電磁気学 A　演習問題(3)　解答

第 1 問

1. 上面,下面の電荷はそれぞれ$\sigma_1 S$, $\sigma_2 S$である.電荷保存則によれば,これらの和は外部電場をかける前の電荷の総和に等しいから

$$\sigma_1 S + \sigma_2 S = Q.$$

2. 図の下向きを正とすると,各電場の向きに注意して

$$E_0 + E_1 - E_2 = 0.$$

3. 演習問題(1) 第 2 問の結果より

$$E_i = \frac{\sigma_i}{2\varepsilon_0} \quad (i = 1,2).$$

4. これら 3 式を連立方程式として解くと

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2S} - \varepsilon_0 E_0 \quad , \quad \sigma_2 = \frac{Q}{2S} + \varepsilon_0 E_0.$$

★3.で用いた,無限平面上に面密度σで分布する電荷が作る電場の大きさは

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

である,という事実は覚えておいた方がよいです.万一忘れてしまったら,その場で Gauss の法則から導きましょう(閉曲面としては,平面を垂直に貫く直円柱を考えます).

第 2 問（問題 3.の訂正: $\overrightarrow{E_0}(\vec{r}) = \vec{0} \rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$）

1. 内側表面,外側表面の電荷はそれぞれ$4\pi a^2 \sigma_1$, $4\pi b^2 \sigma_2$である.電荷保存則によれば,これらの和は外部電場をかける前の電荷の総和に等しいから

$$4\pi a^2 \sigma_1 + 4\pi b^2 \sigma_2 = Q.$$

2. $\overrightarrow{E_0}(\vec{r})$は,点電荷$q$によって作られる電場だから

$$\overrightarrow{E_0}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}.$$

$\overrightarrow{E_1}(\vec{r})$は,半径$a$の球殻上一様に分布した電荷$4\pi a^2 \sigma_1$が作る電場だから

$$\overrightarrow{E_1}(\vec{r}) = \begin{cases} \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\hat{r} \ (r > a) \\ \vec{0} \ (r < a). \end{cases}$$

同様に,$\overrightarrow{E_2}(\vec{r})$は,半径$b$の球殻上一様に分布した電荷$4\pi b^2 \sigma_2$が作る電場だから

$$\overrightarrow{E_2}(\vec{r}) = \begin{cases} \left(\frac{b}{r}\right)^2 \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\hat{r} \ (r > b) \\ \vec{0} \ (r < b). \end{cases}$$

3. $a < r < b$のとき$\vec{E}(\vec{r}) = \overrightarrow{E_0}(\vec{r}) + \overrightarrow{E_1}(\vec{r}) + \overrightarrow{E_2}(\vec{r}) = \vec{0}$より

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\hat{r} + \vec{0} = \vec{0}$$

$$\therefore \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = 0.$$

4. 3.の結果より

$$\sigma_1 = -\frac{q}{4\pi a^2}.$$

これと 1.の結果を併せて

$$\sigma_2 = \frac{Q+q}{4\pi b^2}$$

を得る.

5. 2.と 4.の結果より

$$\lim_{r\to a-0}\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{r\to a-0}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} + \vec{0} + \vec{0}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{r} = -\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\hat{r},$$

$$\lim_{r\to b+0}\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{r\to b+0}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{r} + \left(\frac{b}{r}\right)^2 \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\hat{r}\right) = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 b^2}\hat{r} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}\hat{r}$$

となり,いずれも大きさが

$$\frac{(\text{面電荷密度})}{\varepsilon_0}$$

で表され,かつ導体表面に垂直である.

…間違いなどあったら,髙橋までお知らせください.その他質問も,できる限り答えます.

2010 年 1 月 17 日　　髙橋　一史