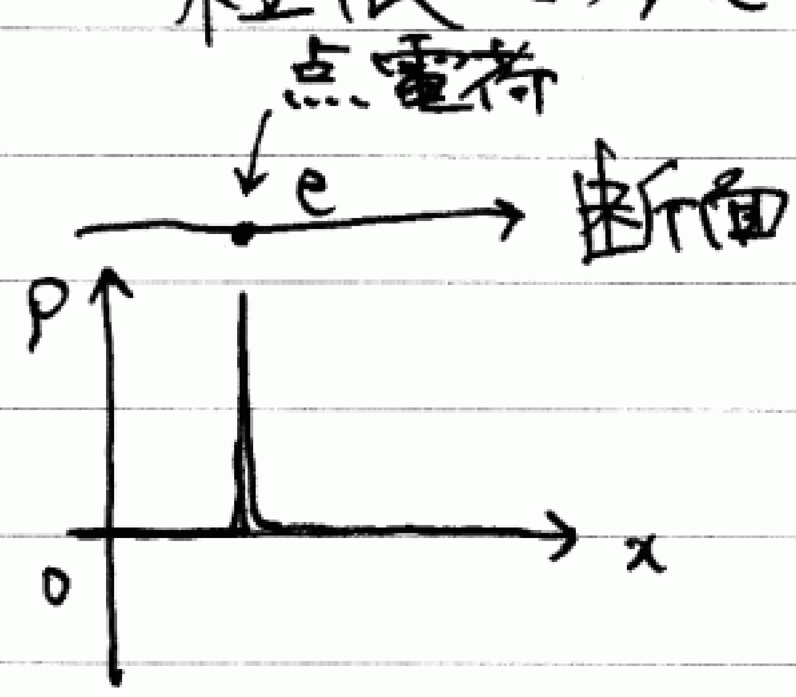


$\rho(\vec{x})$ の断面は左図のようになっているだろう.
電荷の合計が e という条件から.

$$\int_{全空間} \rho(\vec{x})\, d^3\vec{x} = e \quad (※)$$

という式が成立する.

点電荷というのは、上で考えた電荷密度が一点に集中していった極限と考えられるので、電荷密度 ρ は幅が狭くなっていって



左のようなグラフになると考えられる. このような関数の数学的表現が δ関数(デルタ)である.

・7-1 δ-関数.

δ-関数は次のような性質を満たす超関数である.

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & (x=0) \\ 0 & (x\neq 0) \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) = 1$$

3次元への拡張を δ^3 と表すと.

$$\delta^3(\vec{x}) = \begin{cases} \infty & (\vec{x}=\vec{0}) \\ 0 & (\vec{x}\neq \vec{0}) \end{cases}$$

$$\int_{全空間} \delta^3(x)\, dx = 1$$

位置$\vec{r}$, 電荷eの点電荷をδ-関数を用いて表現すると、

$$\rho(\vec{x}) = e\delta^3(\vec{x}-\vec{r})$$

となる。この電荷密度$\rho(\vec{x})$は$\vec{x}=\vec{r}$のときだけ0以外の値をもち、さらに電荷の合計がeであるための条件式(※)も、

$$\int_{全空間} \rho(\vec{x})\,dx = e\int_{全空間} \delta^3(\vec{x}-\vec{r})\,dx = e$$

となって適合する。

7-2 点電荷が分布する系の方程式

N個の点電荷が分布していて、i番目の電荷は電気量e_i、位置$\vec{r_i}$であるとしよう。このような系の運動を解析するためには、N個分の運動方程式 + マクスウェル方程式を用いれば十分である。ここで、電荷密度$\rho(\vec{x})$は、各電荷がつくる電荷密度を足してやれば求まるので、

$$\rho(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} e_i\delta^3(\vec{x}-\vec{r_i})$$

となる。また、1つの点電荷がつくる電流密度は、電荷密度×速度より、$e_i\delta^3(\vec{x}-\vec{r_i})\times\dot{\vec{r}}$と表される。よって、全体の電流密度は、

$$i(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{N} e_i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{r_i})\times\dot{\vec{r}}$$

以上より、マクスウェル方程式は、

$$(\star)\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{x},t) - \dfrac{\partial\vec{B}(\vec{x},t)}{\partial t} = 0 \\ \mathrm{rot}\,\vec{H}(\vec{x},t) - \dfrac{\partial\vec{D}(\vec{x},t)}{\partial t} = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} e_i\,\dot{\vec{r_i}}(t)\,\delta^3(\vec{x}-\vec{r_i}) \\ \mathrm{div}\,\vec{D}(\vec{x},t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} e_i\,\delta^3(\vec{x}-\vec{r_i}) \\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \end{cases}$$

運動方程式は、ローレンツ力の公式を用いて、各iに対し

$$(\triangle)\quad m_i\frac{d^2\vec{r_i}(t)}{dt^2} = e_i\left(\vec{E}(\vec{r_i},t) + \dot{\vec{r_i}}\times\vec{B}(\vec{r_i},t)\right)$$

(☆)と(△)を解きさえすれば全て求まるのだが、難しいのでこれから様々な工夫を行う。

電磁気学 ④

§8 電磁ポテンシャル

マクスウェル方程式を簡略化するために、電磁場の表示を工夫する.
新しい表示では、

$\vec{A}$: ベクトルポテンシャル [T·m]

ϕ : スカラーポテンシャル [V]

から電場、磁場が決定され、

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

となる。こうおくことにより、マクスウェル方程式の一部が

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{A} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \underbrace{-\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi}_{=0} - \mathrm{rot}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\,\vec{A})$$

となって自動的に満たされる.

電磁ポテンシャルの成分は合計4つであり、電磁場の成分(6つ)より少ない。これははじめからマクスウェル方程式に都合の良い形でポテンシャルを定義してあるからであり、簡略化の1つである.

§9 電磁ポテンシャルによるマクスウェル方程式

前節の通りマクスウェル方程式のうち2つは自動的に満たされる.
残る式は、

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{i} \quad (1)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \quad (2)$$

であるから、これを電磁ポテンシャルで表そう.
$c = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ とする. (後で分かるがこれは光の速さである).
$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}$, $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ だった事を思い出して、(1), (2)は

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{i} \quad (1)'$$

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \quad (2)'$$

となる.

(1)′に $\vec{B}=\mathrm{rot}\,\vec{A}$, $\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ を代入する。

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\vec{A}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{grad}\,\phi+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\mu_0\vec{i}$$

$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\vec{A}\right)=\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{A}\right)-\Delta\cdot\vec{A}$ （公式）を用いて。

$$\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}-\Delta\cdot\vec{A}=\mu_0\vec{i} \quad (3)$$

(2)′も変形すると。

$$\mathrm{div}\left(-\mathrm{grad}\,\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\rho/\varepsilon_0$$

$$-\Delta\cdot\phi-\mathrm{div}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=\rho/\varepsilon_0 \quad (4)$$

(3)と(4)が電磁ポテンシャルを決定する方程式である。全然簡略化されていないので、これからこの式をいじる。

§10 ゲージ変換.

力学のポテンシャルは基準点をどこにとっても良かった事を思い出そう。
つまり、$U'=U+$定数 のように形を変えても、UとU'はポテンシャルとして同じであった。
電磁ポテンシャルではもっと自由に形を変えても等価である。この性質を用いて、§9 (3),(4)式が簡単になるようなポテンシャルのとり方を考えよう。

10-1 ゲージ変換

電磁ポテンシャル $\vec{A}$, ϕ の形を変えて新しい電磁ポテンシャル $\vec{A}'$, ϕ' に変形する。この2つが同じ電磁場を表している条件は、

$$\vec{B}=\mathrm{rot}\,\vec{A}=\mathrm{rot}\,\vec{A}'$$

$$\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\mathrm{grad}\,\phi'-\frac{\partial\vec{A}'}{\partial t}$$

であることである。どのような変形なら許されるだろうか？

ベクトル解析の公式 $\mathrm{rot}\left(\mathrm{grad}\,u\right)=0$ （uはスカラー関数）からみて、

$$\vec{A}'=\vec{A}+\mathrm{grad}\,u$$

としても $\vec{B}$ が変わらないことが分かる。つじつま合わせのために、

$$\phi'=\phi-\frac{\partial u}{\partial t}$$

とすれば、$\vec{E}$ も変わらなくなる。以上のような $\vec{A}'$, ϕ' への変形を、ゲージ変換とよび、スカラー関数 u は自由に選ぶことができる。

ゲージ変換後の $\vec{A}'$, ϕ' もマクスウェル方程式 (3), (4) をみたす.
(表している電磁場が同じなのだから当たり前である)

・10-2 ローレンツゲージ

ゲージ変換の任意関数 u を工夫すると, (3), (4) が簡単になる.
いま, 電磁場が適当な電磁ポテンシャル $\vec{A}_0$, ϕ_0 で表されているとしよう. (当然 $\vec{A}_0$, ϕ_0 は (3), (4) をみたす)

$\vec{A}_0$, ϕ_0 を都合の良い形にするため, 以下のように u を定める.

χ をあるスカラー関数として,

$$\Delta \chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\left(\mathrm{div}\,\vec{A}_0 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi_0}{\partial t}\right) \qquad (5)$$

をみたす解の1つを u とおく. (適当に選んで良い)

このような u によってゲージ変換された電磁ポテンシャルをローレンツゲージとよぶ.

$$\begin{cases} \vec{A}_L = \vec{A}_0 + \mathrm{grad}\, u \\ \phi_L = \phi_0 - \frac{\partial}{\partial t} u \end{cases}$$

ローレンツゲージは, 以下のような特殊な性質をもつ.

$$\mathrm{div}\,\vec{A}_L + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi_L}{\partial t} = \mathrm{div}\,\vec{A}_0 + \Delta u + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$= 0 \qquad (\because u \text{ は } (5) \text{ をみたすから})$$

また, 両辺を時間微分して,

$$\mathrm{div}\,\frac{\partial \vec{A}_L}{\partial t} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi_L}{\partial t^2} = 0$$

この2式を使うと, (3), (4) 式が変形できて,

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\vec{A}_L = \mu_0 \vec{i} \qquad (3)'$$

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\phi = \rho/\varepsilon_0 \qquad (4)'$$

となる.

○10−3 ローレンツゲージによるマクスウェル方程式の表示.

以上の結果をまとめよう.

$$\mathrm{div}\,\vec{A}_L + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi_L}{\partial t} = 0 \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned}\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A}_L &= -\mu_0 \vec{i}\\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi_L &= -\rho/\varepsilon_0\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{A}_L}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\phi_L\\ \vec{B} &= \mathrm{rot}\,\vec{A}_L\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

どういう事かというと (5)式から (6)をみたすような電磁ポテンシャル $\vec{A}_L$, ϕ_L をいつでも定める事ができて、このようなローレンツゲージに対しては単純形のマクスウェル方程式 (7)で性質が記述でき、(8)を用いると電磁場が決定されて、ローレンツ力の公式

$$\vec{F} = e\,(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

にもち込める、ということである.

電磁気学 ⑤

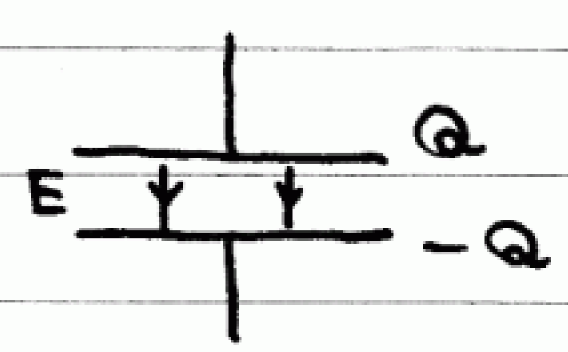
§11 電磁場のエネルギー

2つの質点が相互作用している情況を考えよう。この力学系のエネルギーは、

運動エネルギー + ポテンシャルエネルギー の形で与えられるのであった。では、ポテンシャルエネルギーの実体とは何であろうか。

相互作用が電磁気力であったとする。この2つの質点の周辺には、電磁場が空間的に広がっている。エネルギーの実体は、この電磁場が持っている、と考える。こうすることで、質点が存在しない空間をエネルギーが伝わることが説明できるのである。(代表例が電磁波)
電磁場も考慮に入れたエネルギー保存則を導こう。

◦11-1 電場のもつエネルギー



面積S，極板間l，印加電圧Vの平行板コンデンサーを考えよう。極板間だけに一様な電場Eが存在し、

$$l\cdot E = V$$

が成立。また、たまった電荷をQとして、

$$2\cdot\frac{1}{2}\varepsilon_0^{-1} Q S^{-1} = E.$$

以上から、このコンデンサーにたまっているエネルギーは、

$$\frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}S\varepsilon_0 V^2 l^{-1}$$

一様な電場Eは体積Slの空間に分布している。エネルギーがこの空間上に等しく分布しているとすると、エネルギー密度は、

$$\frac{1}{2}QV/Sl = \frac{1}{2}\varepsilon_0 V^2 l^{-2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

となる。すなわちある空間領域V中の電場のエネルギーは、

$$\int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\, d^3x$$

とすれば、電磁波等のエネルギーも説明できる。

◦11-2 磁場のもつエネルギー

磁束密度Bの空間がもつエネルギー密度は、

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}B^2$$

で与えられる。(無限長ソレノイドコイルのエネルギーを考えよ。)

◦11−3 エネルギー保存則

電磁場が持つエネルギーも含めてエネルギー保存則が成立する。
これを運動方程式とマクスウェル方程式から導こう。
電磁場中の点電荷の運動方程式は、

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \int_V d^3x \left\{ e_i \delta^3(\vec{x}-\vec{r}_i) \cdot \vec{E} + e_i \delta^3(\vec{x}-\vec{r}_i) \dot{\vec{r}}_i \times \vec{B} \right\}$$

力学でやったとおり、運動方程式の両辺に速度をかけてやると
エネルギーの微分になる。

$$m_i \vec{v}_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2\right)$$
$$= \int_V d^3x \left\{ e_i \vec{v}_i \delta^3(\vec{x}-\vec{r}_i) \cdot \vec{E} + e_i \delta^3(\vec{x}-\vec{r}_i) \vec{v}_i \cdot [\vec{v}_i \times \vec{B}] \right\}$$

$\vec{v}_i$ と $\vec{v}_i \times \vec{B}$ は直交するので、$\vec{v}_i \cdot [\vec{v}_i \times \vec{B}] = 0$ である。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2\right) = \int_V d^3x \cdot e_i \vec{v}_i \delta^3(\vec{x}-\vec{r}_i) \cdot \vec{E}$$

全点電荷について和をとった上でマクスウェル方程式を代入する。

$$\sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2\right) = \int_V d^3x \left\{ \sum_i e_i \vec{v}_i \delta^3(\vec{x}-\vec{r}_i) \right\} \cdot \vec{E}$$
$$= \int_V d^3x \; \vec{i} \cdot \vec{E}$$
$$= \int_V d^3x \left\{ \mathrm{rot}\, \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right\} \cdot \vec{E}$$
$$= \int_V d^3x \left\{ \vec{E} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{E} \right\} \quad (◎)$$

ここで、

$$\omega(\vec{x}, t) = \frac{1}{2}(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2$$

という量を導入する。これは電磁場のエネルギーの合計である。

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right)$$

$$= \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \left(\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E},\ \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\ \text{だから}\right)$$

$$= \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H}\cdot \mathrm{rot}\,\vec{E}$$

$$\therefore\ \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E}.$$

(◎) に代入して、

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2}\right) = \int_V d^3x \left\{ \vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{H} - \vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E} - \frac{\partial w}{\partial t} \right\}$$

公式 $\mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{H}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} - \vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{H}$ を用いて変形し、

$$\frac{d}{dt}\left\{ \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} + \int_V w\, d^3x \right\} = -\int_V \mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{H})\, d^3x$$

ここで、

$\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2}$ ： 運動エネルギーの総和.

$\int_V w\, d^3x$ ： 電磁場のエネルギーの総和

$= \int_V \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H})\, d^3x$

であるから、左辺は総エネルギーである. 総エネルギーの変化が右辺である、と解釈すれば、

$$\vec{E}\times\vec{H} = \vec{S}$$

は"エネルギーの流出密度"を表しているといえる. この $\vec{S}$ をポインティング・ベクトルと呼び、

$$-\int_V \mathrm{div}(\vec{E}\times\vec{H})\, d^3x = -\oint_S (\vec{E}\times\vec{H})\cdot\vec{n}\, dS = -\oint_S \vec{S}\cdot\vec{n}\, dS$$

から、単位面積を流れる電磁場のエネルギーは、$\vec{S}$ であることが分かった.

電磁気学⑥

§12 運動量保存則.

電荷が電磁場からの作用を受けて減速したとしよう. このとき減少した電荷の運動量は. 電磁場の運動量として保存される.
質点の運動量変化が力によって引きおこされるように, 電磁場の運動量を変化させるものは電磁場にはたらく力であるとみなすことができる.
"電磁場の運動量"と"電磁場にはたらく力"の表式を求めよう.

○12−1 運動方程式.

電磁場中の点電荷系の運動方程式から.

$$\sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i \int_V d^3x \, e_i \, \delta^3(\vec{x} - \vec{r}_i(t)) (\vec{E} + \vec{v}_i \times \vec{B})$$

左辺は全電荷の運動量であり. これを $\overrightarrow{G_m}(t)$ とおく.
右辺にマクスウェル方程式を代入して.

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{G_m}(t) = \int_V d^3x \left\{ \vec{E} \cdot \mathrm{div}\, \vec{D} + \left(\mathrm{rot}\, \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) \times \vec{B} \right\}$$

ここで、前章のポインティング・ベクトルの微分を考える.

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{S} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} + \vec{E} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \times \vec{B} - \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \mathrm{rot}\, \vec{E}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\vec{S}\right) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \times \vec{B} - \vec{D} \times \mathrm{rot}\, \vec{E}$$

これを用いると.

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{G_m}(t) + \frac{1}{c^2}\int_V d^3x \, \vec{S}\right) = \int_V d^3x \left(\vec{E}\, \mathrm{div}\, \vec{D} - \vec{D} \times \mathrm{rot}\, \vec{E} - \vec{B} \times \mathrm{rot}\, \vec{H}\right)$$

ここで、左辺は点電荷と電磁場のもつ運動量の合計である.
右辺は運動量変化をもたらすものなので、電磁場にはたらく力であるといえる.

○12-2 マクスウェルの応力テンソル

前節に出てきた"電磁場にはたらく力"を整理しよう.

$$\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{D}-\vec{D}\times\mathrm{rot}\,\vec{E}-\vec{B}\times\mathrm{rot}\,\vec{H}$$

の電　場に関する部分について、

$$\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{D}-\vec{D}\times\mathrm{rot}\,\vec{E}=\varepsilon_0\left(\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{E}-\vec{E}\times\mathrm{rot}\,\vec{E}\right)$$

ここで2階のテンソル $\mathbb{T}_e$ を導入する.

$$\mathbb{T}_e=\varepsilon_0\begin{pmatrix}E_x^2-\frac{1}{2}\vec{E}^2 & E_xE_y & E_xE_z\\ E_yE_x & E_y^2-\frac{1}{2}\vec{E}^2 & E_yE_z\\ E_zE_x & E_zE_y & E_z^2-\frac{1}{2}\vec{E}^2\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbb{T}_e=\varepsilon_0\left(\vec{E}\,\mathrm{div}\,\vec{E}-\vec{E}\times\mathrm{rot}\,\vec{E}\right)$$

但しテンソルの div は

$$(\mathrm{div}\,\mathbb{T})_i=\sum_a\frac{\partial T_{ia}}{\partial x_a}$$

である. 同様に

$$\mathbb{T}_m=\frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix}B_x^2-\frac{1}{2}\vec{B}^2 & B_xB_y & B_xB_z\\ B_yB_x & B_y^2-\frac{1}{2}\vec{B}^2 & B_yB_z\\ B_zB_x & B_zB_y & B_z^2-\frac{1}{2}\vec{B}^2\end{pmatrix}$$

を用いて、

$$\mathrm{div}\,\mathbb{T}_m=\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{B}-\vec{B}\times\mathrm{rot}\,\vec{B}\right)$$
$$=-\vec{B}\times\mathrm{rot}\,\vec{H}$$

$\mathbb{T}_e$, $\mathbb{T}_m$ をまとめて、

$$\mathbb{T}=\mathbb{T}_e+\mathbb{T}_m$$

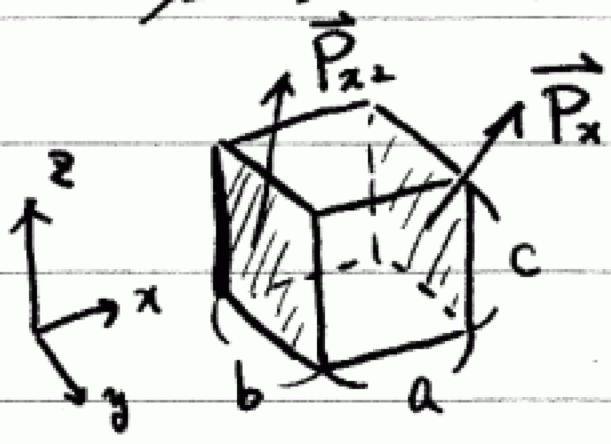
とすると、

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{G}_m(t)+\frac{1}{c^2}\int_V d^3x\,\vec{S}\right)=\int_V d^3x\,\mathrm{div}\,\mathbb{T}=\oint_S ds\,\mathbb{T}\cdot\vec{n}$$

$\mathbb{T}$ をマクスウェルの応力テンソルと呼ぶ.

○12-3 応力テンソルの直観的イメージ

連続物体に圧力が加わっている状況を考えよう。静止物体から、直方体を切り出してみる。各面では隣接している面から圧力を受けていて、また反作用で押し返すことにより静止を保っている。各面にはたらく力は押す力だけでなく摩擦もあるので、1つの面への圧力はベクトル表示する必要がある事に注意しよう。



直方体のx方向面だけを取り出して考える。$\vec{P}_{x1}$，$\vec{P}_{x2}$ は面にはたらいている圧力である。

ここで $\vec{P}_{x1}$ は直方体が外部に及ぼしている圧力であり、直方体自体はその反作用 $-\vec{P}_{x1}$ を受けていることに注意する。

直方体が動く場合も考えて、x方向面が直方体に及ぼす力は

$$(\vec{P}_{x2}-\vec{P}_{x1})bc$$

となる。y方向面，z方向面も考えると、直方体が受ける力は、

$$(\vec{P}_{x2}-\vec{P}_{x1})bc+(\vec{P}_{y2}-\vec{P}_{y1})ac+(\vec{P}_{z2}-\vec{P}_{z1})ba$$

である。$\vec{P}_x$，$\vec{P}_y$，$\vec{P}_z$ が位置の関数であり、直方体が微小であるとすると、直方体にはたらく力 $d\mathbb{F}$ は、$a=dx$，$b=dy$，$c=dz$ とおいて、

$$\begin{aligned}d\mathbb{F}&=\left(\vec{P}_x(x+dx,y,z)-\vec{P}_x(x,y,z)\right)dy\,dz\\&\quad+\left(\vec{P}_y(x,y+dy,z)-\vec{P}_y(x,y,z)\right)dx\,dz\\&\quad+\left(\vec{P}_z(x,y,z+dz)-\vec{P}_z(x,y,z)\right)dx\,dy\\&=\left(\frac{\partial\vec{P}_x}{\partial x}+\frac{\partial\vec{P}_y}{\partial y}+\frac{\partial\vec{P}_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz\end{aligned}$$

となる。$\vec{P}_x$，$\vec{P}_y$，$\vec{P}_z$ をまとめた (9×9)-行列を応力テンソルと呼び、

$$\mathbb{T}=\begin{pmatrix}\vec{P}_x & \vec{P}_y & \vec{P}_z\end{pmatrix}$$

（$\vec{P}_x$ 等は縦ベクトル表記とする）

とすると、

$$d\mathbb{F}=\mathrm{div}\,\mathbb{T}\cdot dx\,dy\,dz$$

である。ガウスの定理から、ある体積領域 V にはたらく力の合計は、

$$\mathbb{F}=\int_V d\mathbb{F}=\int_V \mathrm{div}\,\mathbb{T}\,dx\,dy\,dz=\int_S \mathbb{T}\cdot\vec{n}\,dS$$

となる。

以上から、応力テンソルは各面にはたらく圧力ベクトルを書き並べた行列である事が分かった。

電磁気学⑦

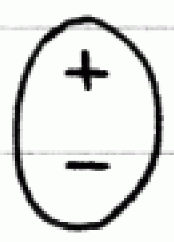
§13 物質中の電磁場.

物質に電磁場がかかる時、物質は電磁場の影響を受け
その電荷分布を変化させる. 従って電荷分布の変化が更に
電磁場を生み出し、元の電磁場との合計が観測される.
結果的に物質の存在による電磁場の変化は、元の電磁場
が何倍かになると近似できる. (通常の物質・電磁場強度なら)
この近似の下では電磁場の性質はマクスウェル方程式の
$\vec{D}$ 及び $\vec{H}$ を変える事で表現できる. (物質の存在は $\vec{D}$ と $\vec{H}$ にのみ
反映する.) 電磁場によって誘導される電荷を調べ、マクスウェル方程式に
代入することでその表式を求めよう.

13-1 電場による分極.

まず導体中の電荷を2種類に分類する.

1. 自由電子(真電荷)
   物体中を(抵抗を受けながらも)自由に動きまわれる
   電子. 真空中を飛ぶ電荷と同一視できる.
2. 分極電荷.
   原子・分子にトラップされた電荷. 通常は原子核と
   電子との電場が打ち消し合っているが、電場が
   かかると電場に従って分布が変化する. 従って
   + と − の電荷は必ず対になって表れる(電荷双極子)

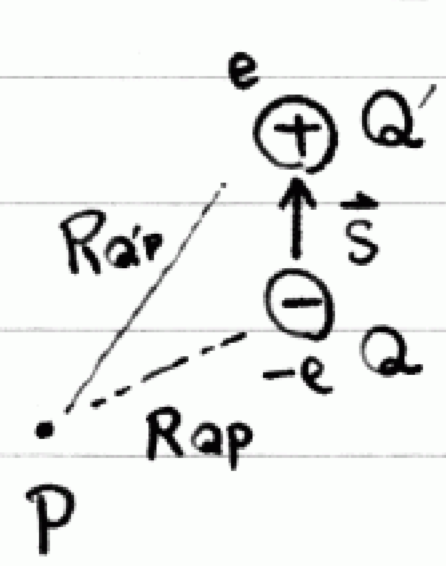


よって真電荷 ρ_e, 分極電荷 ρ_d を用いると、全体の電荷は

$$\rho = \rho_e + \rho_d$$

となる. 但し注意すべきは ρ_d は電荷双極子であるから、その形
に制約がある.

13-2 電荷双極子.



(図)

電荷 e と −e が $\vec{s}$ だけ離れて存在しているとする. この2つの
電荷対を電荷双極子と呼ぶ. e と −e とが近付くほど
電荷の打ち消し合いが起こるので、"電荷双極子の効果"は

$$\vec{p} = e\vec{s}$$

と表せばよい. ($\vec{p}$ の向きは双極子の向きに一致, 強さは電荷×距離)

さて、この双極子がつくる電場は、それぞれの電荷がつくる電場を足せば求まるが、2つの電荷が限りなくくっついている（またはくっついているように見えるような遠くから観測する）と、双極子全体がつくる電場を定式化できる。
無限にくっつけていく時打ち消し合ったら意味がないので、上で述べた"双極子の効果" $\vec{p}$ は一定に保つことにする。
理屈の上では電場を合成すれば良いのだが簡単のため電位の足し合わせを用いよう。静電場におけるスカラー・ポテンシャル ϕ を静電ポテンシャルといい、

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$$

となって高校物理の電位に相当することが分かる。点電荷がつくる静電ポテンシャルは、

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{|\vec{r}-\vec{x}|}$$

（$\vec{r}$は点電荷の位置）

であるから、図のような電荷双極子を点Pからみたときの静電ポテンシャルは、

$$\phi(\vec{x}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_{Q'P}} - \frac{1}{R_{QP}}\right)$$

（$\vec{x}$はPの位置ベクトル）

である。$\vec{p}=e\vec{s}$ を一定に保ちながら $\vec{s}\to 0$ の極限をとると、

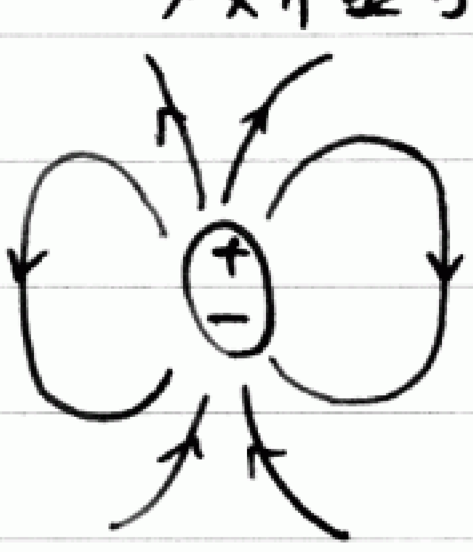
$$\phi(\vec{x}) = \lim_{\vec{s}\to 0}\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_{Q'P}}-\frac{1}{R_{QP}}\right)$$

$$= \lim_{\vec{s}\to 0}\frac{e\vec{s}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{s}\left(\frac{1}{R(\vec{r}+\vec{s})}-\frac{1}{R(\vec{r})}\right)^{(1)}$$

（$R(\vec{x})$はPから$\vec{x}$までの距離を表す関数, $\vec{r}$は点Qの位置）

$$= \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\mathrm{grad}\frac{1}{R(\vec{r})}^{(2)}$$

結局、電荷双極子のつくる静電ポテンシャルは$\vec{p}$（電気双極子能率）と双極子のある位置だけで決まることが分かった。



←電荷双極子のつくる電場.

(1) $\frac{1}{s}$ なんて書いちゃいましたが、これは記号としてありえません。「微分になるよ」と言いたかっただけなので気にしないで下さい。

(2) ベクトルで微分するというのは各成分で微分することなので grad になります。

13-3 分極電荷の表現.

分極した物質では、各原子・分子が電荷双極子になっている. すなわち、物体中の各点が電気双極子能率 $\vec{p}(\vec{x})$ をもっている事になる.

この電荷双極子がつくる静電ポテンシャルの形から分極電荷の表式を求めよう. 前節の式を用いて、分極電荷がつくる静電ポテンシャルは.

$$\phi_d(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \vec{p}(\vec{x}')\cdot \mathrm{grad}\left(\frac{1}{|\vec{x}'-\vec{x}|}\right) d^3\vec{x}'$$

ここで、

$$\mathrm{div}\,\frac{\vec{p}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\mathrm{div}\,\vec{p}(\vec{x}') + \vec{p}(\vec{x}')\cdot \mathrm{grad}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

を用いると、

$$\phi_d(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\int_V \mathrm{div}\left(\frac{\vec{p}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right) d^3\vec{x}' - \int_V \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\mathrm{div}\,\vec{p}(\vec{x}')\, d^3\vec{x}'\right\}$$

第1項は、"$\vec{p}$ が物体外にわき出している量" に比例するが、物体の外部に電荷がないので $\vec{p}=0$ であり、わき出し量も0である. ~~,~~ 従って第1項は0. よって

$$\phi_d(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{-1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,\mathrm{div}\,\vec{p}(\vec{x}')\, d^3\vec{x}'$$

さて、ここである電荷分布 $\rho_d(\vec{x})$ によりつくられる静電ポテンシャルは.

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho_d(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, d^3\vec{x}'$$

であった. この電荷分布が分極電荷のつくるものと同じ静電ポテンシャルをつくっているならば、

$$\rho_d(\vec{x}') = -\,\mathrm{div}\,\vec{p}(\vec{x}')$$

である. よってこのように定めた ρ_d は分極電荷の密度分布である.

よって分極の大きさ $\vec{p}(\vec{x})$ から、分極電荷 $\rho_d(\vec{x})$ を導ける事が分かった.

13-4 分極電流.

物質中では、かかった電磁場によってその点の電気双極子能率が決定され、分極電荷が生じる。

一方、物質中を電流が流れるとき、電流により生成される電磁場によって分極電荷に時間変化が生じる。すなわち分極電荷に由来する分極電流が存在する。分極電流を $\vec{i_d}$，分極電荷を ρ_d とすると電荷保存則より、

$$\mathrm{div}\,\vec{i_d} + \frac{\partial \rho_d}{\partial t} = 0$$

さらに $\rho_d = -\mathrm{div}\,\vec{P}$ だった事を思い出すと、

$$\mathrm{div}\left(\vec{i_d} - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\right) = 0$$

故に、

$$\vec{i_d} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\vec{M}$$

ここで $\mathrm{rot}\,\vec{M}$ というのは、「$\mathrm{div}\,\vec{X} = 0$ の解 $\vec{X}$ には $\mathrm{rot}\,\vec{Y}$ をつけ加えてもまた解になる」事による任意項である。但し $\vec{i_d}$ の定義としては、この任意項が 0 であるものをとる、とするので、

$$\vec{i_d} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

が分極電流である。

上の議論から、物質中の電流には真電流 $\vec{i_e}$，分極電流 $\vec{i_d}$ の他にも、$\mathrm{rot}\,\vec{M}$ で表されるような電流が存在しても良い事が分かる。これを磁化電流と呼び、

$$\vec{i_m} = \mathrm{rot}\,\vec{M}$$

である。(1)

13-5 磁化電流.

$\vec{i_m}$ の正体は何であろうか！ 13-4 から分かる事は、$\vec{i_m}$ は真電荷、分極電荷の双方に依存しない電流成分であるという事である。

この原因は2つあって、

1. 原子のまわりの電子の流れ
2. 電子のスピン

である。

(1) 本当は磁化電流は分極電流の任意項であるとするのは論理的におかしいと思う。(真電流の電荷保存則の任意項とかもある()). 教科書にこう書いてあったので従っただけです。

この双方は微小な磁気双極子としてはたらくので磁気双極子能率$\vec{M}$を生じる。今、電流→磁気双極子能率という順序で考えたが、逆に磁気双極子能率→電流という流れをたどると、

$$\vec{i}_m = \mathrm{rot}\,\vec{M}$$

となる。(物体にかかっている磁場等により$\vec{M}$が決まり$\vec{i}_m$が導かれる)

13-6 物質中のマクスウェル方程式.

今までの議論で

$$\vec{i} = \vec{i}_e + \vec{i}_d + \vec{i}_m$$

$$\rho = \rho_e + \rho_d$$

と分解できたので、マクスウェル方程式は、

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \\ \dfrac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\vec{B} - \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{i}_e + \vec{i}_d + \vec{i}_m \\ \varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho_e + \rho_d \end{cases}$$

と書ける。分極電荷等の表式を代入すると、

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \\ \dfrac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\,\vec{B} - \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{i}_e + \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\vec{M} \quad \text{— ①} \\ \varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho_e - \mathrm{div}\,\vec{P} \quad \text{— ②} \end{cases}$$

①, ②式は、

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\left(\dfrac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}\right) - \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right) = \vec{i}_e \\ \mathrm{div}\left(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\right) = \rho_e \end{cases}$$

となる。ここで、$\vec{D}$及び$\vec{H}$の定義を真空中の場合から拡張して、

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$$

とおく。(真空中では$\vec{P}$及び$\vec{M}$が0である)

すると、マクスウェル方程式は真空中のものと同様の形になって、

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \\ \mathrm{rot}\,\vec{H} - \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{i_e} \\ \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho_e \end{cases}$$

結局、物質の存在は、「$\vec{E}, \vec{B}$ によって $\vec{D}, \vec{H}$ がどのような形になるか」という点に収約された。さらにここで経験的に、

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases}$$

となる事が多い。この現象論を認めると、$\vec{D}, \vec{H}$ は真空中と同じく $\vec{E}, \vec{B}$ に比例するが比例定数が異なるだけである。真空の誘電率 ε_0，透磁率 μ_0 を用いて

$$\varepsilon = \varepsilon^* \varepsilon_0 \quad , \quad \mu = \mu^* \mu_0$$

と表すと、ε を誘電率，ε^* を比誘電率，μ を透磁率，μ^* を比透磁率と呼ぶ。$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ならば、この物質中の電磁場の法則は真空中の法則の ε_0 を ε に，μ_0 を μ におきかえるだけであるから、ローレンツゲージによるマクスウェル方程式は、

$$\begin{cases} \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{A_L}}{\partial t} - \mathrm{grad}\,\phi_L \\ \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A_L} \\ \left(\Delta - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\vec{A_L} = -\mu \vec{i_e} \\ \left(\Delta - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi_L = -\dfrac{1}{\varepsilon}\rho_e \\ \mathrm{div}\,\vec{A_L} + \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial \phi_L}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

となる。但し $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ は光速度であり、真空中に比べ $\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon^*\mu^*}}$ 倍である。

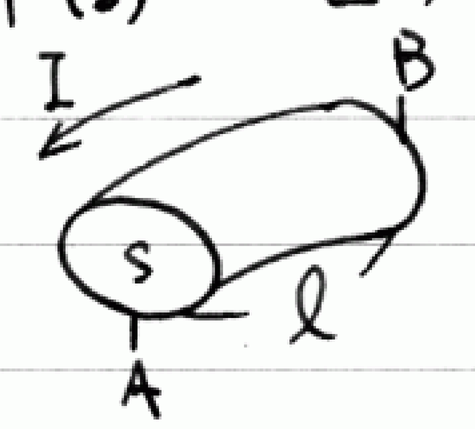
電磁気学 ⑧

§14 オームの法則.

前章で物質中の電磁場の形を論じたので次に物質中の電荷の運動を考えよう. 一般に物質は乱雑な熱振動をしており、物質中を進む自由電子は抵抗を受ける. その抵抗の受け方、及び電子の運動を方程式から導くのは不可能であるから. 経験論的な法則で代用する. これがオームの法則であり、時間反転可能な電磁気の法則を時間反転不可能に(エントロピー増大則を満たす形に)改める点で重要である.

14-1 巨視的なオームの法則.

中高で習った形のオームの法則をまとめよう.



左のような導線があるとき. A, B 点での電位を ϕ_A, ϕ_B とすると.

$$\phi_B - \phi_A = RI$$

が成立する. 但し、導線の素材に固有の定数 ρ (抵抗率) を用いて

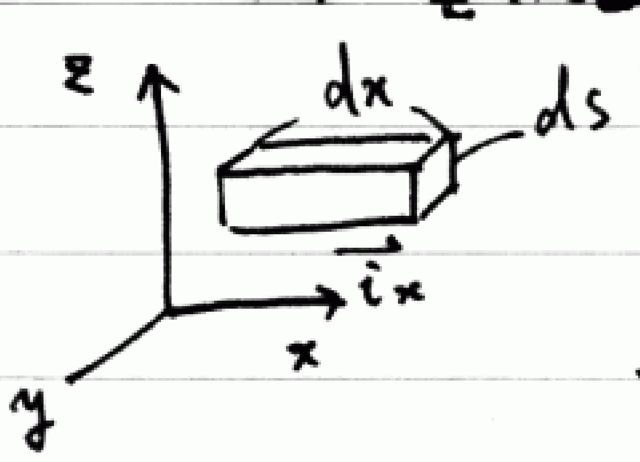
$$R = \rho \frac{l}{S}$$

である. 又、$\sigma = \frac{1}{\rho}$ を電気伝導率と呼ぶことにする

14-2 微視的なオームの法則.

巨視的なオームの法則は、線状の物体を一方向に流れる電流にしか適用できない. これを3次元物体中を様々な方向に流れる電流に適用できるように~~書き~~直そう

まず電流密度を使った形に直す.



$$\phi(x) - \phi(x+dx) = RI_x = \rho\frac{dx}{ds}\cdot ds\cdot \vec{i}_x$$

$$\therefore \frac{\phi(x)-\phi(x+dx)}{dx} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = \rho\, \vec{i}_x$$

y方向, z方向への電流も同様に

$$-\frac{\partial\phi}{\partial y} = \rho\, \vec{i}_y$$

$$-\frac{\partial\phi}{\partial z} = \rho\, \vec{i}_z$$

だから. 結局.

$$\vec{i} = \frac{1}{\rho}(-\mathrm{grad}\,\phi) = \sigma\vec{E}$$

これで微視的なオームの法則が求まった.

(電場の向きに電流が流れるというだけであるが)

14-3 電荷の散逸

物体中にある電荷分布 $\rho_e(\vec{x},0)$ があるとする。時間が進むにつれ電荷が動くが $\rho_e(\vec{x},t)$ の形さえ分かれば動きを見ることができる。

物体に一切外場がかかっていないとき、ρ_e がどう時間変化するか考えよう。

この系の動きはオームの法則と電荷保存則から導けて、

$$\frac{\partial \rho_e(\vec{x},t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{i}_e(\vec{x},t)$$
$$= -\sigma \operatorname{div} \vec{E}(\vec{x},t)$$
$$= -\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_e(\vec{x},t) \qquad \left(\because \text{マクスウェル方程式 } \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}\right)$$

従って ρ_e の解は、

$$\rho_e(\vec{x},t) = \rho_e(\vec{x},0)\exp\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon}t\right)$$

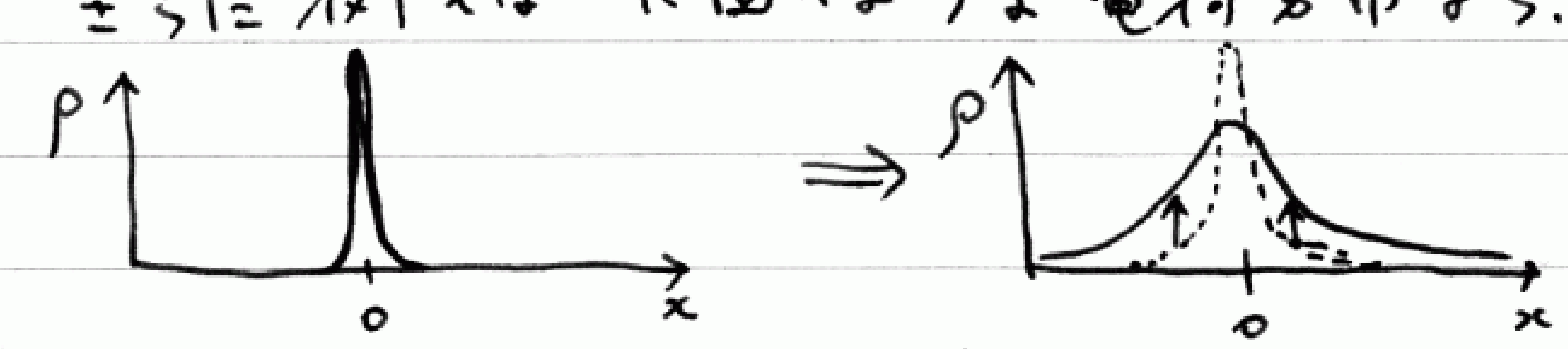
よってはじめの電荷分布は電荷が散逸することにより 0に近付いてゆく。

※ オームの法則は現象論なので多くの近似を含んでいる。

まず上の議論では、任意の $\vec{x}$ に対しオームの法則が成立し誘電率が ε であるとしているが、これは物体が無限に大きいことを仮定している。

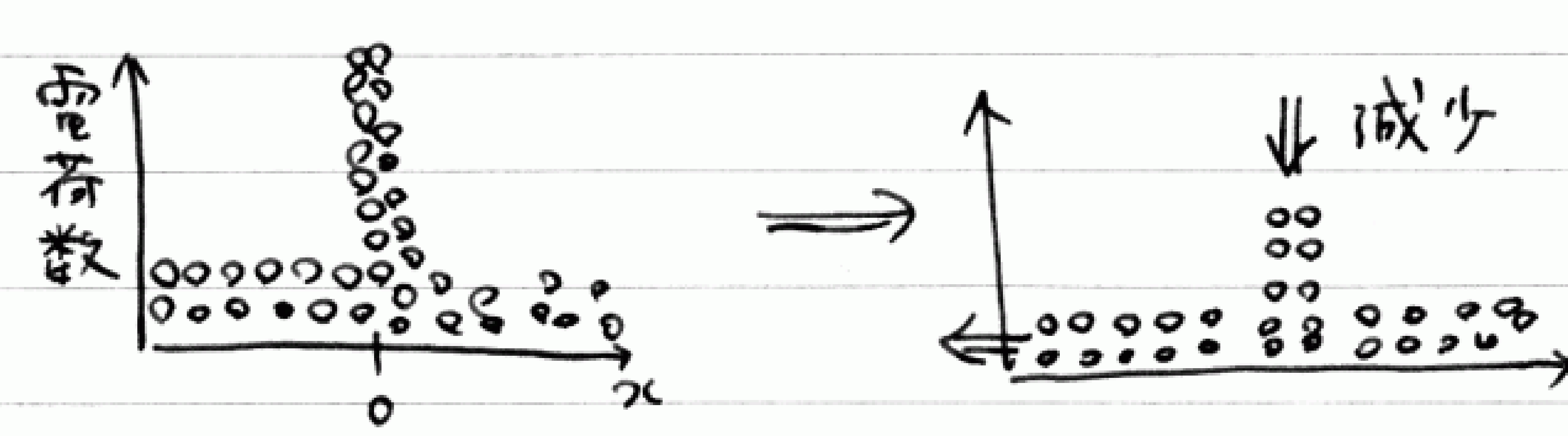
大きさが有限なら電荷はどこかにたまるはずなので、電荷密度が 0に収束しない点があるはずである。

さらに例えば下図のような電荷分布なら、散逸の過程で



となって、

ρ が増える点があるはずであり、上の結果と矛盾する。実はオームの法則は電磁場の伝播速度が有限であることを無視しているので、



⟹ 玉突き。

一瞬のうちに無限遠まで電荷の"玉突き"がおこり、元の電荷分布以外の点で電荷密度が 増加しないという結論になるのである。

※マークの部分は本当かどうか分かりません。なんとなく思いついたことを書いただけ。

14－4 ジュール熱

オームの法則では、$\vec{i_e} = \sigma \vec{E}$ より、電荷は常に $\vec{E}$ にそって動く。
よって電荷は電磁場からエネルギーを供給され続けるが、
電荷自体の運動エネルギーは 0 であると近似できるため、(1)
供給されたエネルギーはどこかへ行ってしまう事になるが、現象論的には、
このエネルギーは熱になって散逸した(2)ものとする。この熱をジュール熱という。
ジュール熱も含めた物質内でのエネルギー保存則を導こう。
物質中の電場エネルギー密度は、

$$\int_0^t \vec{E}(\vec{x},t') \cdot \frac{\partial \vec{D}(\vec{x},t')}{\partial t'} dt' = \int_0^{\vec{D}} \vec{E} \cdot d\vec{D}$$

となる。少し意味がとりずらいので解説すると、$t=0$ のときの電場のエネルギーを 0 とおいて、$t=0$ から t までの間に電荷を無限遠から運んでくるとしてポテンシャルを求める。ポテンシャルの増分は、

$$-\vec{E}(\vec{x},t') \cdot \frac{\partial \vec{\xi_0}(\vec{x},t')}{\partial t'} = \vec{E}(\vec{x},t') \frac{\partial \vec{D}(\vec{x},t')}{\partial t'}$$

運ぶ速度が十分小さい

但し、マクスウェル方程式 $\mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{i_e}$ のうち $\mathrm{rot}\,\vec{H}$ が十分小さいとして無視した。
磁場のエネルギーも同様にすると、電磁場のエネルギー密度 w は、

$$w = \int_0^{\vec{D}} \vec{E} \cdot d\vec{D} + \int_0^{\vec{B}} \vec{H} \cdot d\vec{B}$$

となる。さて、ベクトル解析の公式、

$$\mathrm{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{E} - \vec{E} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{H}$$

にマクスウェル方程式とガウスの定理を使って、

$$-\int_V d^3x \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \int_V d^3x\, \vec{i_e} \cdot \vec{E} + \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n}\, dS$$

電磁場エネルギーの表式とオームの法則を入れてやると、

$$-\frac{d}{dt} \int_V d^3x \left(\int_0^{\vec{D}} \vec{E} \cdot d\vec{D} + \int_0^{\vec{B}} \vec{H} \cdot d\vec{B} \right) = \int_V d^3x\, \vec{i_e} \cdot \frac{\vec{i_e}}{\sigma} + \oint_S \vec{S} \cdot \vec{n}\, dS$$

$$\therefore -\frac{d}{dt} \int_V w\, d^3x = \int_V d^3x \frac{\vec{i_e}^2}{\sigma} + \oint \vec{S} \cdot \vec{n}\, dS$$

但し $\vec{S}$ はポインティングベクトル $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ である。左辺のエネルギー減少は電磁場のエネルギー伝播 $\oint \vec{S} \cdot \vec{n}\, dS$ とジュール熱 $\int d^3x \frac{\vec{i_e}^2}{\sigma}$ の和である。

---

(1) 電子の質量は微小で、抵抗内での速度は十分小さいからエネルギーは無視し得る。
(2) 電磁波の放出によっても物質外部にエネルギーが持ち出されるが、ここでは物質のサイズが無限大であるとするので考えなくてよい。（境界面では $\vec{S}$ の形が変わるので伝播エネルギーの形も変わる）

§15 静電場中の電磁気法則

"電磁場が静的である"とは、マクスウェル方程式に時間変化する項がないこと、すなわち、"電荷分布一定，電流一定，電磁波なし"の状況である．(電荷は静止していない：一定の電流は許される！)

このとき、電荷や電場がどのように形成されるのか考察しよう．

15−1 静電場のマクスウェル方程式

静電場では、tによる微分は全て0になる．(tによらず一定だから)

従ってマクスウェル方程式は、

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 \\ \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho_e(\vec{x}) \end{array}\right\} \text{電場に関する方程式} \\ \left.\begin{array}{l} \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{i_e}(\vec{x}) \\ \mathrm{div}\,\vec{H} = 0 \end{array}\right\} \text{磁場に関する方程式} \end{cases}$$

上のように電場に関わる方程式と磁場に関わる方程式に分離される．

ローレンツゲージによる表示では、

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi \\ \Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho_e(\vec{x}) \end{array}\right\} \text{電場} \\ \left.\begin{array}{l} \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \\ \Delta\vec{A} = -\mu\,\vec{i_e}(\vec{x}) \end{array}\right\} \text{磁場} \\ \mathrm{div}\,\vec{A} = 0 \quad \text{---- ローレンツ条件} \end{cases}$$

以降では、まず電場に関する方程式から電場及び電荷分布を取り扱おう．

15−2 電荷分布のつくる電場

電荷分布 $\rho_e(\vec{x})$ が与えられた時、ローレンツゲージによるマクスウェル方程式より、

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho_e(\vec{x}) \quad \text{--- ①}$$

をみたすような静電ポテンシャル(電位) ϕ を求め、$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$ を用いて電場 $\vec{E}$ が求まる．①のような方程式をポアソン方程式と呼ぶ．

数学的にはポアソン方程式を解くだけの問題であるが、面倒なので
ここでは物理的な意味から解の形を導こう。
任意の電場は、電子，陽子等の点電荷がつくる電場の合成である。
従って、1つの点電荷がつくる電位をあらかじめ求めておいて、それを
各電荷について足し合わせれば ϕ が求まる。原点に電気量1の
点電荷があるときの電位を $G(\vec{x})$ とおく。ポアソン方程式は、

$$\Delta G(\vec{x}) = -\frac{1}{\varepsilon}\,\delta^3(\vec{x})$$

であるが、この方程式の解は、高校でやった通り、"原点方向のキョリに反比例"
だから、

$$G(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon|\vec{x}|}$$

である。よって、任意の電荷分布 $\rho_e(\vec{x})$ は、

$$\rho_e(\vec{x}) = \int_{\text{全空間}} \delta^3(\vec{x}-\vec{x}')\,\rho_e(\vec{x}')\,d^3\vec{x}'$$

のように点電荷の和で書けるから、その静電ポテンシャルは

$$\phi_e(\vec{x}) = \int_{\text{全空間}} G(\vec{x}-\vec{x}')\,\rho_e(\vec{x}')\,d^3\vec{x}'$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{\text{全空間}} \frac{\rho_e(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\,d^3\vec{x}'$$

と表される。

15-3 静電場のエネルギー

電磁場のエネルギー

$$W = \int_V d^3x \left(\int_0^{D} \vec{E}\cdot d\vec{D} + \int_0^{B} \vec{H}\cdot d\vec{B} \right)$$

に対し、$\vec{D} = \varepsilon(\vec{x})\vec{E}$，$\vec{B} = \mu(\vec{x})\vec{H}$ と仮定すると、

$$W = \int_V d^3x \left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} \right)$$

よって電場のエネルギーは

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V d^3x\,\vec{E}\cdot\vec{D}$$

静電場である事を利用すると、

$$W_e = \frac{1}{2}\int_V \rho_e(\vec{x})\,\phi(\vec{x})\,d^3\vec{x}$$

となる（理屈略）これは、電荷を無限遠からはこんでくる仕事
$\rho_e(\vec{x})\,\phi(\vec{x})$ を足し合わせたものであるが、電位 ϕ 自身が

はこばれてくる電荷により作られるので $\frac{1}{2}$ がつく、と覚えておけば良い。
（コンデンサーのエネルギー $U=\frac{1}{2}QV$ と同じ）
孤立導体にたまった電荷のもつエネルギーを考えてみよう。
オームの法則により、導体中に電場があるとそこに電流が流れ、電荷分布が時間変化する。従って静電場である為には、導体中に電場がないという条件が課される。よって、導体内部でのガウスの法則より、

$$\int_V \rho_e \, d^3V = \int_S \vec{D}\cdot\vec{n}\, dS = 0$$

故に $\rho_e = 0$ となる。すなわち導体内部に電荷はない。さらに導体中の電位が一定でなければならない事も考えると、結局導体中の電荷分布は、
「表面にだけ電荷が分布し、電位は一定」という形になる。
従ってそのエネルギーは、

$$W_e = \frac{1}{2}\phi Q \quad (\phi \text{は導体の電位}, Q\text{は全電気量})$$

となる。また、ϕ と Q の間には、導体の材質，形で決まる関係があって、

$$C = \frac{Q}{\phi}$$

とおくと、近似的に C は一定となる。この C を静電容量と呼ぶ。

15-3. 導体系の静電場

多数の導体に一定量の電荷を与えた時、電荷分布及び電位はどうなるか、という問題を考える。まず一般に電荷分布を決める定理を示す。

○トムリンの定理
静電場は、様々な電荷分布のうち電場のエネルギーが最小の（極小の）ものである。
（証明略）
この定理から、まず適当に電荷分布を仮定して、エネルギーを求め、エネルギーの極小条件から分布を求める、という手順になる。
但しエネルギーを知る為には電位が必要だから、電位を知るための方法が別途必要である。この方法は一般に容易でないが、第1条件として次の定理が成り立つ。

○グリーンの相反定理
n 個の導体に，$Q_1 \cdots Q_n$ の電荷を与えた時の電位 $\phi_1 \cdots \phi_n$ と $Q_1' \cdots Q_n'$ の電荷を与えた時の電位 $\phi_1' \cdots \phi_n'$ の間には、

$$\sum_i Q_i \phi_i' = \sum_i Q_i' \phi_i$$

という関係がある。

この定理の証明は簡単なのでやってみよう。まず点電荷 $e_1 \cdots e_n$ と各点での電位 $\phi_1 \cdots \phi_n$ について、ϕ_1 をつくるのは $e_2 \cdots e_n$ であるから、

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{e_2}{r_{12}} + \cdots + \frac{e_n}{r_{1n}}\right)$$

点電荷が $e_1' \cdots e_n'$ のときの電位 $\phi_1' \cdots \phi_n'$ を想定し、両辺に e_1' をかけると、

$$e_1'\phi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\qquad \frac{e_1'e_2}{r_{12}} + \cdots + \frac{e_1'e_n}{r_{1n}}\right)$$

他の電荷についても、

$$e_2'\phi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{e_2'e_1}{r_{21}} + \qquad + \cdots + \frac{e_2'e_n}{r_{2n}}\right)$$

$$\vdots$$

$$e_n'\phi_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{e_n'e_1}{r_{n1}} + \frac{e_n'e_2}{r_{n2}} + \cdots + \qquad \right)$$

全部足すと、

$$\sum_i e_i'\phi_i = \overbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{e_2'}{r_{21}} + \cdots + \frac{e_n'}{r_{n1}}\right)}^{\phi_1'} e_1$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{e_1'}{r_{12}} + \qquad \frac{e_3'}{r_{32}} + \cdots + \frac{e_n'}{r_{n2}}\right)}_{\phi_2'} e_2$$

$$\vdots$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{e_1'}{r_{1n}} + \frac{e_2'}{r_{2n}} + \cdots + \qquad\right)}_{\phi_n'} e_n$$

$$= \sum_i \phi_i' e_i$$

導体系では、まず全ての点電荷に対し上の結果を利用して、

$$\sum_k^{\text{各導体}} \int_{V_k} \rho_k' \phi_k \, dV = \sum_k^{\text{各導体}} \int_{V_k} \rho_k \phi_k' \, dV$$

1つ1つの導体内で ϕ は一定だから、

$$\sum_k \phi_k \int_{V_k} \rho_k' \, dV = \sum_k \phi_k' \int_{V_k} \rho_k \, dV$$

$$\therefore \sum_k \phi_k Q_k' = \sum_k \phi_k' Q_k.$$

この定理を用いると、導体にたまった電荷と電位の関係が明らかになる。n個の導体のうち特定の1つにだけ単位電荷を与えて、他の電荷は0にする。このときの各導体の電位を記録しておく。すなわち、i番目の導体にだけ電荷を与えたとき、各導体の電位が $P_{i1}, P_{i2} \cdots P_{in}$ になったとしよう。このとき、導体系に電荷 $Q_1 \cdots Q_n$ を与えたときの電位を $\phi_1 \cdots \phi_n$ とすると、グリーンの相反定理より、

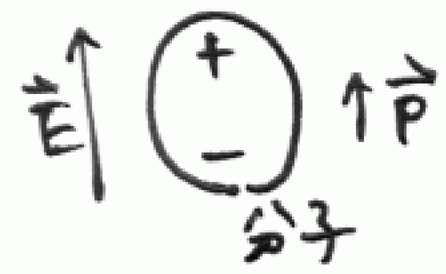
$$1 \cdot \phi_i = \sum_j P_{ij} Q_j$$

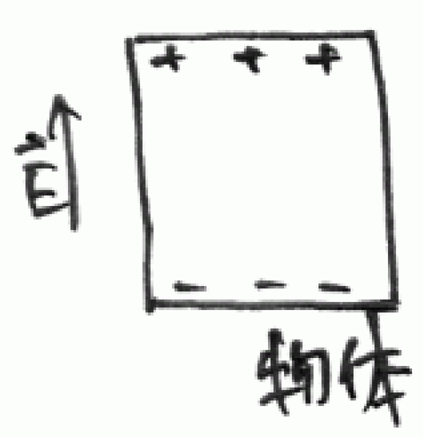
となる。よってある導体上の電位は各導体から及ぼされる電位を足したものになる。

電磁気学⑩

§16 誘電体中のガウスの法則.

§13 物質中の電磁場 において、電磁場中の物質の存在は、分極電荷による電荷双極子能率 $\vec{p}$ で代表される事を示した. 静電場中における分極電荷の表現を考えよう.





電荷双極子能率 $\vec{p}$ は、電気量×動いたキョリ の密度であった.
即ち $\vec{p}$ を曲面上で積分すると、その面を通過した分極電荷の量になる. 一定電場・同一物質中では $\vec{p}$ は一定だから、結局分極電荷は全体が平行移動する形で表面に表れる事が分かる. (十分小さいが分子よりは大きなスケールで平均化を行っている事に注意)
すると、静電場中の導体と同様に、電荷は物質表面(境界)にあると考えて良い事になり、後述の電場決定法が導体・誘電体の区別なく適用可能になる訳である.

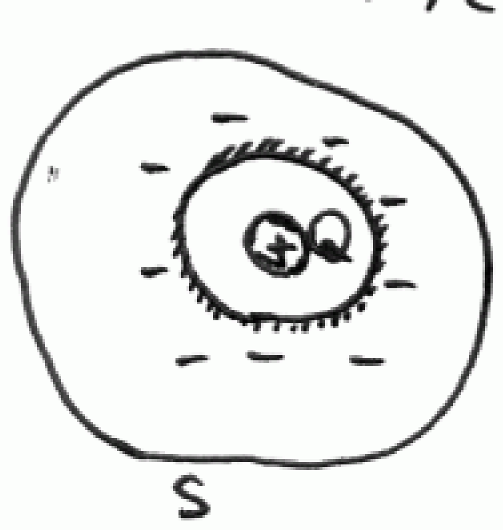
この節では、物質表面に現れた電荷(表面電荷)の性質を論じよう.

16-1 誘電体中のガウスの法則.

同一物体中では均一電場に対する分極は一様なので、物体中の閉曲面を通過する分極電荷の総和は0である.

$$\int_S \vec{p}(\vec{x})\cdot\vec{n}\,dS = 0$$

これを拡張し、均一でない電場に対してもこの式が成り立つとする[1]
よって、物体に電荷Qを囲む表面があって、さらにそれを囲む曲面Sを通過する分極電荷は、



$$\int_S \vec{p}(\vec{x})\cdot\vec{n}\,dS$$

となり、これはSのとり方によらない. しかもこの電荷は表面に集まっているので、Sにおけるガウスの法則は、

$$\varepsilon_0\int_S \vec{E}(\vec{x})\cdot\vec{n}\,dS = Q - \int_{表面}\vec{p}(\vec{x})\cdot\vec{n}\,dS = Q - \int_S \vec{p}(\vec{x})\cdot\vec{n}\,dS$$

---

(1) 教科書では何の説明もなくこの式を出していますが、均一でない電場に対する拡張が成立することは自明ではありません. (微分理論的にも出てきません.)
経験則なのかな?

従って.

$$\int_S \left(\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{x}) + \vec{P}(\vec{x})\right)\cdot n\, dS = Q$$

電束密度 $\vec{D}$ は、

$$\vec{D}(\vec{x}) = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

だった事を思い出し.

$$\int_S \vec{D}(\vec{x})\cdot\vec{n}\, dS = Q$$

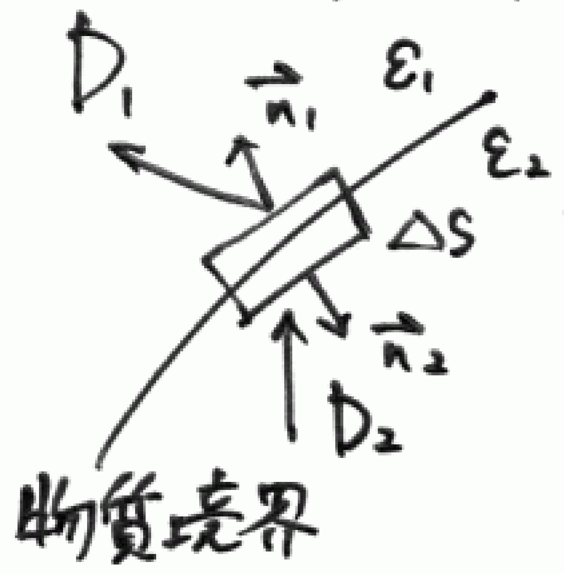
微分形式では、

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho_e(\vec{x})$$

要するに、誘電体中の静電場も表面にだけ電荷があると考えれば良いが、その電荷の分布は、$\vec{D}$ の形がどうなっているかに帰着されるので、$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ のような形で物質の存在を表現すれば、物質境界上の $\vec{D}$ の関係から静電場が導れるのである.

§17. 誘電体の境界条件.

$\vec{D}$ の関係をラプラス方程式の境界条件にもち込んでおこう.

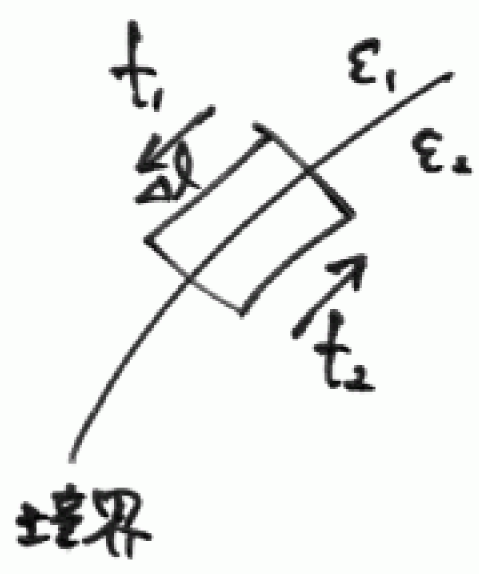


物質境界上で微小直方体をとる. $\vec{n}_1 = -\vec{n}_2$ である.
ガウスの法則から,

$$\vec{D}_1\cdot\vec{n}_1\Delta S + \vec{D}_2\cdot\vec{n}_2\Delta S = 0$$

$$\therefore\ (\vec{D}_1 - \vec{D}_2)\cdot\vec{n}_1 = 0$$

よって $\vec{D}$ の法線成分は境界上で連続である.

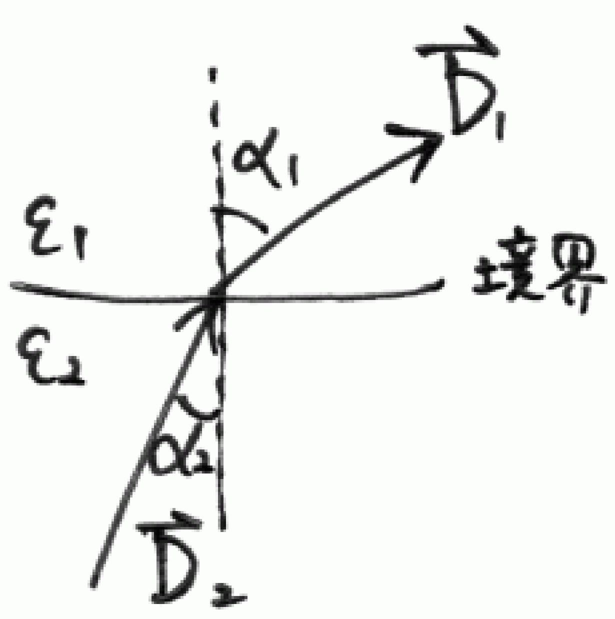


今度は微小長方形をとる. $\vec{t}_1 = -\vec{t}_2$. $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$ から.

$$\vec{t}_1\cdot\vec{E}_1\Delta l + \vec{t}_2\cdot\vec{E}_2\Delta l = 0$$

$$\therefore\ (\vec{E}_1 - \vec{E}_2)\cdot\vec{t}_1 = 0$$

よって $\vec{E}$ の接線成分は境界上で連続である.



今, $\vec{D}_1 = \varepsilon_1\vec{E}_1$, $\vec{D}_2 = \varepsilon_2\vec{E}_2$ と表せるとすると,

$$|\vec{D}_1|\cos\alpha_1 = |\vec{D}_2|\cos\alpha_2$$

$$\left|\frac{1}{\varepsilon_1}\vec{D}_1\right|\sin\alpha_1 = \left|\frac{1}{\varepsilon_2}\vec{D}_2\right|\sin\alpha_2$$

$$\therefore\ \frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$: $\vec{D}$ に関する屈折の法則.

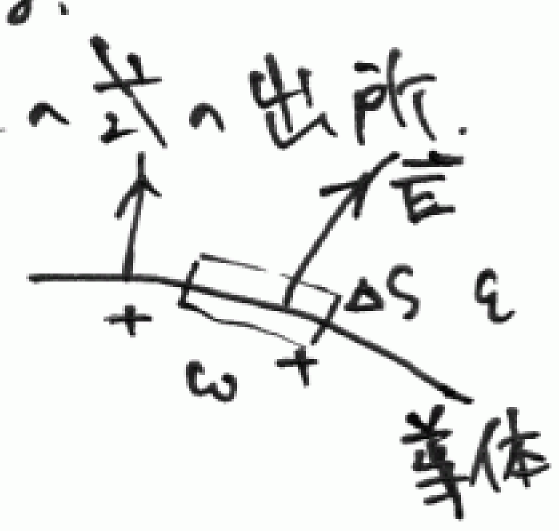
§18. 境界条件からの静電場決定

今までの節で、導体・誘電体ともに、普通は物体中に電荷はなく、表面の電荷分布を考えれば良いことが分かった。よって、物体がいくつかあって電荷総量，電位が与えられているとき、電場を決定せよという問題は、

1. 物体中及び真空中において電荷がない事を表現して、
$$\Delta\phi(\vec{x})=0 \quad (\text{ラプラス方程式})$$
とする。
2. ラプラス方程式を解く際に、物質境界における条件をみたす解をとる

という手順になる。このように ϕ を定めれば、表面電荷密度 ω も
$$\omega=\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{n}=-\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial n}(s)$$
となる。

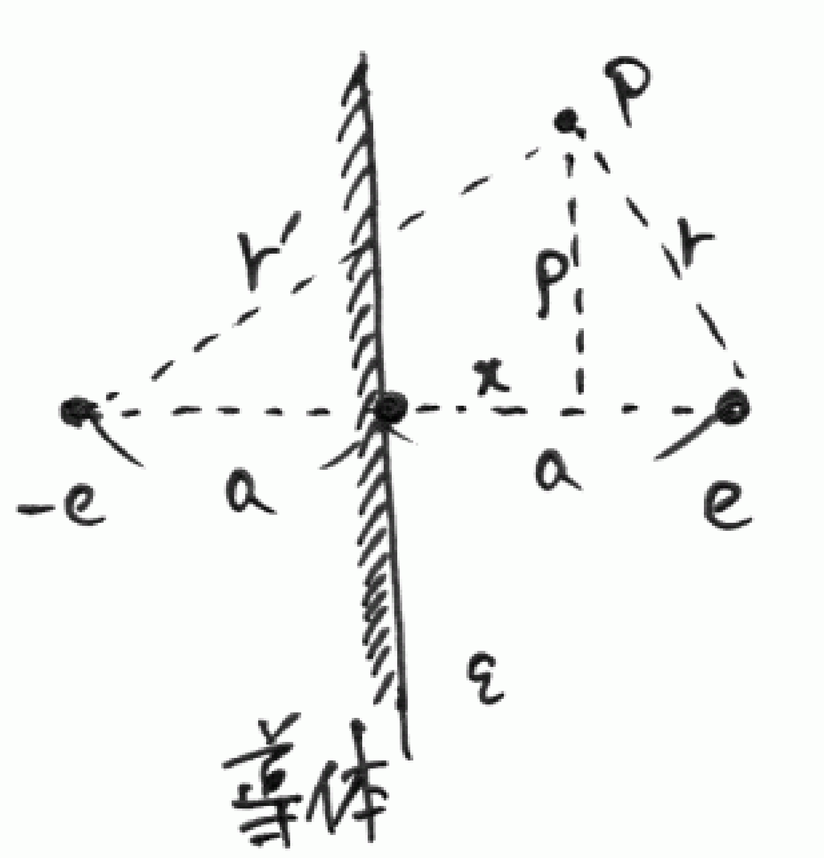
※ この式の出所。



導体表面に微小直方体をとる。ガウスの法則は、導体中に電場がないことに注意して、
$$\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{n}\,dS=\omega\,dS$$
$$\therefore\ \omega=\varepsilon\vec{E}\cdot\vec{n}$$

さて、$\Delta\phi(\vec{x})=0$ を解くのは数学的に難しいので、いくつかのパターンしかとり扱わない。詳しくは教科書参照。

18-1 鏡像法



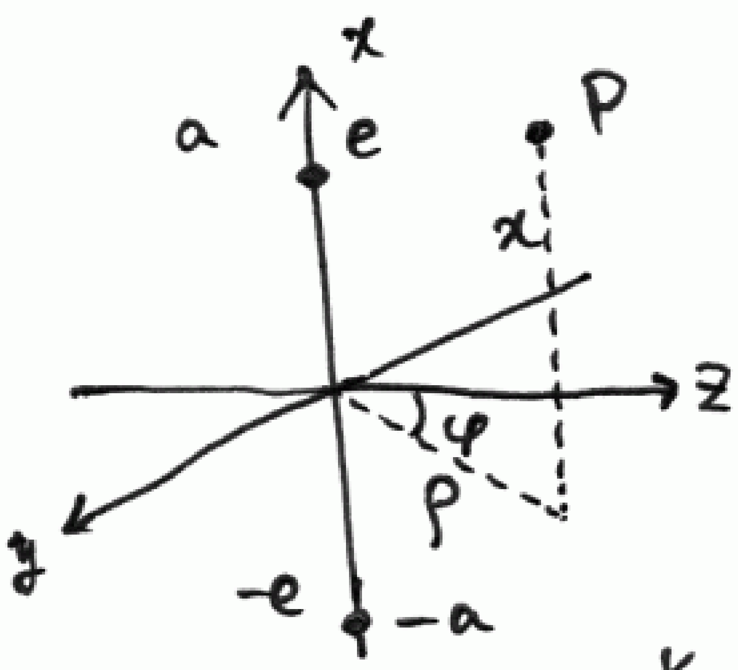
無限に広い平面導体を考える。導体が接地しているならば、境界条件は $\phi=0$ である。
さて、ある点電荷 e があったとき、もし導体を境に対称な位置に $-e$ を置けば、境界上で $\phi=0$ が常に成り立つことが分かる。
つまり導体表面に誘導される電荷もこの $-e$ の電荷と同等の電位分布をつくるはずである※。まず任意の点Pにおける電位を求めると、導体外部では、
$$\frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}\right)$$
となる。

※ この部分の根拠が良く分からん。でも教科書がそう言っているからしかたない。

この電位から表面電荷を求めよう.

$$\omega = -\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial n}(s)$$

$$= -\frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r'}\right)_{x=0}$$



※ yz平面より下が導体.

円筒座標を導入して.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(x-a)^2}}$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(x+a)^2}}$$

より.
$$\omega = -\frac{e}{4\pi}\frac{2a}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}$$

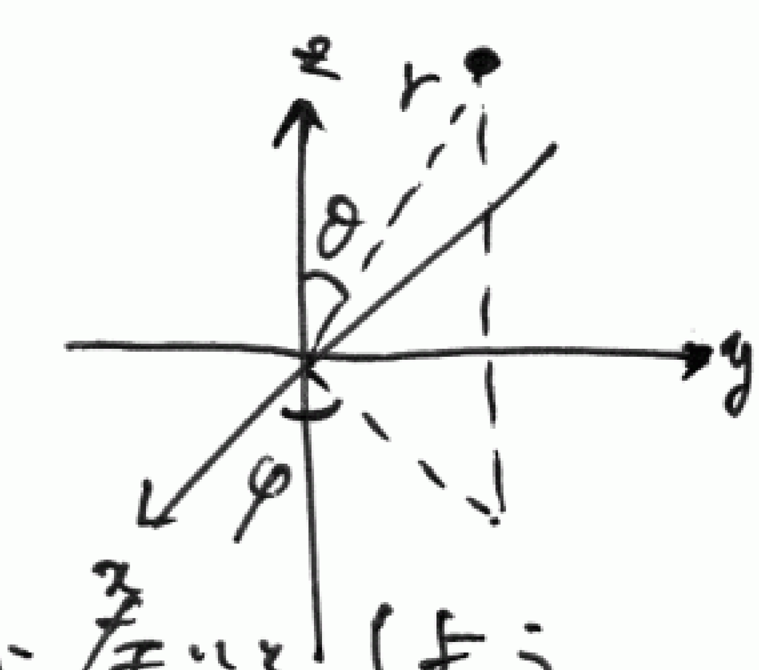
となる. 誘導された全電荷は. ωを全導体表面で積分して.

$$\int_0^\infty -\frac{e}{4\pi}\frac{2a}{(\rho^2+a^2)^{3/2}}(d\rho \times 2\pi\rho) = -e$$

18-2 極座標系におけるラプラス方程式.

ある軸のまわりに回転対称な系においては、極座標表示をしておくと対称性をうまく利用できる.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}$$



と変数変換する. 但しこのとき z軸について回転対称だから φ 依存性が無いとしよう.

このとき.

$$\Delta\phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi$$

$$= \left\{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial\theta}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^2\right\}\phi$$

$$= \cdots(\text{面倒なので略})\cdots = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)$$

となる. ラプラス方程式は.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)=0$$

この解ϕは、次のように変数分離できる。(*)

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{U(r)}{r}\cdot P(\theta)$$ （φ依存性がないことを前提にしている）

ラプラス方程式に代入して、

$$\frac{P(\theta)}{r}\cdot\frac{\partial^2 U(r)}{\partial r^2} + \frac{U(r)}{r^3}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)\right\} = 0$$

$$\frac{r^2}{U(r)}\frac{\partial^2 U(r)}{\partial r^2} = -\frac{1}{P(\theta)}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)\right\}$$

左辺はrの、右辺はθの関数だから、これがr,θによらず成立するためには、両辺が定数である必要がある。この定数を$l(l+1)$とおこう。

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\dfrac{dP}{\partial\theta}\right) + (l+1)lP = 0 & \cdots ① \\ \dfrac{d^2U}{dr^2} - \dfrac{l(l+1)}{r^2}U = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

というように変数分離できた。②の解は、

$$U(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l}$$ （A,Bは定数）

である（確かめてみよ。）

又、①において、$\cos\theta = x$ とした方程式

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dP}{dx}\right) + l(l+1)P = 0$$

はルジャンドルの陪微分方程式と言い、解は、$l=0,1,2\cdots$のときのみ存在して、

$$x = CP_l(x) = C\cdot\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l$$ （Cは定数）

となる。（$P_l(x)$の解の形は覚える必要はないと思う。）

これを用いると、ϕの一般解は、

$$\phi_l(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r}\left(A_l r^{l+1} + B_l r^{-l}\right)P_l(\cos\theta)$$

（A_l, B_lは各lについて定めて良い。Cの任意性はA,Bに吸収される）

$l=0,1,2\cdots$についてそれぞれの解を足してもまた解になるから、

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^{l+1} + B_l r^{-l}\right)P_l(\cos\theta)$$

が最も一般の解である。

（この節の内容の使い途はレポート問題参照の事）

(*) 例によって理屈は分からん。